



Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Solución analítica de la ecuación de convección-difusión-reacción con el método de análisis homotópico

por

Rossio Romero Inzunza

Profesor guía

Dr. Emilio Cariaga López

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Quinta Versión

Temuco, 20 de marzo de 2023

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor guía:

.....

Dr. Emilio Cariaga L.

Profesor informante:

.....

Dr. Jacobo Hernández M.

Profesor informante:

.....

Dr. Ramón Bécar C.

Ministro de fe:

.....

Dr. Alfredo Calderón C.

Temuco, 20 de marzo de 2023

Perfil de egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas.
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional postgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas dinámicos y evolutivos. Específicamente:

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes de sistemas dinámicos y evolutivos.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Desarrolla y/o utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos y evolutivos.

Comunica información científico-matemática con rigurosidad técnica y claridad.

Agradecimientos

Profesor Emilio Cariaga L. gracias por su apoyo constante durante todo este proceso, sin la entrega de su excelencia como docente, paciencia, constancia y firmeza este trabajo no lo hubiera logrado de manera tan exitosa. Su guía y orientación fueron siempre útiles cuando no salían de mis pensamientos las ideas para escribir este proyecto. Usted con sus aportes profesionales que lo caracterizan formó parte importante de esta historia. Muchas gracias por todas sus palabras de aliento, me dieron la fuerza y el rigor necesario para lograr culminar este proceso, gracias por estar presente cuando más lo necesité, por toda la comprensión en cada etapa, sin duda lo llevaré siempre presente en mi quehacer profesional.

Amiga y compañera durante este camino Paulina, gracias por mostrarme en su momento esta oportunidad de crecimiento, por el constante apoyo en cada paso, sin tu consejo y aliento no me hubiera aventurado a realizar este Magíster. Gracias por estar ahí cuando el espíritu decae, por la escucha constante y el cariño entregado.

A mi hermana Bárbarita, gracias por entender, por estar pendiente si necesitaba alguna ayuda con mis labores de mamá. Acciones valiosas para mi que me ayudaron a poder dedicar tiempo de calidad a la escritura de este proyecto.

A mi amigo, compañero y amor Felipe, gracias por la entrega diaria y el apoyo incondicional durante este tiempo, por todas las veces que me escuchaste y que corriste si yo necesitaba algo. Por mostrarme que el amor es un buen complemento en estos procesos.

Agradezco a mi familia, a mi madre Erna y hermanos, por entender la ausencia de tiempo en algunas ocasiones, gracias mamá por esas oraciones para que mi espíritu se mantenga firme. En estos momentos finales fue cuando más lo necesité.

Para terminar agradezco a Dios cada uno de mis pasos, gracias por permitirme vivir este proceso en compañía de las personas correctas, sé que tú siempre vas mostrándome tu amor con cada persona que llega a mi vida, gracias por mi hija Catalina, mi eterna inspiración, gracias por mi profesor guía que permitiste me apoyara, gracias por mis amigos, amor y familia. Creo firmemente en que eres un Dios amoroso, que camina conmigo a mi lado.

Soy una mujer, agradecida de Dios y la vida, que camina siempre hacia las oportunidades de un mejor futuro para mi hija Catalina, con respeto, amor, paciencia y fé todo es más esperanzador y afable.

Abstract

This work focuses on solving the convection-diffusion-reaction (CDR) transport equation using the homotopic analysis method (HAM). Two cases are considered in the development of this work. Model 1 refers to the CDR equation with constant diffusion, while model 2 analyzes the CDR equation with variable diffusion.

The objective of this study is to evaluate the applicability of the HAM method to the classical CDR equation, identifying strengths and weaknesses of this type of analytical solutions.

As part of this study, the computational implementation of the HAM method is performed, evaluating the sensitivity with respect to the parameters that compose the CDR equation, emphasizing the convergence parameter and the diffusion coefficient.

In order to validate this method, a comparison of the solution of the HAM method with respect to the solution when working the equation with the Laplace transform is performed.

It is concluded that the HAM method has operational advantages over other classical methods.

Resumen

Este trabajo se centra en la resolución de la ecuación de transporte convección-difusión-reacción (CDR) utilizando el método de análisis homotópico (HAM). Se consideran dos casos en el desarrollo de este trabajo. El modelo 1 hace referencia a la ecuación CDR con difusión constante, mientras que el modelo 2 analiza la ecuación CDR con difusión variable.

El objetivo de este estudio es evaluar la aplicabilidad del método HAM a la clásica ecuación CDR, identificando fortalezas y debilidades de este tipo de soluciones analíticas.

Como parte de este estudio se realiza la implementación computacional del método HAM, evaluando la sensibilidad respecto a los parámetros que componen la ecuación de CDR, realizando un énfasis en el parámetro de convergencia y el coeficiente de difusión.

Para validar este método es que se realiza en una comparación de la solución del método HAM respecto a la solución al trabajar la ecuación con la transformada de Laplace.

Se concluye que el método HAM posee ventajas operativas respecto de otros métodos clásicos.

Índice

1. Introducción	1
2. Objetivos	2
3. Materiales y métodos	3
3.1. Modelo conceptual	3
3.1.1. Contaminación atmosférica	3
3.1.2. Fuentes de emisión	4
3.1.3. Difusión	4
3.1.4. Ley de Fick	5
3.1.5. La advección	6
3.1.6. Ecuación de transporte CDR	6
3.2. Métodos Analíticos	10
3.2.1. Método de Análisis Homotópico (HAM)	10
3.2.2. Transformada de Laplace (TL)	13
4. Resultados	17
4.1. Ecuación CDR con difusión D constante	17
4.1.1. Resolución analítica vía método HAM en Maxima	17
4.1.2. Curva h	21
4.1.3. Análisis de sensibilidad curva h	22
4.1.4. Validación del método HAM con método TL	24
4.1.5. Análisis de sensibilidad para los parámetros a y b	29
4.1.6. Análisis de sensibilidad para los parámetros D , V y k	31
4.2. Ecuación CDR con difusión D variable	33
4.2.1. Resolución analítica vía método HAM en Maxima	33
4.2.2. Curva h	35
4.2.3. Experimento 1	35
4.2.4. Experimento 2	35
4.2.5. Experimento 3	36
4.2.6. Experimento 4	38
5. Conclusiones	40

6. Anexos	44
6.1. Anexos M1	44
6.1.1. Código método HAM c0 a c8	44
6.1.2. Código para la curva h	46
6.1.3. Código TL	48
6.1.4. Análisis sensibilidad	52
6.2. Anexo M2	58
6.2.1. Código método HAM c0 a c5	58
6.2.2. Código para la curva h	60
6.2.3. Análisis sensibilidad	62

1. Introducción

En Chile se reportan tres principales fuentes de contaminación del aire: transporte, actividades industriales y calefacción de las viviendas, los cuales emiten distintos gases contaminantes siendo los principales el ozono (O_3), el dióxido de azufre (SO_2), óxidos de nitrógeno, monóxido de carbono (CO) y el material particulado (MP) [8]. Nuestra región de La Araucanía es una de las ciudades más contaminadas, principalmente por el uso de la calefacción a leña [2].

Los factores claves que lideran el transporte de contaminantes en el aire son la convección, difusión y reacción, los cuales para muchas situaciones físicas y prácticas pueden modelarse a través de una ecuación de transporte [16].

Existen muchas soluciones analíticas disponibles en la literatura para resolver la ecuación de transporte de contaminantes. Las más comunes para obtener estas soluciones son los métodos de transformada de Laplace o Fourier [10].

Este proyecto se centra en el método de análisis de homotopía HAM (por sus siglas en inglés), el cual es un método analítico para problemas altamente no lineales, desarrollado por Liao (Liao, 1992, Liao, 2004). Este método ha sido aplicado para resolver una variedad de problemas no lineales como por ejemplo asociados con el flujo viscoso de Blasius o la hidromecánica, etc. [9].

A diferencia de las técnicas de perturbación el HAM es independiente de cualquier parámetro físico pequeño/grande: siempre se puede transferir un problema no lineal a un número infinito de subproblemas lineales mediante el método. En segundo lugar, a diferencia de todas las demás técnicas analíticas, el HAM nos proporciona una forma conveniente de garantizar la convergencia de modo que es válida incluso si la no linealidad es bastante fuerte. Además, basada en la homotopía en topología, nos proporciona una libertad extremadamente grande para elegir tipo de ecuación de los subproblemas lineales, la función base de la solución, la conjetura inicial, etc., de modo que se puedan resolver complicados problemas no lineales en las ciencias, finanzas e ingeniería [9].

El presente informe tiene como objetivo presentar la aplicación del método HAM a la ecuación de convección-difusión-reacción, que en adelante nombraremos como CDR.

En el capítulo 3 se presenta una revisión del método de análisis homotópico, además de la explicación de la transformada de Laplace, pues será utilizado para realizar la validación de las soluciones obtenidas.

En el capítulo 4 se expone la etapa de experimentación que se realizó de manera computacional con el software Maxima [18], en donde se efectúa la resolución de la ecuación de transporte. Por otra parte, de manera adicional, un análisis de sensibilidad de los parámetros que están presentes en la ecuación CDR.

2. Objetivos

Objetivo general

Resolver analíticamente la ecuación de convección-difusión-reacción con el método HAM

Objetivos específicos

1. Implementar computacionalmente el método HAM para la ecuación de convección-difusión-reacción.
2. Evaluar la sensibilidad de la solución analítica cuando se modifica el coeficiente de difusión.
3. Validar el método HAM con el método de la Transformada de Laplace.

3. Materiales y métodos

3.1. Modelo conceptual

3.1.1. Contaminación atmosférica

La contaminación atmosférica es un fenómeno que data desde hace siglos, el cual se vió potenciado con la revolución industrial y el avance tecnológico. Existe controversia respecto a la definición de Contaminación Atmosférica, la OMS la define como *"la aparición en el aire de una o varias sustancias extrañas en cantidades y durante periodos de tiempo prolongados como para producir efectos nocivos sobre el hombre, los animales, las plantas, o las tierras así como perturbar el bienestar o el uso de los bienes"* [5].

Según la literatura consultada existen cerca de 3.000 sustancias que pueden considerarse como contaminantes atmosféricos, los cuales se pueden clasificar según su origen, la forma en la que se emiten a la atmósfera, su composición química, composición física y reactividad química [15].

Si consideramos la contaminación ambiental se debe tener en cuenta las condiciones del clima, la localización de los focos, situación de los receptores, topografía, etc. Existe gran variedad de modelos con distintos grados de sofisticación con aplicación a una fuente puntual como lo puede ser una chimenea, fuente lineal como una carretera o fuentes de área que considera un gran número de fuentes puntuales [5].

Las distintas partes del sistema donde se produce la contaminación son los siguientes:

1. Fuentes de emisión: Las cuales pueden ser de origen natural como la erupción de un volcán, de origen natural acelerados por la acción humana como un incendio y de origen antropogénico como las actividades industriales.
2. Transporte: En el caso de la contaminación del aire consideramos el viento.
3. Transformaciones durante el transporte: Procesos fisicoquímicos como:
 - a) Difusión: Proceso donde los contaminantes son dispersados a la atmósfera.
 - b) Deposición: Proceso cuando los agentes contaminantes se depositan en la superficie de la tierra.
 - c) Reacciones químicas: Cambio producido por las condiciones meteorológicas.

Dando un poco más de contexto a la situación país, en Chile se da inicio a la creación del Ministerio de Medio Ambiente (ex CONAMA) hace 32 años donde surgieron las primeras bases para la institucionalidad ambiental. Actualmente Chile para el fenómeno de contaminación en el aire tiene vigentes cuatro normativas en cuanto a la calidad del aire las cuales son:

- Revisión de las normas primarias de calidad de aire para monóxido de carbono (CO), ozono (O_3) y dióxido de nitrógeno (NO_2)
- Revisión Norma de Calidad Primaria para SO_2
- Norma Primaria de Calidad Ambiental para MP 2.5
- Establece Norma de Calidad Primaria para Plomo en el aire

Además de contar con normas para la emisión de contaminantes y planes de descontaminación en las regiones del país más afectadas por este problema medioambiental [14].

