Cuadernos de Mecánica Computacional

Vol. 22 nº1, 2025

Sociedad Chilena de Mecánica Computacional

"TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE LAX-RICHTMYER Y SU APLICACIÓN AL ESTUDIO DE CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS"

Emilio Cariaga[1] y Cecilia Fuentes[1]

[1] Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas –Universidad Católica de Temuco
Av. R.Ortega 02950 – Temuco – CHILE
e-mail : ecariaga@uct.cl, charlottecfuentes@gmail.com

RESUMEN

Este estudio aborda la convergencia del método de diferencias finitas (MDF) aplicado a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y parciales (EDP), tanto lineales como no lineales. La convergencia del MDF se establece tradicionalmente por su consistencia y estabilidad. Sin embargo, el teorema de Lax-Richtmyer (Lax-R.) postula la equivalencia de estas condiciones bajo restricciones de estabilidad más rigurosas. Demostramos la convergencia del MDF para cuatro modelos matemáticos representativos: dos EDO y dos EDP, cada par incluyendo una formulación lineal y otra no lineal. Dada la extendida aplicación del MDF en diversas ciencias aplicadas, esta investigación propone una metodología de análisis unificada para su convergencia. Adicionalmente, se evalúa la aplicabilidad práctica del teorema de Lax-R. en estos casos modelo.

1. INTRODUCCIÓN

El MDF aún hoy goza de una gran popularidad entre los científicos aplicados de diversas disciplinas al momento de resolver numéricamente una EDP, lo cual se explica en parte por requerir de conocimientos elementales de cálculo diferencial, y la enorme cantidad de librerías de código computacional disponibles gratuitamente en diversos lenguajes. Esto se constata fácilmente por los libros de texto y artículos científicos publicados por prestigiosas editoriales en los últimos años (cf. [1], [6], [9], [10], [11]). Sin embargo, los estudios matemáticos de convergencia basados en el MDF ya no son tan frecuentes, lo cual se explica en parte por el interés de los analistas numéricos en métodos más especializados tales como el método de elementos finitos o el método de volúmenes finitos, ambos de amplio uso también en ingeniería y ciencias aplicadas.
Desde el punto de vista de la docencia de pregrado también se observa una retirada significativa del clásico curso de cálculo numérico de las mallas curriculares de ingeniería en Chile, y/o del capítulo final de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. Se añade a esta problemática la heterogeneidad de notación para los mismos objetos matemáticos en los libros de texto y apuntes de los docentes, y la atención parcial hacia un determinado tipo de modelos.

Motivados por estas consideraciones se planteó el objetivo de hacer una presentación matemática y notacionalmente homogénea del estudio de convergencia para una muestra de ecuaciones diferenciales: dos EDO y dos EDP, y en cada caso una lineal y otra no lineal, es decir, cuatro modelos distintos, siendo las dos EDP de tipo parabólicas. Como fundamento matemático del estudio de convergencia se recurre a los dos teoremas ya clásicos existentes para tales efectos, como son el Teorema fundamental del método de diferencias finitas, y el Teorema de Lax-R.

La totalidad de este estudio corresponde al trabajo de graduación final [4] del programa Magíster en Matemáticas Aplicadas (profesional) de la Universidad Católica de Temuco.

El presente artículo está estructurado del siguiente modo: en la sección 2. se desarrollan las ideas fundamentales del MDF, en la sección 3. se muestran los modelos y esquemas numéricos utilizados en los estudios de convergencia, y en la sección 4. se presenta el análisis de convergencia propiamente tal, finalizando con las conclusiones.

2. EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

La idea esencial del MDF consiste en reemplazar las derivadas presentes en la ecuación diferencial por aproximaciones algebraicas basadas en la aplicación del teorema de Taylor (cf. [2], [3], [8]). Por ejemplo, para derivadas ordinarias usualmente se utilizan las siguientes identidades

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + \frac{h}{2} \cdot u^{(2)}(\epsilon)$$

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot u^{(3)}(\epsilon)$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot u^{(4)}(\epsilon)$$

Por otro lado, y a partir de las identidades anteriores las siguientes igualdades son ejemplos relevantes para el caso de las derivadas parciales

$$u_{xx}(x,y) = \frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x,y) + u(x-\Delta x, y)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot u_{xxxx}(\epsilon, y)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot u_{xxxx}(\epsilon, t)$$

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \cdot u_{tt}(x, \epsilon).$$

En las identidades anteriores, $\epsilon \in]x-h, x+h[$, denota un valor numérico cuya existencia está garantizada por el mismo teorema de Taylor. Sólo por simplicidad notacional se utiliza la misma letra ϵ en todos los casos.
Junto con la consideración de las anteriores identidades otra etapa relevante del MDF consiste en la discretización del dominio sobre el cual se desea construir una solución aproximada. Por ejemplo, para una función univariada del tipo $u(x)$ con $x \in D =]a, b[$ se construye la partición $P = \{x_j, j = 0, \dots, m\}$ del dominio D definida por

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < b = x_m,$$

con tamaño de paso espacial $\Delta x = x_{j+1} - x_j, j = 0, \dots, m-1$. Usualmente se anota $h = \Delta x$. Análogamente, para una función bivariada $u(x, t)$ con $(x, t) \in D =]a, b[\times]0, t^F[$ se construye la partición $P = \{(x_j, t^n), j = 0, \dots, m; n = 0, \dots, F\}$ del dominio D con

$$0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^n < t^{n+1} < \cdots < t^F,$$

y tamaño de paso temporal $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. En todo este artículo se asume, sin pérdida de generalidad, que las particiones son uniformes, esto es, que los tamaños de paso espacial Δx y temporal Δt son constantes.
Dada la partición P del dominio D se utilizará la letra U para denotar la función de aproximación definida por el MDF. Su evaluación en el nodo x_j se anotará como $U_j = U(x_j)$, y como $U_j^n = U(x_j, t^n)$ a su evaluación en el nodo (x_j, t^n). Respecto de la solución analítica $u(x)$ o $u(x, t)$ de la ED se anotará $u_j = u(x_j)$, o $u_j^n = u(x_j, t^n)$, respectivamente, cuando sea evaluada en los elementos de la partición P. Claramente, $U_j \cong u_j$, y $U_j^n \cong u_j^n$, con lo cual se obtienen las siguientes aproximaciones básicas del MDF

$$u'(x_j) \cong \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h},$$

$$u''(x_j) \cong \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2},$$

$$u_t(x_j, t^n) \cong \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t},$$

$$u_{xx}(x_j, t^n) \cong \frac{U_{j+1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2},$$

$$u_{xx}(x_j, t^n) \cong \frac{U_{j+1}^{n} - 2U_j^{n} + U_{j-1}^{n}}{(\Delta x)^2}.$$

En efecto, si en la identidad se hace $x = x_j$, y teniendo presente que con esto, $x + h = x_j + \Delta x = x_{j+1}$, y $x - h = x_j - \Delta x = x_{j-1}$, se obtiene

$$u'(x_j) = \frac{u(x_{j+1}) - u(x_{j-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot u^{(3)}(\epsilon) \cong \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} \cong \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}.$$

De manera análoga se pueden justificar las restantes aproximaciones. Basados en las consideraciones anteriores se define la función de aproximación basada en el MDF,

Definición: *sea la ecuación diferencial $L(u) = r$, escrita en términos del operador diferencial L, el cual se puede descomponer de la forma*

$$L(u)(x) := L_h(u)(x) - \tau(x, h) = r(x),$$

en donde el término $\tau(x, h)$ denota al error de truncamiento, fruto de aplicar el teorema de Taylor. Se define la función de aproximación por el MDF a la función U solución de la ecuación algebraica:

$$L_h(U)(x_j) = r(x_j),$$

para $j = 1, \dots, m-1$, y $h = \Delta x$.

Note que la definición anterior se ha formulado asumiendo sólo derivadas espaciales, y ninguna temporal. Sin embargo, la definición aplica del mismo modo.