3.1.2. Fuentes de emisión

En la teoría de transporte de contaminantes, es conocido que en la atmósfera existen dos grandes grupos de contaminantes, tales son: contaminantes primarios y secundarios [5].

Los contaminantes primarios son emitidos por las fuentes de emisión. En tanto que los contaminantes secundarios son producidos por las reacciones químicas y/o por la interacción entre dos o más contaminantes primarios. Ahora, se sabe que muchas de las reacciones químicas en la atmósfera restringidas a una ciudad, son reversibles.

Es así, que en los modelos frecuentemente se considera que solamente existen contaminantes primarios [8].

A fin de formular el modelo, se asume que las fuentes de emisión, emiten una cantidad finita de contaminantes, cada uno de los cuales se denomina especie o componente, términos que se originan en química o en la teoría de sistemas en matemática.

Los procesos de contaminación atmosférica comienzan con la emisión de los gases a la atmósfera. Según la fuente emisora, en caso de ser primarios podemos tener fuentes móviles (como el transporte por carretera, aviación o navegación) o fuentes fijas (industrias, centrales termicas). Las primeras son llamadas contaminación difusa debido a que no se le puede atribuir un foco en concreto. Las segundas si se pueden cuantificar pues se maneja con mayor precisión su localización [8].

Una vez que los contaminantes se encuentran en la atmósfera, éstos pueden ser transportados por movimientos horizontales o verticales, dispersados o transformados en otras especies químicas.

3.1.3. Difusión

La difusión molecular se produce cuando debido a la existencia de un gradiente de concentración el soluto migra desde las regiones de mayor concentración hacia las regiones de más baja concentración. La difusión molecular es sólo significativa cuando las velocidades son muy bajas, y por tanto puede

ser despreciable en aquellos casos con velocidades normales o altas (Davis et al 1993) [4]. La difusión molecular viene descrita por la primera Ley de Fick en estado estacionario.

En general, este término está relacionado con los procesos turbulentos que producen movimientos verticales en la atmósfera y por tanto originan una mezcla vertical de contaminantes. Estos procesos tendrán mayor o menor importancia en función de ciertos factores meteorológicos, como son la estabilidad atmosférica (si la atmósfera es estable los movimientos verticales estarán más impedidos) o la altura de capa de mezcla, que indica el espesor de la atmósfera en el cual se producen los procesos de mezcla (si la altura de capa de mezcla es alta, los procesos de mezcla vertical se extenderán a una mayor altura, es decir, los contaminantes se dispersarán más verticalmente y por tanto en zonas próximas a la superficie su concentración será menor) [12]. Las fuentes de emisión están sometidas a fenómenos de difusión que dependen de las características propias de cada emisor. En general las fuentes plantean problemas de difusión más en consonancia con la superficie urbanizada, y las fuentes móviles provocan tanto la emisión de contaminantes como su difusión parcial, al desplazarse y mover las masas de aire inmediatas [3].

Los rangos típicos de valores para la difusividad varían ampliamente dependiendo del estado físico en el que se encuentre, gas, sólido o líquido.

3.1.4. Ley de Fick

La Primera Ley de Fick de la difusión, establece que en una solución de dos o más componentes, el flujo molar (magnitud que expresa la variación de los moles en el tiempo a través de un área específica) de cualquiera de las componentes es directamente proporcional al gradiente de concentración de esa especie en ese lugar [7]. Aunque una concentración más elevada para una especie significa más moléculas de ella por unidad de volumen, la concentración de una especie puede expresarse como:

$$\text{Flujo de masa} = \text{Constante de proporcionalidad} \times \text{Gradiente de concentración}$$

Es importante señalar que la concentración de una especie en una mezcla puede definirse de varias maneras: como la densidad, la fracción de masa, la concentración molar y la fracción molar [1]. La ley de Fick nos dice que el flujo difusivo que atraviesa una superficie (J en $\text{mol cm}^2\text{s}^{-1}$) es directamente proporcional al gradiente de concentración $\frac{\partial C}{\partial x}$. El coeficiente de proporcionalidad se llama coeficiente de difusión (D , en cm^2s^{-1}). Por lo que esta ley se escribe:

$$J = -D \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1)$$

Debido a la naturaleza compleja de la difusión de masa, los coeficientes de difusión suelen determinarse en forma experimental. En general los coeficientes de difusión son los más altos en los gases y los

más bajos en los sólidos. Además es importante tener en consideración que los coeficientes de difusión aumentan con la temperatura.

3.1.5. La advección

A parte de la difusión existen otros mecanismos que proporcionan interacción entre los distintos elementos de un medio activo. Cuando el medio es fluido, una de ellas es la presencia de un campo de velocidades convectivo que como consecuencia produce advección. Para ser más precisos, cuando hablamos de advección estamos refiriéndonos a la situación en la que una partícula se mueve con el fluido, a veces también se habla de advección pasiva para enfatizar que dicha partícula es tan sumamente ligera e inerte que lo único que es capaz de hacer es precisamente seguir al fluido [3]. Así, ajustará su velocidad de forma instantánea a la del fluido que la circunda, por lo que formalmente podremos escribir:

$$V_{Partícula}=V_{Fluido} \quad (2)$$

La advección combina en un solo término, el viento a gran escala que mueve el aire más cálido o frío/seco o húmedo de zonas aledañas al sitio de estudio y viceversa, y los gradientes horizontales de temperatura potencial (Miranda - García, 2019) [11]. Este término, como ya se ha indicado, está relacionado con la llegada de contaminante al volumen de estudio procedente del exterior y que entra transportado por el viento. Del mismo modo se produce una pérdida de material, que sale del volumen de estudio arrastrado también por el viento. Una mayor intensidad de viento desplazará los contaminantes con mayor velocidad y favorecerá el transporte. Para resolver este término de la ecuación es necesario conocer el campo de velocidades del flujo atmosférico (viento) [12].

Para el caso de una dimensión el transporte advectivo se puede representar como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Donde $f(x, t)$ es la concentración de la sustancia transportada y V es la velocidad del viento. Esta ecuación en derivadas parciales es lineal, de primer orden con un coeficiente, V correspondiente a la velocidad del viento. Con una velocidad del viento constante la solución de la ecuación es la traslación de la función f con una velocidad V sin cambio de forma.

3.1.6. Ecuación de transporte CDR

Considerando el volumen de control en la figura 1, tenemos el caso en tres dimensiones $\Delta x \Delta y \Delta z$ donde J_I es el flujo del soluto, ρ es la densidad, C la concentración del soluto y θ el contenido

volumétrico de la solución. Esto debido a que en el interior del volumen de control ocurren reacciones químicas.

Para simplicidad el flujo de gas es sólo en la dirección z . La masa de soluto que entra desde abajo (en z) en el intervalo de tiempo t a $t + \Delta t$ es

$$[Masa\ entrante] = J_I \Delta x \Delta y \Delta t$$

El flujo entrante al volumen de control considerando las tres dimensiones.

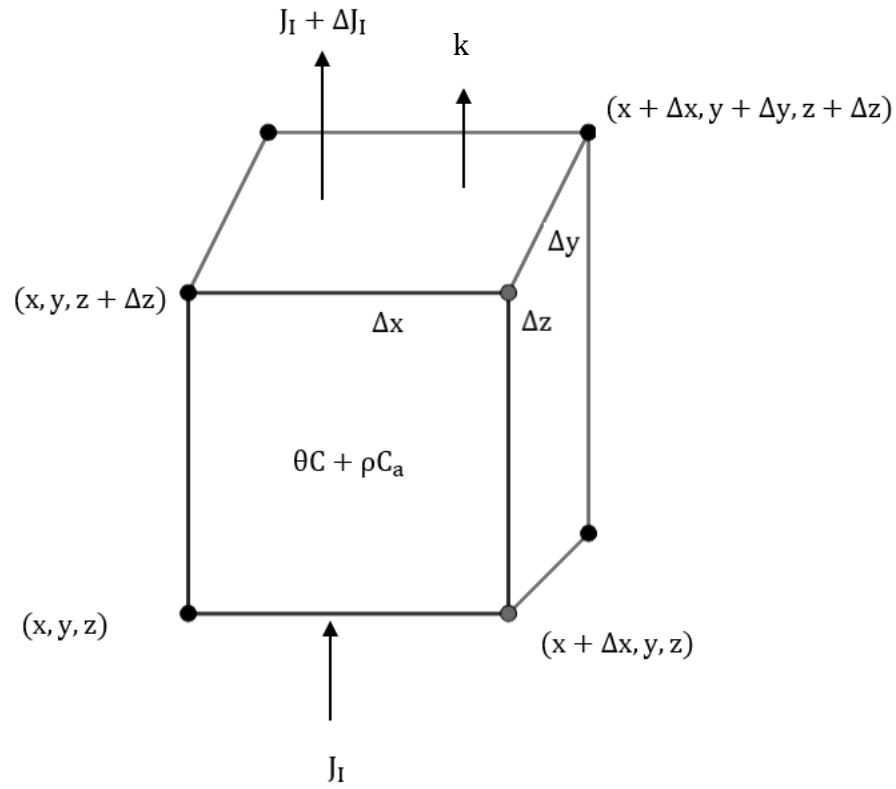


Figura 1: Volumen elemental para la consideración de conservación de solutos

El flujo saliente en $z = z + \Delta z$ es

$$[\text{Flujo de salida}] = \left(J_I + \frac{\partial J_I}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \Delta t$$

El flujo acumulado en la fase de solución es

$$[\text{Cambio en el flujo acumulado en la solución}] = \left(\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} \right) \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$$

Finalmente, podría haber una pérdida de soluto por reacción o cambio a otras fases dada por:

$$[\text{Pérdida por reacción}] = k \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$$

Con k un término de reacción [$kgm^{-3}s^{-1}$].

La entrada neta debe ser igual a los otros tres componentes. Se define C_a como la concentración de soluto adsorbido (masa del absorbente/masa del suelo)

$$-\frac{\partial J_I}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\theta C + \rho C_a) + k \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Se define D como el coeficiente de difusión. Luego el reordenamiento y sustitución de la forma J_I da como resultado

$$-\frac{\partial(\theta C)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} - J_I C \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_a) - k$$

Si además, D es una constante distinta de cero y V el término convectivo, el resultado es la ecuación que se denomina de convección-difusión.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - V \frac{\partial C}{\partial z}$$

Sin embargo la ecuación unidimensional CDR de convección-difusión-reacción dependiente del tiempo de interés en este estudio es de la siguiente forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - V \frac{\partial C}{\partial z} - kC$$

Donde C es la concentración, k es el parámetro de reacción y $D > 0$ es el coeficiente de difusión.

En este informe se presentan dos modelos particulares de la ecuación CDR:

- **MODELO 1:** Ecuación CDR con término difusivo D constante.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad (4)$$

Se considera la condición inicial y de contorno

$$c(x, 0) = axe^{-bx}$$

$$c(0, t) = ae^{-bt}$$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial x} = 0, x \rightarrow \infty$$

- **MODELO 2:** Ecuación CDR con término difusivo $D(t)$ variable en el tiempo.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad (5)$$

donde

$$D(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})D_0 + D_m$$

con la condición inicial y de contorno

$$c(x, 0) = ae^{-bx}$$

$$c(0, t) = \frac{c_0}{2}(1 + e^{-kt})$$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial x} = 0, x \rightarrow \infty$$

La resolución de estos dos modelos será desarrollado en el capítulo 4 correspondiente a la sección de resultados.

3.2. Métodos Analíticos

3.2.1. Método de Análisis Homotópico (HAM)

Existen muchos métodos de resolución analíticos para resolver ecuaciones diferenciales, los cuales son usados ampliamente en el campo de la ingeniería. Sin embargo el método de análisis homotópico HAM ha sido diseñado para resolver ecuaciones diferenciales no lineales [9]. Es en este contexto en donde presenta algunas ventajas comparativas, entre las cuales están las siguientes:

- Ausencia de dependencia de parámetros muy pequeños o muy grandes
- Flexibilidad en la selección de parámetros
- Garantía de convergencia

Para introducirnos en el método es importante conocer algunas definiciones de manera general.

Topología Una topología sobre un conjunto χ es una colección τ de subconjuntos de χ con las siguientes propiedades [13]:

1. ϕ y χ están en τ
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ

Homotopía La homotopía es un concepto matemático asociado a la topología que estudia las propiedades que no cambian o como plantea Munkres [13], conjuntos topológicos que son sometidos a transformaciones. Particularmente es un invariante topológico que tiene su uso más práctico en la revisión de propiedades que se mantienen constantes entre si. Un conjunto χ para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico. De esta forma es mas claro establecer los siguiente:

Definición:

Si $I = [0, 1]$ y además X e Y son espacios topológicos.

Dadas dos funciones $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ continuas

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

Es una homotopía de f_0 a f_1 ssi $\forall x \in X$

$$H(x, 0) = f_0(x) \text{ y } H(x, 1) = f_1(x)$$

Entonces se dice que f_0 es homotópica a f_1 a través de H .

Es a partir de esta expresión que se considera el trabajo del profesor Liao [9] en el método HAM.

Para el planteamiento inicial del método HAM consideramos la siguiente ecuación diferencial, donde la función $c(x, t)$ es su solución

$$N[c(x, t)] = 0$$

donde N es un operador no lineal, y x, t son llamadas variables independientes. Mediante la generalización del método tradicional de homotopía, Liao construye la ecuación de deformación de orden-cero [9]:

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - c_0(x, t)] = qhH(x, t)N[\phi(x, t; q)] \quad (6)$$

donde $q \in [0, 1]$ se denomina parámetro de incrustación, H en una función auxiliar no nula, L es un operador lineal auxiliar, $c_0(x, t)$ es una estimación inicial de $c(x, t)$ y $\phi(x, t; q)$ es una función desconocida, h es el parámetro de control de la convergencia, nos provee de una herramienta extra que ayuda a cada orden de aproximación a converger adecuadamente. Es importante señalar que, se tiene una gran libertad para elegir objetos auxiliares como H y L en HAM. Obviamente, cuando $q = 0$ y $q = 1$, se obtiene

$$\phi(x, t; 0) = c_0$$

$$\phi(x, t; 1) = c(x, t)$$

Por lo tanto a medida que q aumenta de 0 a 1, la solución $\phi(x, t; q)$ varía la aproximación inicial $c_0(x, t)$ a la solución $c(x, t)$. Expandiendo $\phi(x, t; q)$ en serie de Maclaurin respecto a q se tiene

$$\phi(x, t; q) = c_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m(x, t)q^m \quad (7)$$

en donde (cf. teorema 4.1 Liao [9]):

$$c_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

Si el operador lineal auxiliar, la aproximación inicial, el parámetro auxiliar h y la función auxiliar se eligen adecuadamente, entonces la serie converge a $q = 1$ y es posible elegir h [9] de tal modo que la serie en la ecuación (4) sea convergente en un intervalo que contenga a $q = 1$ en cuyo caso:

$$\phi(x, t; 1) = c_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} c_m(x, t)$$

que debe ser una de las soluciones de la ecuación no lineal original, como demostró Liao [9].

Definir el vector

$$\vec{c}_n = \{c_0(x, t), c_1(x, t), \dots, c_n(x, t)\}$$

Diferenciando la ecuación de orden cero respecto al parámetro de incrustación q y luego fijando $q = 0$ y finalmente dividiendo por $m!$ tenemos la llamada ecuación de deformación de orden m

$$L[c_m(x, t) - \chi_m c_{m-1}(x, t)] = hH(t)R_m(\vec{c}_{m-1}) \quad (8)$$

donde

$$R_m(\vec{c}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (9)$$

y

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

Hay que destacar que $c_m(x, t) (m \leq 1)$ se rige por una ecuación lineal con las condiciones de contorno lineales que provienen del problema original, que puede resolverse fácilmente con programas de cálculo simbólico como Maple, Maxima y Mathematica. Finalmente la solución analítica por el método HAM está dada por la siguiente serie:

$$c(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x, t),$$

cuya convergencia es posible controlar con el parámetro h , el cual se obtiene empíricamente desde la *curva h*, la cual se define como $c_{tt}(0, 1)$ vs. h . Específicamente, el intervalo de convergencia será aquella región en donde la *curva h* es constante [9].

Aplicación a la ecuación de transporte CDR. Para resolver las ecuaciones (1) y (2), es decir la solución parcial por HAM, elegimos la aproximación inicial. Detalles más específicos se dan en la sección de resultados.

$$c_0(x, t) = g(x) \quad (10)$$

y el operador lineal auxiliar

$$L[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} \quad (11)$$

con la propiedad

$$L[j] = 0$$

Donde j es una constante integral. Además, la ecuación (1) sugiere que definamos el operador no lineal como

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} + V \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial x} + k\phi \quad (12)$$

utilizando la definición anterior, construimos la ecuación de deformación de orden cero

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - c_0(x, t)] = qhN[\phi(x, t; q)] \quad (13)$$

y la ecuación de deformación de m-ésimo orden con la función $c_m(x, t)$

$$L[c_m(x, t) - \chi_m c_{m-1}(x, t)] = hR_m(\vec{c}_{m-1}) \quad (14)$$

con la condición inicial

$$c_m(x, 0) = 0 \quad (15)$$

donde

$$R_m(\vec{c}_{m-1}) = \frac{\partial c_{m-1}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c_{m-1}}{\partial x^2} + V \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x} + kc_{m-1} \quad (16)$$

ahora, la solución de la ecuación de deformación de orden m (14) para $m \geq 1$ se convierte en

$$c_m(x, t) = \chi_m c_{m-1}(x, t) + h \int_0^t R_m(\vec{c}_{m-1}) d\tau + j, \quad (17)$$

donde la constante de integración j está determinada por la condición inicial en la ecuación (13).

3.2.2. Transformada de Laplace (TL)

La transformada de Laplace se utiliza, entre otros, para resolver analíticamente ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y parciales. En adelante se refiere a esto como método TL.

En este trabajo se utiliza el método TL para validar la solución analítica calculada por el método HAM. Para esto se recurre a la versión propuesta por Simpson, Ellery (2014) [16].

Primero esbozamos cómo este método permite recuperar una función simple a partir de su transformada de Laplace sin necesidad de utilizar tablas matemáticas ni de calcular numéricamente la transformada inversa (por ejemplo, De Hoog et al., 1982). Comenzamos considerando una función $f(t)$ y la transformada de Laplace de dicha función, que se define como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

donde s es el parámetro de la transformada de Laplace elegido de forma que la integral impropia converja [16]. Para elecciones adecuadas de $f(t)$, tales que $\lim_{t \rightarrow \infty} [\frac{d^n f(t)}{dt^n} e^{-st}] = 0$ para todo n , la aplicación repetida de la integración por partes a la ecuación (1) nos da

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} \left[f(0) + \frac{1}{s} \frac{df(0)}{dt} + \frac{1}{s^2} \frac{d^2 f(0)}{dt^2} + \frac{1}{s^3} \frac{d^3 f(0)}{dt^3} + \dots \right]. \quad (2)$$

La ecuación (2) conduce al teorema del valor inicial (Ellery et al., 2013)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s \mathcal{L}\{f(t)\}] = f(0), \quad (3)$$

lo que nos permite calcular el valor inicial de la función, $f(0)$, directamente a partir de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ sin necesidad de invertir explícitamente la transformada de Laplace. Podemos extender el teorema del valor inicial haciendo un cambio de variables, sea $g(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$, de modo que tengamos $\lim_{s \rightarrow \infty} [s \mathcal{L}\{g(t)\}] = g(0)$. Al volver a plantear este resultado en términos de las variables originales obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[s \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} \right] = \frac{d^n f(0)}{dt^n}, \quad (4)$$

lo que significa que si conocemos la transformada de Laplace de la n -ésima derivada de una función, podemos evaluar la n -ésima derivada de esa función en $t = 0$ sin invertir explícitamente la transformada. Como sabemos que la transformada de Laplace de la n -ésima derivada de una función [15] viene dada por

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^n \frac{d^{k-1} f(0)}{dt^{k-1}} s^{n-k} \quad (5)$$

podemos re-expresar la ecuación(4) como

$$\frac{d^n f(0)}{dt^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s^{n+1} \mathcal{L}\{f(t)\} - s \sum_{k=1}^n \frac{d^{k-1} f(0)}{dt^{k-1}} s^{n-k} \right] \quad (6)$$

lo que significa que dado $\mathcal{L}\{f(t)\}$, podemos calcular todas las derivadas de $f(t)$ en $t = 0$. Con esta información podemos entonces construir una serie de MacLaurin

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i f(0)}{dt^i} \frac{t^i}{i!}. \quad (7)$$

Por lo tanto, para una función particular $f(t)$, para la cual podemos calcular la transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f(t)\}$, podemos reconstruir la función usando las ecuaciones (6) y (7). La reconstrucción de $f(t)$ no depende del cálculo de la transformada inversa. Para la aplicación práctica de la representación en serie de Maclaurin de $f(t)$, debemos truncar la ecuación (7) después de n -términos.

Aplicación del método TL a la ecuación CDR. Ahora discutiremos cómo aplicar la ecuación (6) a un modelo lineal E.D.P. que describe el transporte reactivo de una sola especie, dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad c(x, 0) = h(x), \\ c(0, t) &= h(0), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} c(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $c(x, t)$ es la concentración del soluto, x es la coordenada espacial, t es el tiempo, D es la difusividad, V es la velocidad advectiva, k es el coeficiente de decaimiento y $h(x)$ es la distribución inicial del soluto.

Para proceder, podemos calcular la transformada de Laplace de la ecuación (8) para llegar a

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 F}{dx^2} - V \frac{dF}{dx} - (k + s)F &= -h(x), \quad 0 < x < \infty, \quad F(0; s) \\ &= \frac{h(0)}{s}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x; s) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

donde $F(x; s) = \mathcal{L}\{c(x, t)\}$. La solución de esta ecuación diferencial ordinaria dependerá de la forma de la condición inicial, $h(x)$. Por lo tanto, para avanzar en esta etapa consideraremos $h(x) = axe^{-bx}$, con $a > 0$ y $b > 0$, que es una función no monótona de la posición con un punto de inflexión en $x = 1/b$. Este tipo de condición inicial podría utilizarse para representar la presencia preexistente de $c(x, t)$ dentro del dominio. Con esta elección de condición inicial, la ecuación (9) puede resolverse sumando las soluciones homogéneas y soluciones particulares (Kreyszig, 2006; Zill y Cullen, 1992) para dar

$$F(x; s) = \frac{a(V + 2Db)}{(\phi - s)^2} (e^{mx} - e^{-bx}) - \frac{axe^{-bx}}{(\phi - s)}, \quad (10)$$

donde $m = [V - \sqrt{V^2 + 4D(s + k)}]/2D$, $k + s > 0$ y $\phi = Db^2 + Vb - k$. En esta etapa, un enfoque tradicional para resolver este problema sería calcular la transformada inversa de Laplace de la ecuación (10) para encontrar una expresión exacta para $c(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(x; s)\}$. Para este problema, sin embargo, la transformada inversa de la ecuación (10) no puede obtenerse utilizando tablas matemáticas. Además, el paquete de software simbólico Maple tampoco podría calcular una expresión exacta para la transformada inversa de Laplace. Por lo tanto, es necesario un enfoque diferente.