3. MODELOS Y ESQUEMAS ANALIZADOS.

En lo que sigue se presentan los cuatro modelos considerados en este trabajo (cf. [4], para la totalidad de los detalles adicionales), junto con el esquema numérico aplicado en cada caso basado en el MDF. Por razones de espacio para dos de los cuatro casos considerados se incluye la respectiva formulación matricial:

3.1. Modelo 1: EDO, lineal, orden 2. La ED considerada está dada por:

$$u'' = pu' + qu + r, x \in \,]a, b[$$
$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta$$

La solución numérica U del Modelo 1 basada en el MDF queda definida por el sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = p_j \cdot \left[\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}\right] + q_j \cdot U_j + r_j$$

con $j = 1, \dots, m-1$, y $p_j = p(x_j), q_j = q(x_j), r_j = r(x_j)$. Como se sabe (cf. [3] o [4], para todos los detalles) esta última ecuación se puede transformar algebraicamente como

$$-\frac{h^2}{2} L_h(U)(x_j) = -b_j U_{j-1} + a_j U_j - c_j U_{j+1} = -\frac{h^2}{2} r_j,$$

para $j = 1, \dots, m-1$, la cual a su vez admite la representación matricial

$$A \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{b},$$

en donde A es una matriz tridiagonal cuyas entradas dependen del parámetro h de malla, y el vector b también depende de h.

3.2. Modelo 2: EDO, no lineal, orden 2. La ED considerada está dada por:

$$u'' = f(x, u, u'), x \in]a, b[$$
$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta$$

La solución numérica U del Modelo 2 basada en el MDF queda definida por el sistema no lineal de ecuaciones algebraicas

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = f\left(x_j, U_j, \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}\right)$$

con $j = 1, \dots, m - 1$.

3.3.1. Modelo 3A: EDP, parabólica, homogénea, lineal, orden 2. La ED considerada está dada por:

$$u_t - u_{xx} = 0, (x, t) \in]0, L[\times]0, T[$$
$$u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$$
$$u(0, t) = g(t), u(L, t) = h(t), t \in [0, T]$$

La solución numérica U del Modelo 3A basada en el MDF queda definida por el sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$\frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{U_{j+1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

con $j = 1, \dots m - 1; n = 1, \dots, F$. Se trata de un esquema explícito en la variable temporal.

3.3.2. Modelo 3B: EDP, parabólica, no homogénea, lineal, orden 2. La ED considerada está dada por:

$$u_t - u_{xx} = s, (x, t) \in]0, L[\times]0, T[$$
$$u(x, 0) = f(x), x \in [0, L]$$
$$u(0, t) = g(t), u(L, t) = h(t), t \in [0, T]$$

La solución numérica U del Modelo 3B basada en el MDF queda definida por el sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$\frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{U_{j+1}^{n} - 2U_j^{n} + U_{j-1}^{n}}{(\Delta x)^2} = s_j^n$$

con $j = 1, \dots m - 1; n = 1, \dots, F$. Se trata de un esquema implícito en la variable temporal. Como se sabe (cf. [3] o [4], para todos los detalles) esta última ecuación se puede transformar algebraicamente como

$$(1 + 2\lambda) \cdot U_j^n = U_j^{n-1} + \lambda \cdot \left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n\right) + \Delta t \cdot s_j^n,$$

para $j = 1, \ldots, m-1; n = 1, \ldots, F$, y $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, la cual a su vez admite la representación matricial

$$A \cdot \boldsymbol{U^n} = \boldsymbol{U^{n-1}} + \lambda \cdot \boldsymbol{b^n} + \Delta t \cdot \boldsymbol{s^n},$$

en donde $A = I + \lambda \cdot D$, siendo D una matriz tridiagonal con entradas numéricas que no dependen de λ, e I una matriz identidad.