Para avanzar, podemos combinar nuestra expresión para $F(x; s)$ con las ecuaciones (6) y (7) para calcular una expresión en serie de potencias para la solución $c(x, t)$. Los primeros términos $\mathcal{O}(t^5)$ de

esta serie de potencias vienen dados por

$$\begin{aligned}
c(x, t) = & a x e^{-bx} + a(Db^2x + Vbx - kx - 2Db - V)e^{-bx}t \\
& + a\phi(Db^2x + Vbx - kx - 4Db - 2V)e^{-bx}\frac{t^2}{2!} \\
& + a\phi^2(Db^2x + Vbx - kx - 6Db - 3V)e^{-bx}\frac{t^3}{3!} \\
& + a\phi^3(Db^2x + Vbx - kx - 8Db - 4V)e^{-bx}\frac{t^4}{4!} \\
& + a\phi^4(Db^2x + Vbx - kx - 10Db - 5V)e^{-bx}\frac{t^5}{5!} + \mathcal{O}^6
\end{aligned} \tag{11}$$

Comparamos el rendimiento de la solución de la serie de potencias truncada para este problema comparándola con una solución numérica de la ecuación (8).

La solución en serie de potencias, dada por ecuación (11), es muy sencilla de implementar ya que tenemos una fórmula algebraica explícita para $c(x, t)$ que podemos reevaluar fácilmente para diferentes opciones de D , V , k , a o b para explorar la sensibilidad de la solución a estos valores de los parámetros.

En la sección Resultados se aplicará este método TL con todos los detalles relacionados.

4. Resultados

En esta sección se resuelven analíticamente con el método HAM los modelos de referencia (1) y (2). El modelo 1 considera un coeficiente de difusión constante, mientras que el Modelo 2 utiliza un coeficiente de difusión variable dependiente del tiempo. Para el modelo 1 se realiza un completo análisis incluyendo su validación con el método clásico TL. Por otro lado, el Modelo 2 también se resuelve con el método HAM y se pone el acento en la variabilidad de la solución cuando se modifica el parámetro de convergencia h .

Toda la experimentación computacional de esta sección se realizó con el software CAS Maxima. Los códigos utilizados (elaboración propia) se encuentran en la sección de Anexos. Los parámetros numéricos utilizados fueron tomados de la publicación [17].

El objetivo de esta experimentación computacional es evaluar la aplicabilidad del método analítico HAM a la clásica ecuación CDR en el contexto del modelado del fenómeno de contaminación atmosférica.

4.1. Ecuación CDR con difusión D constante

4.1.1. Resolución analítica vía método HAM en Maxima

En esta sección se considera el Modelo 1 el cual se caracteriza por poseer un coeficiente de difusión D constante, y cuya ecuación de transporte está dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad 0 < x < \infty, t > 0 \quad (1)$$

donde $c(x, t)[mg \cdot cm^{-3}]$ es la concentración de contaminantes a una distancia $x[cm]$ de la fuente en el tiempo $t[h]$, $D[cm^2 \cdot h^{-1}]$ es el coeficiente de dispersión, $V[cm \cdot h^{-1}]$ es la velocidad de Darcy y $k[h^{-1}]$ es la constante del término reactivo.

Se considera la condición inicial

$$c(x, 0) = axe^{-bx} \quad (2)$$

en la que, a es la concentración inicial del contaminante, y b es el coeficiente de concentración. Es con esta condición inicial que se lleva a cabo el método HAM, formando una relación de recursividad como se explicó en el capítulo 3 de esta AFE. Es así que obtenemos lo siguiente ($m = 1, 2, 3, \dots$):

$$c_m(x, t) = \chi_m c_{m-1} + h \int_0^t \left(\frac{\partial c_{m-1}}{\partial \tau} - D \frac{\partial^2 c_{m-1}}{\partial x^2} + V \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x} + kc_{m-1} \right) d\tau \quad (3)$$

con

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

Por ejemplo, para $m = 0$ y $m = 1$ se obtiene

$$c_0(x, t) = axe^{-bx} \quad (4)$$

$$c_1(x, t) = ht(V(ae^{-bx} - abe^{-bx}x) - D(-2abe^{-bx} + ab^2e^{-bx}x) + k(axe^{-bx})) \quad (5)$$

Los valores numéricos de los parámetros utilizados son extraídos de [17] se presentan en la Tabla 1:

Nombre Físico	Letra	Valor	Unidad
Parámetro h	h	-1,1000	-
Coefficiente de difusión	D	0,5000	$cm^2 \cdot h^{-1}$
Velocidad	V	0,2000	$cm \cdot h^{-1}$
Coefficiente de reacción	k	0,0500	h^{-1}
Concentración inicial contaminante	a	2,0000	-
Coefficiente de concentración	b	0,0025	-

Tabla 1: Parámetros numéricos del Modelo 1

Los términos de la solución analítica HAM ingresados en Maxima fueron desde c_0 hasta c_{12} , sin embargo para no saturar este apartado es que se deja en Anexos de esta AFE. Por ejemplo:

$$c_1(x, t) := \left(\frac{-11}{10}\right) \int_0^t \left\{ \frac{d}{d\tau} c_0(x, \tau) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c_0(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c_0(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c_0(x, \tau) \right\} d\tau \quad (6)$$

$$c_2(x, t) := c_1(x, t) + \left(\frac{-11}{10}\right) \int_0^t \left\{ \frac{d}{d\tau} c_1(x, \tau) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c_1(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c_1(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c_1(x, \tau) \right\} d\tau \quad (7)$$

$$c_3(x, t) := c_2(x, t) + \left(\frac{-11}{10}\right) \int_0^t \left\{ \frac{d}{d\tau} c_2(x, \tau) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c_2(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c_2(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c_2(x, \tau) \right\} d\tau \quad (8)$$

Comparación preliminar m vs. h . Como primer experimento se muestra la relación entre el número de términos m considerados en la serie del método HAM, y el parámetro de convergencia h . Para h se utilizan los siguientes valores $h = -1, 1$; $h = -0, 22$; $h = 0, 1$ y $h = 1, 5$ los cuales serán justificados en la siguiente sección.

Posterior al ingreso de las ecuaciones en el software Maxima se ingresa el código para evaluar en $t = 20$ haciendo uso de la relación de recursividad antes mencionada.

$z0:c_0(x,20)$

$z1:c_0(x,20)+c_1(x,20)$

$z2:c_0(x,20)+c_1(x,20)+c_2(x,20)$

$z3:c_0(x,20)+c_1(x,20)+c_2(x,20)+c_3(x,20)$

En la Figura 2 resultante z representa la sumatoria de las concentraciones, en donde z es la suma de $c_0 + c_1$, es así que con $h = -1, 1$ podemos observar que las curvas se van alternando, $z0$ se ubica en el peak, mientras que $z1$ está posicionada hacia el cuadrante negativo del gráfico.

Para observar con mayor detención el comportamiento de las curvas es que se realiza una ampliación de las ecuaciones utilizadas hasta $z8$ realizando un zoom a las curvas.

Se visualiza las curvas resultantes manteniendo el $z1$ en el eje negativo, sin embargo en ambos gráficos de la figura 2 y 3 se aprecia la convergencia de las curvas. Mientras se van agregando términos z se aprecia como las curvas se van acercando, volviéndose indistinguibles entre sí.

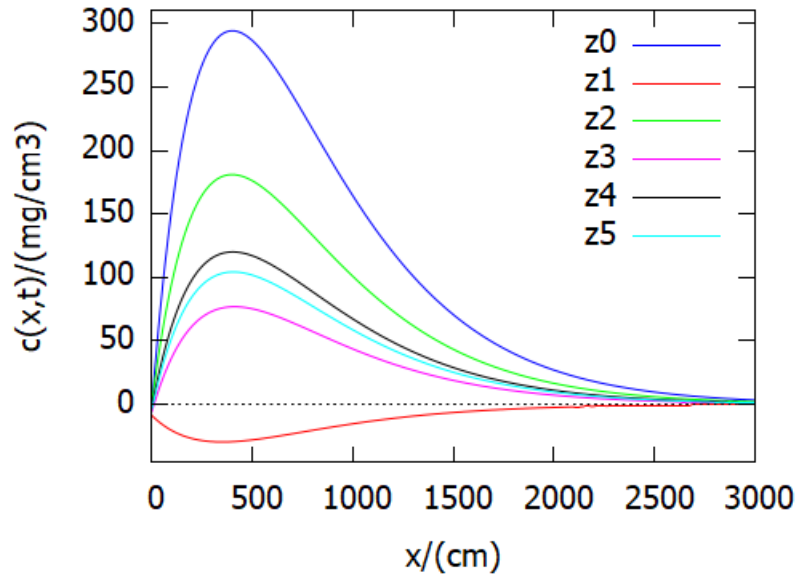


Figura 2: Gráfico z_0 a z_5 obtenido en Maxima con $h = -1, 1$

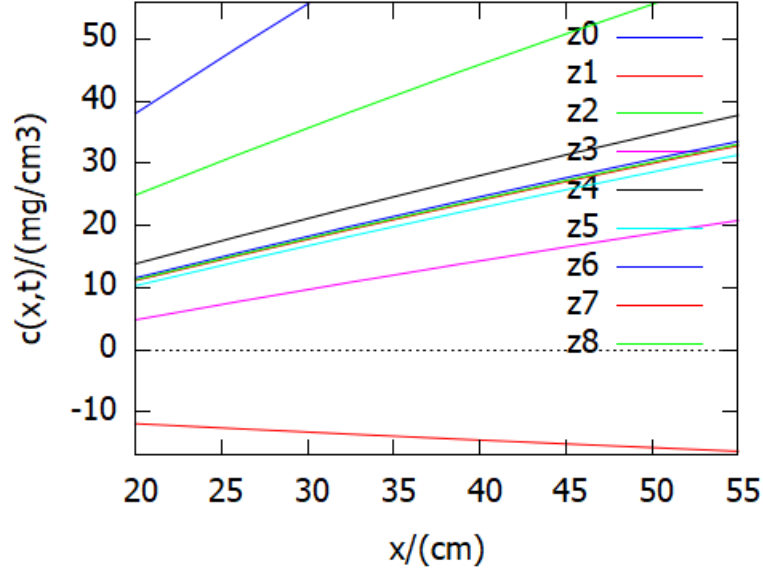


Figura 3: Gráfico z_0 a z_8 obtenido en Maxima con $h = -1,1$

En la figura 4, 5 y 6 es que se puede constatar que el parámetro de convergencia h genera una gran diferencia en el comportamiento de las curvas de la ecuación de transporte. Para la selección de éste parámetro es que se trabaja con la *curva* h .

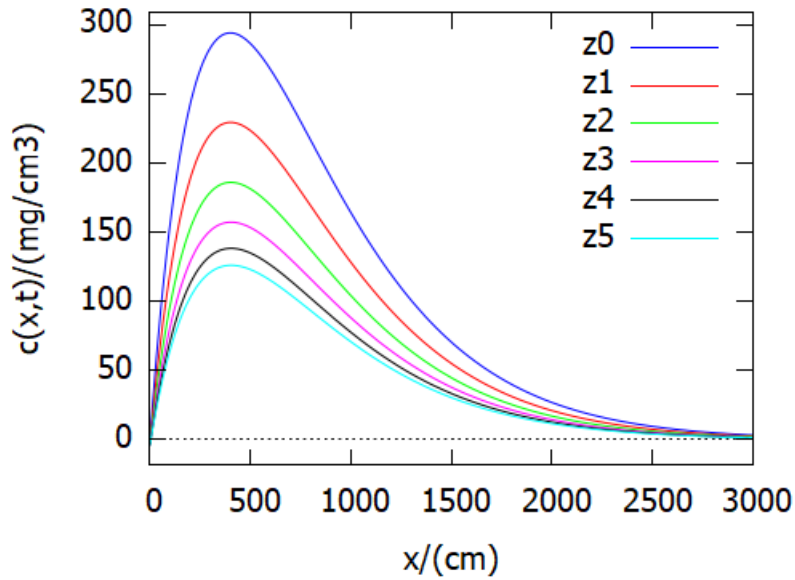


Figura 4: Gráfico z_0 a z_5 obtenido en Maxima con $h = -0,22$

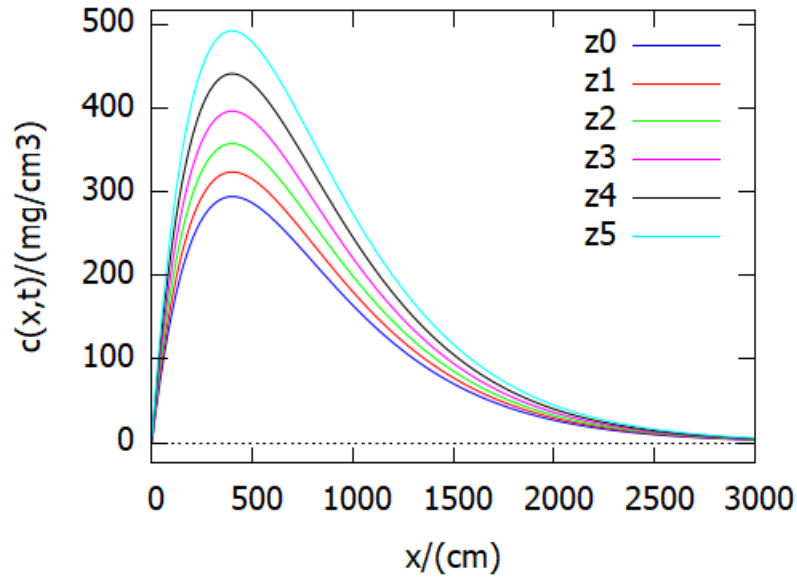


Figura 5: Gráfico z_0 a z_5 obtenido en Maxima con $h = 0, 1$

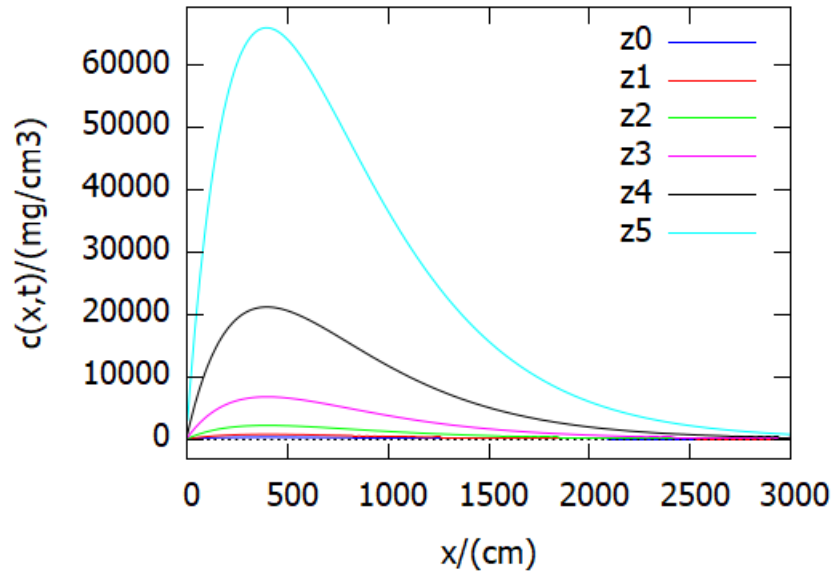


Figura 6: Gráfico z_0 a z_5 obtenido en Maxima con $h = 1, 5$

4.1.2. Curva h

La solución en serie del método HAM contiene un parámetro h el cual busca establecer un control en la convergencia de las soluciones calculadas. Para analizar esta metodología de la curva h y el intervalo de control de convergencia es que se grafica $c_{tt}(0, 1)$ en donde

$$c(x, t) := c_0(x, t) + c_1(x, t) + c_2(x, t) + c_3(x, t) + c_4(x, t) + c_5(x, t) \quad (9)$$

cuya gráfica en el intervalo $[-2, 2]$ se presenta en la figura 7:

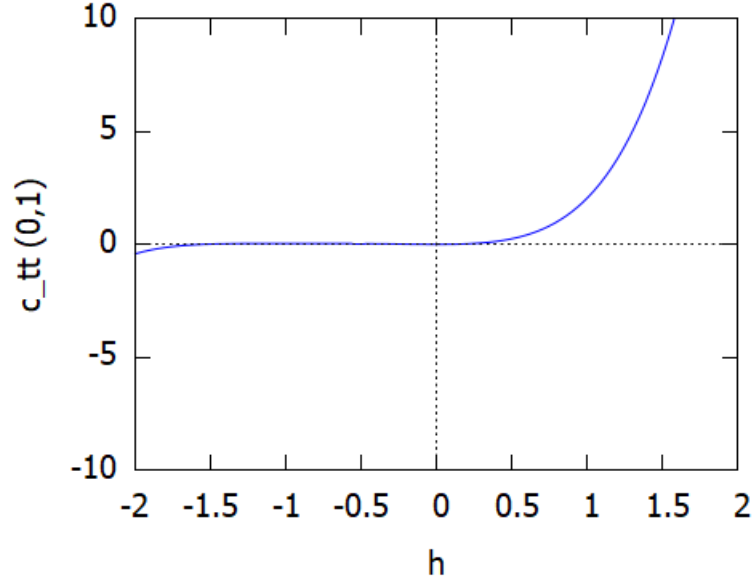


Figura 7: Curva h del Modelo 1: $c_{tt}(0, 1)$ vs. h

La teoría del método HAM [9] propone que un intervalo de convergencia se puede obtener en donde la *curva* h es horizontal. A partir de la Figura 7 se propone el intervalo $[-1, 5; 0, 3]$ de manera preliminar.

Para evaluar el grado de sensibilidad de la curva h a variaciones en los parámetros físicos de la ecuación gobernante, es que se presentan los gráficos correspondientes según cada parámetro.

A modo de aclaración es importante señalar que para realizar los gráficos y evaluar la sensibilidad de la curva h es que se consideran 5 curvas, para cada una de ellas se hace la variación en el parámetro correspondiente.

4.1.3. Análisis de sensibilidad curva h

Variación coeficiente de difusión. El coeficiente de difusión D se evalúa considerando los valores indicados en el gráfico. El análisis respecto a lo que ocurre cuando en la curva h aumentamos o disminuimos los valores numéricos del coeficiente de difusión es que no se produce una mayor diferencia de estabilidad en la curva.

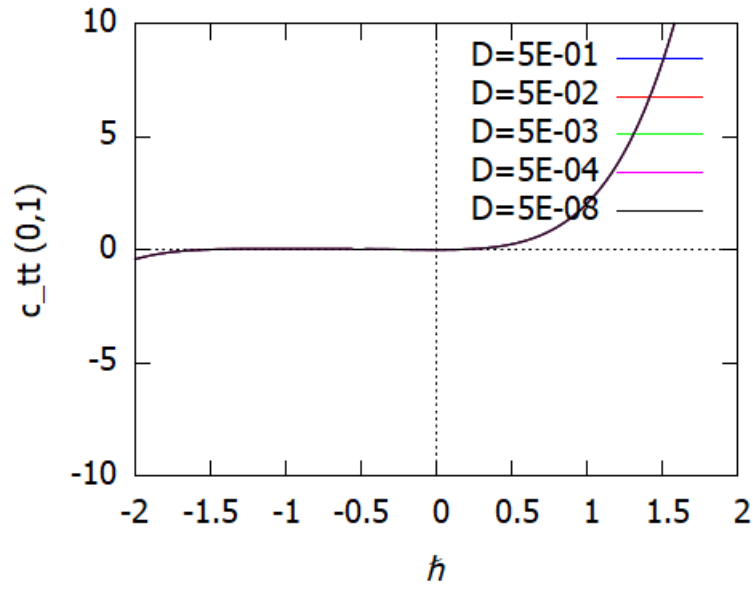


Figura 8: Variación coeficiente término difusivo

Variación de la velocidad. El término convectivo correspondiente a la velocidad en la ecuación de transporte su curva no produce mayores alteraciones al evaluar con los valores indicados en el gráfico.

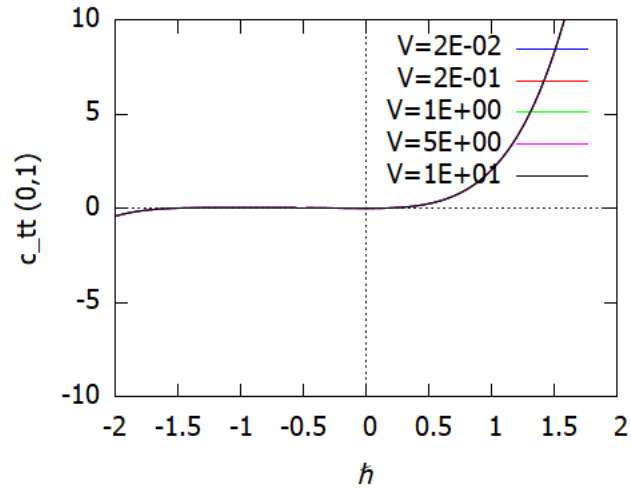


Figura 9: Variación coeficiente término convectivo

Podemos entonces concluir que de acuerdo al comportamiento de las curvas presentes en el gráfico no se genera una mayor alteración.

Variación término reactivo. El parámetro k el cual representa al término reactivo de la ecuación de transporte no recibe mayores alteraciones al evaluar numéricamente. Podemos observar en el gráfico siguiente:

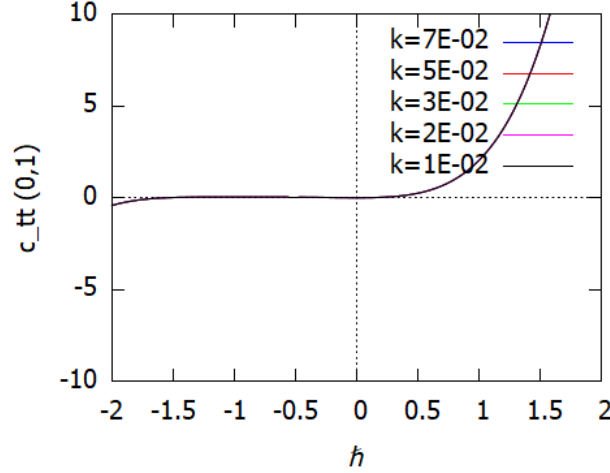


Figura 10: Variación coeficiente término reactivo

Finalmente, respecto a la variación de parámetros por cada coeficiente a las ecuaciones de concentración es que no se logra observar una mayor perturbación en la curva h respecto a los parámetros originales.

Se puede concluir que para h entre $[-1, 5; 0, 3]$ la serie converge.

4.1.4. Validación del método HAM con método TL

En esta sección se valida el método HAM aplicado al Modelo 1, tal como se presentó en la sección anterior. Para esto se utilizan los mismos valores numéricos para los parámetros informados en la tabla 1. No obstante, para mayor claridad, en la tabla 2 se reproducen los más relevantes.