3.4. Modelo 4: EDP, parabólica, homogénea, no lineal, orden 2. La ED considerada está dada por:

$$u_t - b(u) \cdot u_{xx} = 0, (x,t) \in]0, L[\times]0, T[$$
$$u(x,0) = f(x), x \in [0, L]$$
$$u(0,t) = g(t), u(L,t) = h(t), t \in [0, T]$$

La solución numérica U del Modelo 4 basada en el MDF queda definida por el sistema no lineal de ecuaciones algebraicas

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - b(U_j^n) \cdot \left[\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] = 0$$

con $j = 1, \ldots m-1; n = 0, \ldots, F-1$. Se trata de un esquema explícito en la variable temporal.

Observación: En [4] se demostró convergencia para todos los esquemas definidos anteriormente.

4. CONVERGENCIA.

4.1. Consistencia. Para presentar este concepto se recurrirá al Modelo 1. Se reemplazan sus derivadas de orden uno y dos por sus respectivas identidades de Taylor con lo cual se obtiene

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - p(x)\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - q(x)u(x) + p(x)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta) = r(x),$$

lo cual se puede escribir de modo equivalente como

$$L(u)(x) := L_h(u)(x) - \tau(x,h) = r(x),$$

en donde,

$$L_h(u)(x) := \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - p(x)\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - q(x)u(x)$$

y

$$\tau(x,h) := -p(x)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta).$$

Al evaluar la anterior identidad en una partición $\{x_j, j = 0, \dots, m\}$ se obtiene el vector

$$\boldsymbol{\tau} = \left[\tau(x_0, h), \dots, \tau\big(x_j, h\big), \dots, \tau(x_m, h)\right].$$

Definición (cf. [2], [3]): *el MDF basado en el operador L_h se dice **consistente** con el operador L ssi $\lim_{h \to 0} \|\boldsymbol{\tau}\| = 0$, independientemente de la partición $\{x_j\}$.*

4.2. Error. Para una partición dada $\{x_j, j = 0, \dots, m\}$, y un esquema numérico de diferencias finitas basado en el operador L_h, se define el error en el nodo $j-$é$simo$ como

$$e_j(h) = U\big(x_j\big) - u\big(x_j\big),$$

con lo cual se define el error global de aproximación como el vector

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}(h) = \left[e_0, e_1, \dots, e_j, \dots, e_m\right].$$

Definición (cf. [2], [3]): *el MDF definido por el operador L_h se dice **convergente** a la solución u del problema continuo ssi $\lim_{h \to 0} \|\boldsymbol{e}\| = 0$, para toda partición $\{x_j\}$.*

4.3. Primer Teorema de Convergencia. Dada una partición $\{x_j, j = 0, \dots, m\}$ se definen los vectores $\boldsymbol{U} = [U(x_0), \dots, U(x_m)]$ y $\widehat{\boldsymbol{U}} = [u(x_0), \dots, u(x_m)]$, los cuales satisfacen los sistemas de ecuaciones lineales $A \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}$, y $A \cdot \widehat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\tau}$ (cf. Modelo 1, sección 3.1 de este artículo). Restando estos dos últimos sistemas se obtiene

$$A \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{\tau}.$$

Asumiendo que la matriz A es invertible,

$$\boldsymbol{e} = -A^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Tomando norma a ambos lados,

$$\|\boldsymbol{e}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\tau}\|$$

Definición (cf. [2], [3]): *el MDF definido por el operador L_h se dice **estable** ssi existe una constante $C > 0$, independiente de h, tal que $\|A^{-1}\| \leq C$.*

Teorema 1 (Fundamental del MDF, cf. [8]): *dado un problema continuo definido por $L(u) = r$, y un esquema numérico consistente basado en el MDF a través de $L_h(U) = r$. Si el método numérico es estable entonces es convergente.*

4.4. Segundo Teorema de Convergencia. Se considera la partición $P = \left\{\big(x_j, t^n\big), j = 0, \dots, m; n = 0, \dots, F\right\}$ del dominio espacio-temporal de la respectiva EDP. Se definen las funciones escritas en forma vector columna:

$$\boldsymbol{U^n} = [U_1^n, U_2^n, \dots, U_m^n]' \ , \ \boldsymbol{u^n} = [u(x_1, t^n), u(x_2, t^n), \dots, u(x_m, t^n)]',$$

$$\boldsymbol{\tau^n} = [\tau(x_1, t^n), \tau(x_2, t^n), \dots, \tau(x_m, t^n)]' \text{ y } \boldsymbol{E^n} = \boldsymbol{U^n} - \boldsymbol{u^n}.$$

Lax-R. en su artículo seminal asumen que existe una función g tal que los tamaños de paso espacial y temporal están relacionados a través de $\Delta x = g(\Delta t)$. Con esta notación se tienen las identidades

$$\boldsymbol{u^{n+1}} = B \cdot \boldsymbol{u^n} + \boldsymbol{d^n} + \Delta t \cdot \boldsymbol{\tau^n} \text{ y } \boldsymbol{U^{n+1}} = B \cdot \boldsymbol{U^n} + \boldsymbol{d^n},$$

para el problema continuo evaluado en los nodos, y el MDF, respectivamente (cf. Modelo 3B, sección 3.3.2 de este artículo). Note que la matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, y los vectores $\boldsymbol{d^n} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, y $\boldsymbol{\tau^n} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, dependen sólo de Δt. A partir de estas dos últimas identidades, restando, se obtiene

$$\boldsymbol{E^{n+1}} = B \cdot \boldsymbol{E^n} - \Delta t \cdot \boldsymbol{\tau^n}.$$

Luego de aplicar a esta última igualdad N pasos consecutivos,

$$\boldsymbol{E^N} = B^N \cdot \boldsymbol{E^0} - \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{N} B^{N-n} \cdot \boldsymbol{\tau^{n-1}}.$$

Tomando norma

$$\| \boldsymbol{E^N} \| \leq \| B^N \| \cdot \| \boldsymbol{E^0} \| + \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{N} \| B^{N-n} \| \cdot \| \boldsymbol{\tau^{n-1}} \|.$$

A partir de esta última desigualdad, dado que $\lim_{\Delta t \to 0} \| \boldsymbol{E^0} \|$, por hipótesis, y $\lim_{\Delta t\to 0} \max_{1\leq n\leq N} \| \boldsymbol{\tau^{n-1}} \| = 0$, por la consistencia del MDF, resulta claro que una condición suficiente para que el MDF sea convergente es que el factor $\|B^n\|$ permanezca acotado con independencia de la partición y tamaño de paso temporal. Justamente este es el contenido y motivación de la definición de estabilidad de Lax-R. en [7],

Definición (cf. [2], [5], [7]): *el esquema numérico basado en el MDF del tipo $\boldsymbol{U^{n+1}} = B \cdot \boldsymbol{U^n} + \boldsymbol{d^n}$ definido para un problema lineal se dice* ***Lax-R. estable*** *ssi para cada $T > 0$, fijo pero arbitrario, existe una constante $C_T > 0$ tal que $\|B^n\| \leq C_T$, para cada cada $\Delta t > 0$ y $n = 1,2,3,\dots$, tales que $n \cdot \Delta t \leq T$.*

Por lo tanto, si además se asume que el esquema numérico es Lax-R. estable, se obtiene la convergencia del MDF. Sin embargo, Lax-R. en su artículo [7] no sólo mostraron la suficiencia de la estabilidad Lax-R., sino que además también es una condición necesaria, esto es, si el esquema es convergente, entonces también es Lax-R. estable. Este es justamente el contenido del teorema Lax-R.,

Teorema 2 (Lax-Richtmyer, cf. [2], [5], [7]): *un esquema numérico $\boldsymbol{U^{n+1}} = B \cdot \boldsymbol{U^n} + \boldsymbol{d^n}$, basado en el MDF aplicado a un problema lineal consistente, es convergente ssi es Lax-R. estable.*