La metodología de validación utilizada consiste en resolver analíticamente el Modelo 1 con el método clásico basado en la Transformada de Laplace (TL) y comparar esta solución con la obtenida con el método HAM. El método TL utilizado en esta tesis sigue la propuesta [16] cuya principal novedad es el cálculo de la TL inversa a través de un desarrollo en serie de Taylor, cuyos coeficientes se calculan con la TL de la función incógnita. Para mayores detalles revisar la sección 3.2.2 de este informe.

Como se sabe la ecuación gobernante es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} - kC, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1)$$

Además definimos:

$$\phi = Db^2 + Vb - k$$

Nombre Físico	Letra	Valor	Unidad
Coeficiente de difusión	D	5E-01	$cm^2 \cdot h^{-1}$
Velocidad	V	2E-01	$cm \cdot h^{-1}$
Coeficiente de reacción	k	5E-02	h^{-1}
Concentración inicial contaminante	a	2E+00	-
Coeficiente de concentración	b	3E-03	-

Tabla 2: Parámetros numéricos utilizados para la validación.

$$E = e^{-bx}$$

Los parámetros extraídos de [17] en donde los investigadores se sitúan en el área de la hidrología, sin embargo para esta AFE se utilizan los mismos parámetros con el fin de analizar la viabilidad de la solución de la ecuación CDR con el metodo HAM y TL.

Las variables expuestas en esta sección están definidas en la sección 3.2.2, ecuación (8), al igual que los pasos para la resolución de la obtención de las ecuaciones de concentración.

$$\begin{aligned}
a_1 &: D \cdot b^2x + Vbx - kx - 2Db - V \\
a_2 &: D \cdot b^2x + Vbx - kx - 4Db - 2V \\
a_3 &: D \cdot b^2x + Vbx - kx - 6Db - 2V \\
a_4 &: D \cdot b^2x + Vbx - kx - 8Db - 2V
\end{aligned}$$

Las ecuaciones trabajadas son desde a_1 hasta a_{12} . Revisar anexos para más detalle.

Ahora se puede expresar nuestra expresión como serie de potencias para la solución de $C(x, t)$ que viene dada por:

$$\begin{aligned}
C(x, t) &= axe^{-bx} + a(Db^2x + Vbx - kx - 2Db - V)e^{-bx}t \\
&+ a\phi(Db^2x + Vbx - kx - 4Db - 2V)e^{-bx}\frac{t^2}{2!} \\
&+ a\phi^2(Db^2x + Vbx - kx - 6Db - 3V)e^{-bx}\frac{t^3}{3!} \\
&+ a\phi^3(Db^2x + Vbx - kx - 8Db - 2V)e^{-bx}\frac{t^4}{4!} \\
&+ a\phi^4(Db^2x + Vbx - kx - 10Db - 4V)e^{-bx}\frac{t^5}{5!} + \mathcal{O}^6
\end{aligned} \tag{2}$$

Para trabajar en Maxima es que se realiza la siguiente adecuación con las ecuaciones:

De manera preliminar se establecen los valores numéricos a las variables

```

t:20;
D:1/2;
V:1/5;
k:1/20;
a:2;
b:25/10000;
phi:D*b*b+v*b-k;
E:exp(-b*x);

```

Posteriormente se define lo siguiente:

```

a1: D*b*b*x+v*b*x-k*x-2*D*b-v;
a2: D*b*b*x+v*b*x-k*x-4*D*b-2*v;
a3: D*b*b*x+v*b*x-k*x-6*D*b-3*v;
a4: D*b*b*x+v*b*x-k*x-8*D*b-4*v;
a5: D*b*b*x+v*b*x-k*x-10*D*b-5*v;

```

De esta manera se logra implementar computacionalmente el código en Maxima, realizando la evaluación con las variables ya definidas calculamos:

$$\begin{aligned}
t_0 &: axE \\
t_1 &: a \cdot a_1 \cdot E \cdot t \\
t_2 &: a\phi \cdot a_2 \cdot E \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{2!}\right) \\
t_3 &: a\phi^2 \cdot a_3 \cdot E \cdot t^3 \cdot \left(\frac{1}{3!}\right) \\
t_4 &: a\phi^3 \cdot a_4 \cdot E \cdot t^4 \cdot \left(\frac{1}{4!}\right) \\
t_5 &: a\phi^4 \cdot a_5 \cdot E \cdot t^5 \cdot \left(\frac{1}{5!}\right)
\end{aligned}$$

Las expresiones ingresadas fueron considerando hasta un a_{12} y t_{12} lo cual se encuentra en anexos. La figura 11 grafica la solución analítica vía método TL en $t = 20$.

A modo de validación en la figura 12 se realiza la comparación entre las soluciones obtenidas por el método HAM y la transformada de Laplace.

Esta comparación de las gráficas se realiza para distintos valores de h , es sabido que la TL no utiliza un parámetro de control de convergencia como lo hace el HAM, por lo que al trabajar con el $h = -1, 1$ en la figura 12 obtenemos la siguiente gráfica en un $t = 20$.

Al realizar la variación del parámetro h podemos observar que ocurren distintos fenómenos.

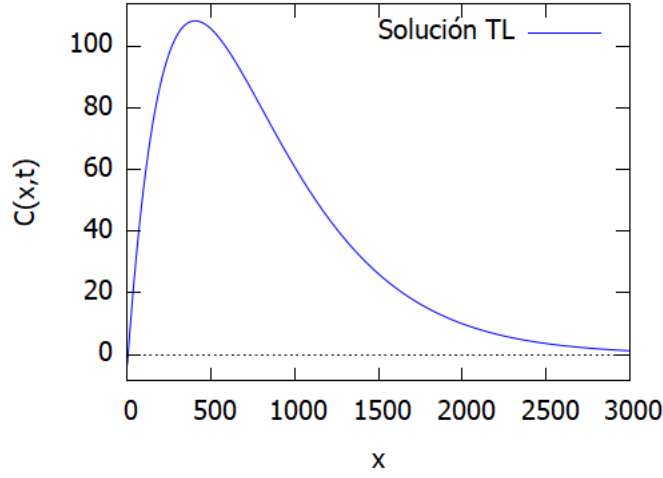


Figura 11: Solución analítica vía método TL en $t = 20$.

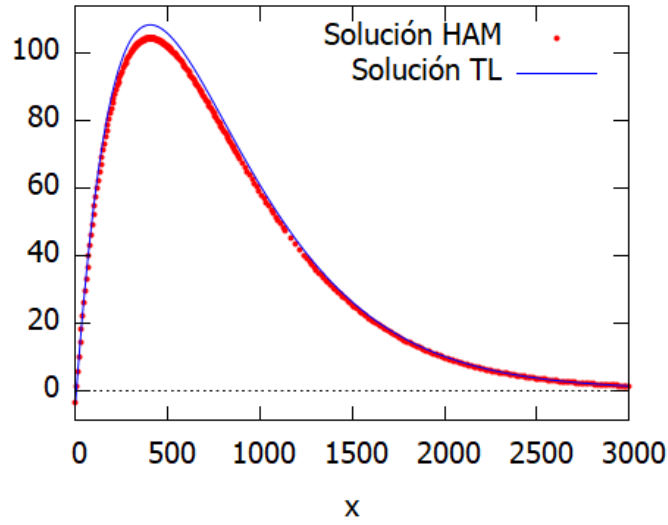


Figura 12: Comparación solución HAM vs. TL con $h = -1, 1$

Lo que ocurre con las gráficas de las figuras 13, 14 y 15 presentadas nos aclara que aunque nuestra *Curva h* nos indique que entre $[-1,5; 0,3]$ existe la convergencia, no da lo mismo elegir un valor entre ese rango.

A partir de los resultados obtenidos en los puntos anteriores nos trazamos el objetivo de obtener información del fenómeno de transporte a partir de la solución analítica de la ecuación CDR por el método HAM. Este análisis se presenta en las dos siguientes secciones. En la primera se evalúa el impacto de los parámetros a y b de la condición inicial, mientras que en la segunda parte se evalúa el

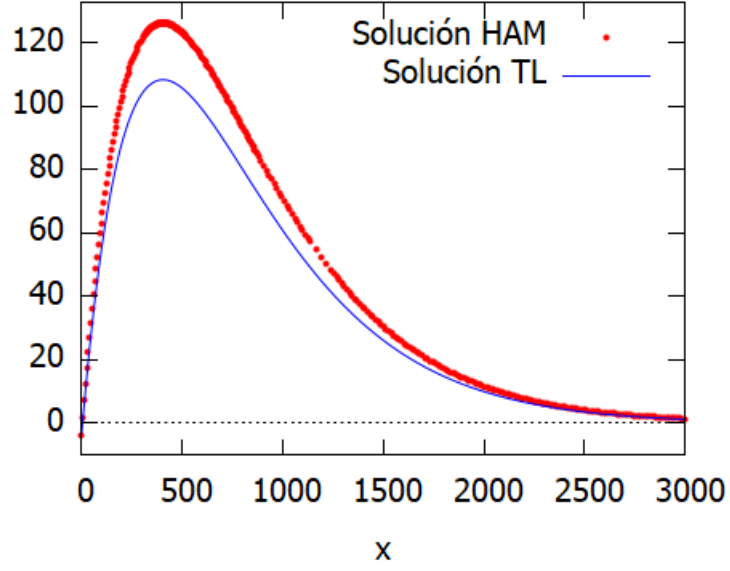


Figura 13: Comparación solución HAM vs. TL con $h = -0,22$

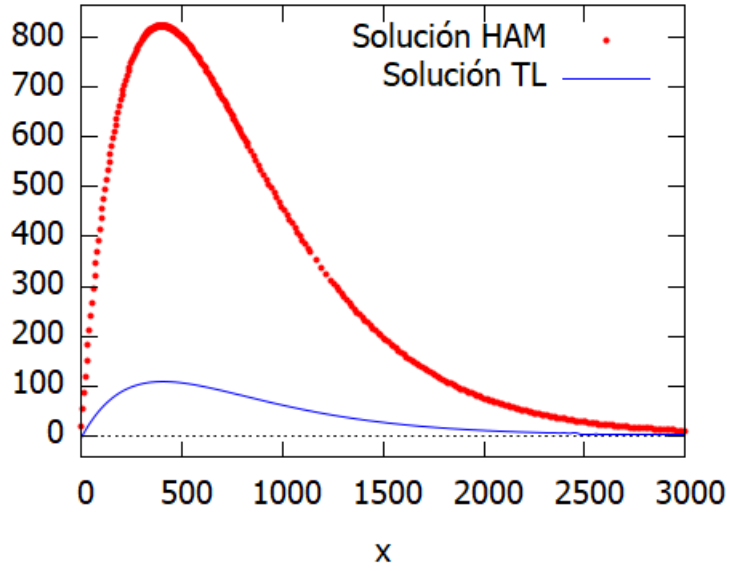


Figura 14: Comparación solución HAM vs. TL con $h = 0,2$

impacto de los coeficientes estructurales de la ecuación CDR como son D , V y k . Todos los cálculos se realizan con el valor $h = -1,1$ para el parámetro de convergencia.

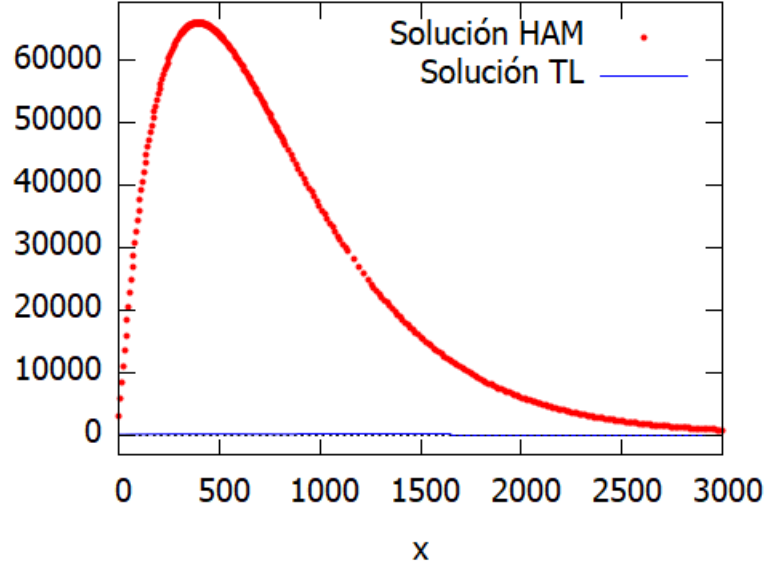


Figura 15: Solución analítica HAM y TL con $h = 1, 5$

4.1.5. Análisis de sensibilidad para los parámetros a y b

Como se menciona para nuestro modelo 1 de la ecuación CDR con difusión D constante, nuestra condición inicial con la que damos inicio al estudio con el método HAM en este capítulo, tiene parámetros a y b siendo la concentración inicial del contaminante y el coeficiente de concentración respectivamente. Sin embargo podemos hacer uso de la herramienta de simulación computacional para visualizar lo que ocurre con las curvas originales respecto a la variación de cada parámetro.

Para la evaluación de estos parámetros es que se consideran las ecuaciones de concentración desde c_0 hasta c_5 ecuaciones (4),(6),(7),(8) considerando para a y b el reemplazo correspondiente según los valores presentados en las Figuras 16 y 17.

Considerando que el valor de referencia utilizado es $a = 2$ la concentración alcanza un valor cercano a los $100[mg \cdot cm^{-3}]$, al aumentar el parámetro a se observa que mientras mayor es la concentración inicial del contaminante (a) existe una más alta concentración en la solución.

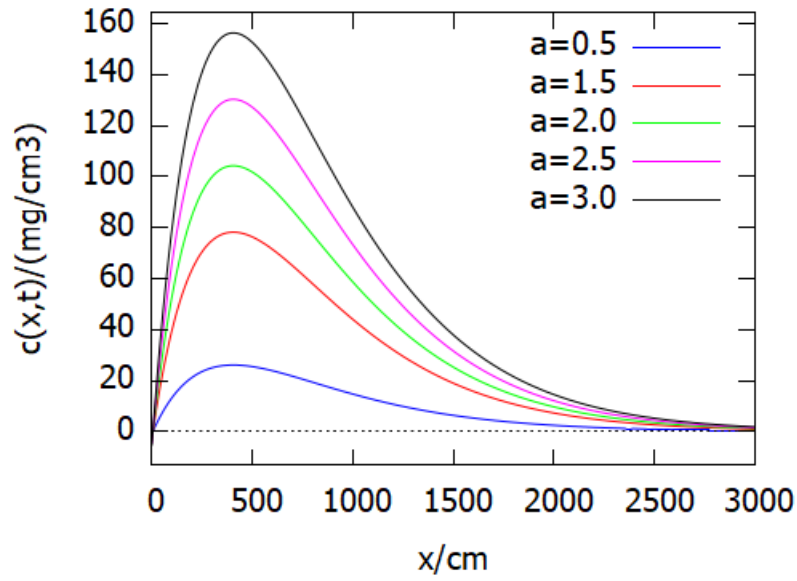


Figura 16: Variación parámetro a

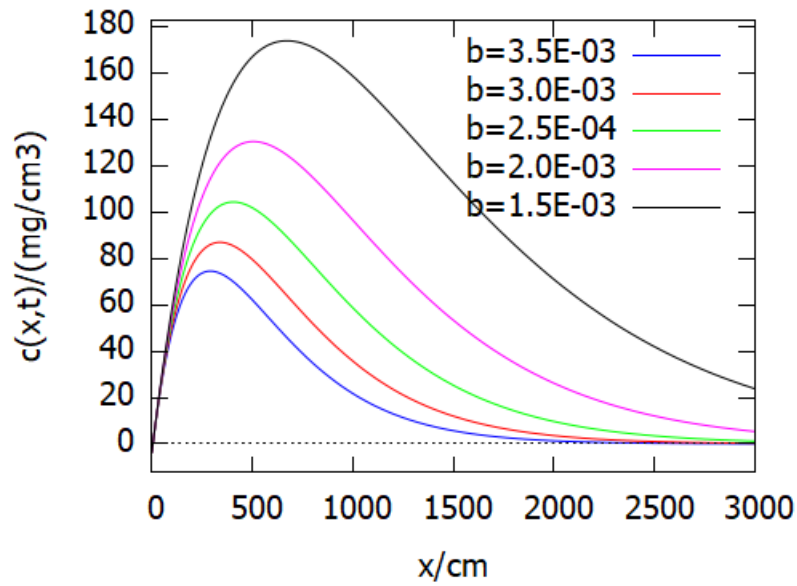


Figura 17: Variación parámetro b

En el parámetro b hace alusión al coeficiente de concentración, se observa que mientras más bajo este coeficiente, entonces es más baja la concentración en la solución.

4.1.6. Análisis de sensibilidad para los parámetros D , V y k

Utilizando el software Maxima se realiza un análisis respecto a que es lo que ocurre con la ecuación de transporte, efectuando un cambio en los parámetros D , V , k .

En la tabla 3 se indican en negrita los valores originales, considerando en D dos valores sobre y bajo el parámetro inicial. Respecto a los parámetros V y k se considera un valor sobre el parámetro original y tres valores inferiores al inicial.

N°	D	V	k
1	1.00E-08	2.00E-02	7.00E-02
2	1.00E-04	2.00E-01	5.00E-02
3	5.00E-01	2.00E+00	3.00E-02
4	1.00E-03	5.00E+00	2.00E-02
5	1.00E-02	1.00E+01	1.00E-02

Tabla 3: Valores numéricos utilizados. En negrilla los valores de referencia.

Variación parámetro D

En la figura 18 correspondiente al coeficiente de Difusión y sus variaciones numéricas en los parámetros, no se observa una alteración mayor en la formación de la curva, por lo que las concentraciones presentan poca sensibilidad a la variación del coeficiente de difusión.

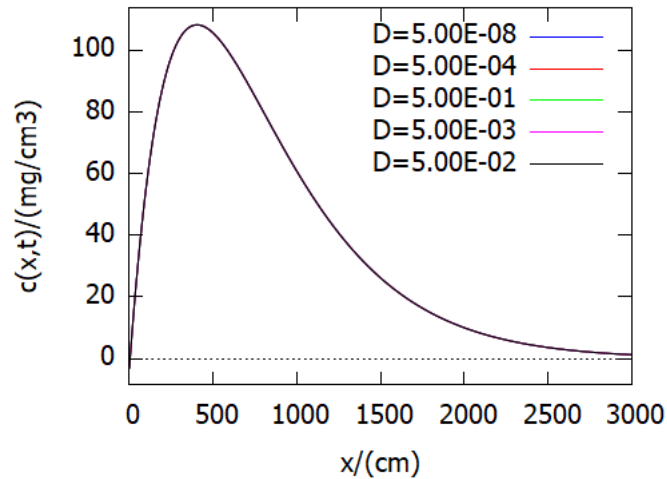


Figura 18: Variación parámetro D

Variación parámetro V . Al observar el gráfico de la Figura 19 podemos visualizar que a mayor velocidad ocurre un desplazamiento de las concentraciones hacia la derecha del eje x . Efectivamente se constata que la concentración es sensible a la velocidad del viento para este fenómeno en particular.

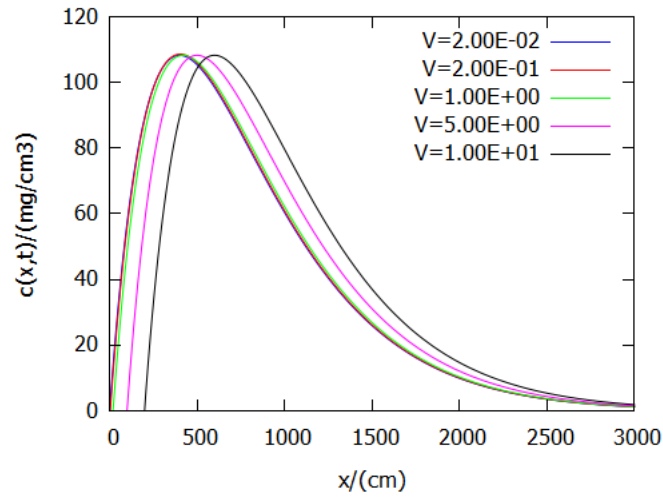


Figura 19: Variación parámetro V

Variación parámetro k . El parámetro k hace referencia al proceso de reacción, por ende al consumo que existe dentro del fenómeno de transporte. En la figura 20 se puede apreciar que a medida que aumenta el valor de k disminuye la concentración.

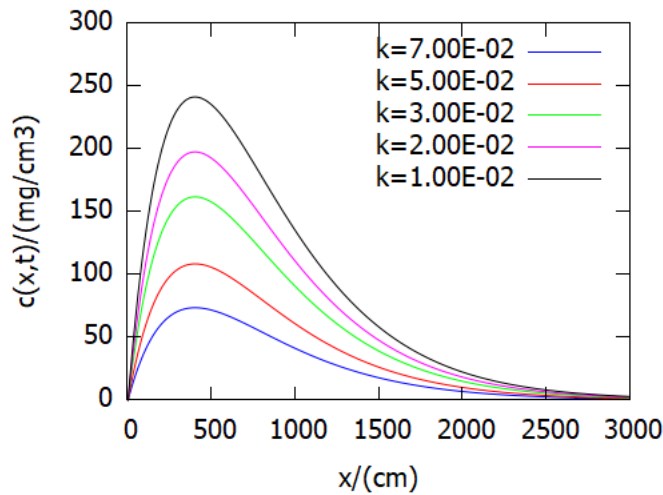


Figura 20: Variación parámetro k

En términos generales, se puede concluir que este fenómeno de transporte particular representado

por los valores numéricos utilizados es eminentemente reactivo, convectivo y en menor medida difusivo.

4.2. Ecuación CDR con difusión D variable

4.2.1. Resolución analítica vía método HAM en Maxima

En esta sección se considera el Modelo 2, el cual se distingue por un coeficiente de difusión variable en el tiempo. Específicamente,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(t) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad (3)$$

donde

$$D(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})D_0 + D_m \quad (4)$$

con la condición inicial y las de contorno

$$c(x, 0) = ae^{-bx} \quad (5)$$

$$c(0, t) = \frac{c_0}{2}(1 + e^{-rt}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial x} = 0, x \rightarrow \infty \quad (7)$$

donde k es el factor de decaimiento [h^{-1}], D_m es el coeficiente de difusión molecular [$cm^2 \cdot h^{-1}$], r es un parámetro del modelo.

En este caso para el método HAM se define el operador lineal L como

$$L[\psi(x, t; q)] = \frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial t}, \quad (8)$$

mientras que el operador no lineal N se define como

$$N[\psi(x, t; q)] = \frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial t} - D(t) \frac{\partial^2 \psi(x, t; q)}{\partial x^2} + V \frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial x} + k\psi(x, t; q). \quad (9)$$

La ecuación de deformación de orden cero está dada por

$$(1 - q)L[\psi - c_0(x, t)] = qhN[\psi(x, t; q)], \quad (10)$$

y la ecuación de deformación de orden m

$$L[c_m(x, t) - \chi_m c_{m-1}(x, t)] = hR_m(c_{m-1}(x, t)) \quad (11)$$

donde

$$R_m(c_{m-1}(x, t)) = \frac{\partial c_{m-1}(x, t)}{\partial t} - D(t) \frac{\partial^2 c_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + V \frac{\partial c_{m-1}(x, t)}{\partial x} + kc_{m-1}(x, t). \quad (12)$$

Así, se obtiene la solución de la ecuación (11),

$$c_m(x, t) = \chi_m c_{m-1}(x, t) + h \int_0^t R_m(c_{m-1}(x, \tau)) d\tau \quad (13)$$

En particular para $m = 0$ y $m = 1$

$$c_0(x, t) = ae^{-bx} \quad (14)$$

$$c_1(x, t) = ae^{-bx} h(kt - b^2(D_m t + D_0((-1 + e^{-\frac{t}{r}} r + t)) - btV). \quad (15)$$

Los valores numéricos de los parámetros utilizados en los siguientes experimentos computacionales se informan en la tabla 4, los cuales han sido tomados de [17].