5. CONCLUSIONES

En este artículo se consideró el problema de convergencia del MDF aplicado a una muestra de EDO y EDP, lineales y no lineales. Específicamente, se consideraron cuatro modelos: dos EDO de orden dos, una lineal y otra no lineal, y dos EDP de tipo parabólicas, una lineal y otra no lineal. En los cuatro casos el argumento matemático consistió en la aplicación del Teorema Fundamental de Diferencias Finitas el cual establece que si el esquema numérico basado en el MDF es consistente y estable, entonces es convergente. Como se sabe la consistencia se obtiene directamente de la aplicación del teorema de Taylor, por lo que la mayor parte de la demostración es para verificar que el esquema numérico es estable. Adicionalmente al estudio de convergencia de los cuatro casos ya mencionados en esta AFE, se enuncian el Teorema Fundamental del Método de Diferencias Finitas y el Teorema de Lax-R., y para ambos se bosqueja su demostración. Como se sabe ambos teoremas se aplican a problemas lineales con condiciones en la frontera, y la diferencia fundamental entre ambos consiste en la definición que usan para la estabilidad del esquema numérico. En el caso del primer teorema, se establece que la consistencia y la estabilidad son condiciones suficientes para la convergencia, mientras que en el Teorema de Lax-R. se establece que la estabilidad es una condición no sólo suficiente sino también necesaria para la convergencia. Se debe destacar que en ambos teoremas la definición de estabilidad es distinta, siendo la primera más general, mientras que la segunda es más restrictiva y se denomina estabilidad de Lax-R. Uno de los principales aportes de este trabajo consistió en hacer una presentación de los cuatro casos y de los dos teoremas mencionados, con una notación matemática unificada y comprensiva para el lector no experto en métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. En efecto, tal como se puede constatar con facilidad existe una amplia diversidad notacional para este tema tanto en libros de textos como en artículos científicos. Los autores esperan haber logrado de manera satisfactoria este objetivo pensando fundamentalmente en aplicaciones profesionales que realizan del MDF científicos aplicados de distintas especialidades. Finalmente, como proyecciones futuras de este trabajo se vislumbran la implementación computacional y comparativa de los esquemas numéricos analizados, y un debilitamiento de las hipótesis matemáticas requeridas para los estudios de convergencia.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas y al Magíster en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Católica de Temuco por el apoyo brindado en la ejecución de este proyecto.

REFERENCIAS

[1] S. H. Bader y X. Zhu, "AFiD-MHD: A finite difference method for magneto hydro dynamic flows", *Journal of Computational Physics*, vol. 523, 2025.

[2] R. Bürger, *Análisis Numérico III, Apuntes de Clases*. Concepción, Chile: Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 2020.

[3] M. Bustos, M. Campos y G. Gatica, *Análisis Numérico II*. Concepción, Chile: Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 1995.

[4] C. Fuentes, "Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer y su aplicación al estudio de convergencia del método de diferencias finitas", Tesis de Magíster en Matemáticas Aplicadas, Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas, Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile, 2025. Disponible en: https://mma.uct.cl/proyectos-afe/

[5] H. Holden y R. Piene, Eds., *The Abel Prize: 2003-2007 The First Five Years*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[6] G. Hou, C. Chen, S. Qin, Y. Gao y K. Wang, *Computational Fluid Dynamics: Finite Difference Method and Lattice Boltzmann Method*, *Engineering Applications of Computational Methods*, Vol. 20. Singapore: Springer, 2024.

[7] P. D. Lax y R. D. Richtmyer, "Survey of the stability of linear finite difference equations", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 267–293, 1956.

[8] R. J. LeVeque, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2007.

[9] M. Mao, W. Wang, T. Tian y L. Wang, "Adaptive option pricing based on a posteriori error estimates for fully discrete finite difference methods", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 460, 2025.

[10] Q. Raza, X. Wang, B. Ali, S. Li, N. A. Shah y H. Yang, "Computational study on entropy generation in Casson nanofluid flow with motile gyrotactic microorganisms using finite difference method", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 190, 2025.

[11] J. N. Reddy, *Computational Methods in Engineering: Finite Difference, Finite Volume, Finite Element, and Dual Mesh Control Domain Methods (Applied and Computational Mechanics)*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2024.