Nombre Físico	Letra	Valor	Unidad
Parámetro del modelo	r	0,6230	h
Coefficiente de difusión máxima	D_0	0,0060	$cm^2 \cdot h^{-1}$
Coefficiente de difusión molecular	D_m	0,0030	$cm^2 \cdot h^{-1}$
Factor de decaimiento	k	0,0462	h^{-1}
Concentración inicial contaminante	a	0,5000	$mg \cdot L^{-1}$
Coefficiente de concentración	b	0,0100	cm
Velocidad de convección	V	0,2500	$cm \cdot h^{-1}$
Tiempo	t	1, 5, 8	h^{-1}
Parámetro de convergencia	h	-1,1000	-

Tabla 4: Parámetros utilizados para las ecuaciones de recurrencia de concentración con coeficiente de difusión exponencial

Con estos valores la función $D(t)$ queda expresada como:

$$D(t) = (1 - e^{-\frac{t}{0,623}}) \cdot \frac{3}{500} + \frac{3}{1000}.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} c_1(x, t) &:= \left(\frac{-11}{10}\right) \int_0^t \left\{ \frac{d}{d\tau} c_0(x, \tau) - D(\tau) \left(\frac{d^2}{dx^2} c_0(x, \tau) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c_0(x, \tau) \right) + \frac{231}{5000} c_0(x, \tau) \right\} d\tau \\ c_2(x, t) &:= c_1(x, t) + \left(\frac{-11}{10}\right) \int_0^t \left\{ \frac{d}{d\tau} c_1(x, \tau) - D(\tau) \left(\frac{d^2}{dx^2} c_1(x, \tau) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c_1(x, \tau) \right) + \frac{231}{5000} c_1(x, \tau) \right\} d\tau \\ c_3(x, t) &:= c_2(x, t) + \left(\frac{-11}{10}\right) \int_0^t \left\{ \frac{d}{d\tau} c_2(x, \tau) - D(\tau) \left(\frac{d^2}{dx^2} c_2(x, \tau) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c_2(x, \tau) \right) + \frac{231}{5000} c_2(x, \tau) \right\} d\tau \end{aligned}$$

En el capítulo de anexos se podrá visualizar las ecuaciones c_4 y c_5 .

4.2.2. Curva h

Para el Modelo 2 con el coeficiente de difusión dependiente del tiempo es que se realiza computacionalmente la *curva* h , de esta forma obtenemos el intervalo de convergencia para este caso particular.

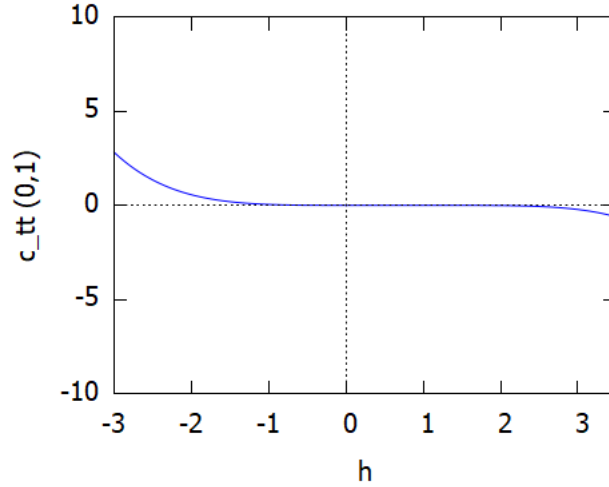


Figura 21: Curva h del Modelo 2: $c_{tt}(0,1)$ vs. h

A diferencia del Modelo 1 la *curva* h correspondiente a este caso particular presenta una orientación contraria y un intervalo de convergencia entre $[-1, 5; 2, 5]$.

En lo que sigue se presentan 4 experimentos computacionales, cuyo objetivo es evaluar la aplicabilidad del método HAM al Modelo 2. En este caso no se realiza una validación del método HAM contra otro método analítico. No obstante se enfatiza que el método TL también es aplicable al Modelo 2.

4.2.3. Experimento 1

Análisis de sensibilidad al parámetro h . La figura 22 grafica la solución del Modelo 2 en $t = 8$ y para tres valores representativos del parámetro de convergencia h como son: $h = -1, 1$; $h = -0, 22$; y $h = 0, 2$, los cuales fueron seleccionados desde el intervalo de convergencia $[-1, 5; 2, 5]$. Se constatan dos aspectos relevantes: en primer lugar, las curvas tienden a volverse indistinguibles cerca de $h = -1, 1$ (por esta razón en los siguientes experimentos se utilizará $h = -1, 1$.) En segundo lugar, y quizás lo más relevante, es que dentro del intervalo de convergencia se pueden obtener curvas solución distintas.

4.2.4. Experimento 2

Impacto de m para $t = 1, 5, 8$. En este experimento se ilustra el impacto del número de términos de la serie HAM para tres instantes de tiempo diferentes. En las figuras 23, 24 y 25 se utiliza la notación: $z_m = c_0 + c_1 + \dots + c_m$.

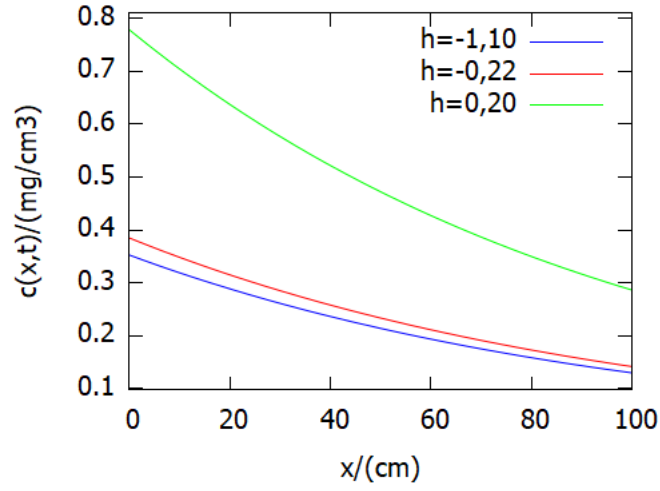


Figura 22: Curvas en $t = 8$ y h variable

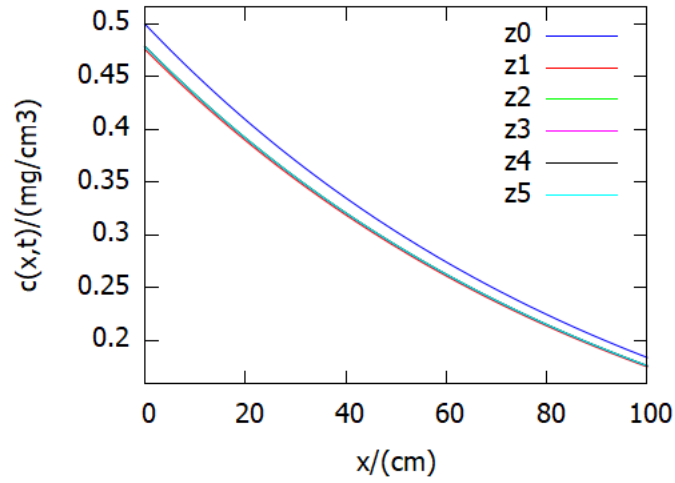


Figura 23: z_0 a z_5 en $t = 1$

De las Figuras 23, 24 y 25 en los distintos instantes de tiempo podemos observar que a medida que se va aumentando el valor de m lo cual evidencia empíricamente la convergencia de la serie HAM.

4.2.5. Experimento 3

Curvas para distintos instantes de t . En este experimento se resuelve el Modelo 2 con $h = -1, 1$.

La figura 26 presenta la solución para $t = 1$, $t = 5$ y $t = 8$

$$y1: c0(x,1)+c1(x,1)+c2(x,1)+c3(x,1)+c4(x,1)+c5(x,1);$$

$$y2: c0(x,5)+c1(x,5)+c2(x,5)+c3(x,5)+c4(x,5)+c5(x,5);$$

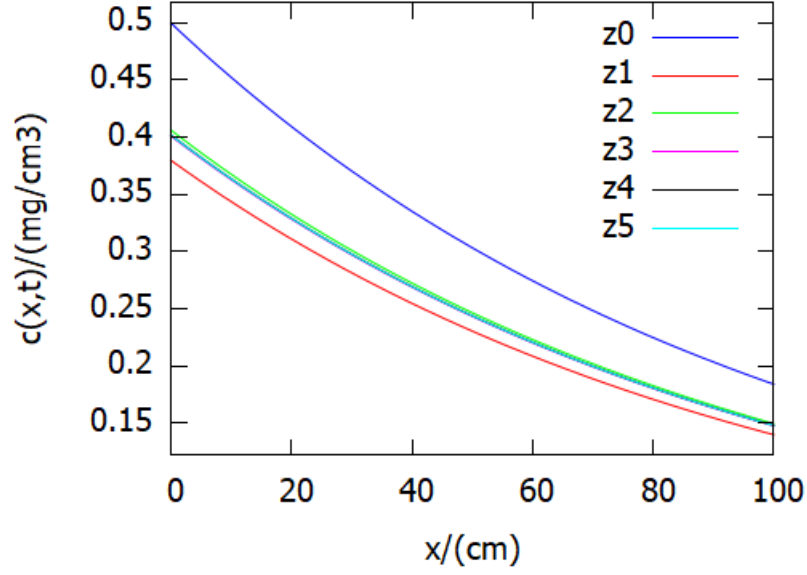


Figura 24: z_0 a z_5 en $t = 5$

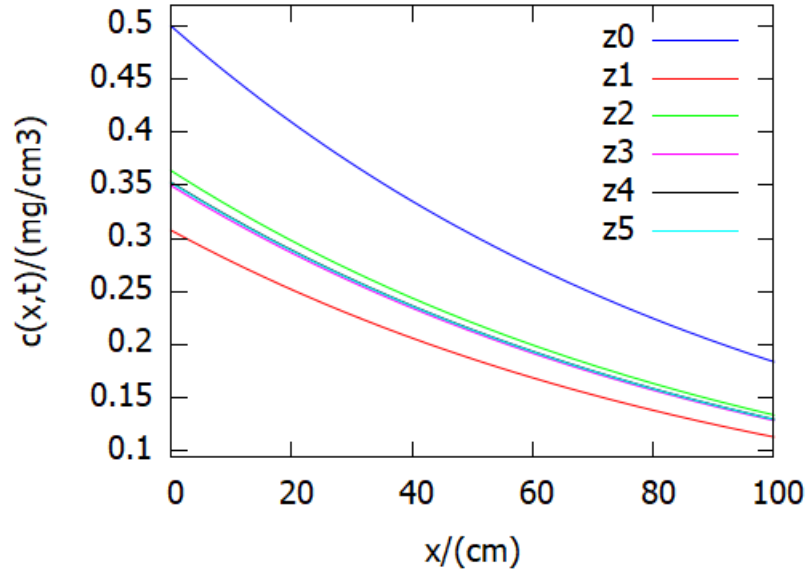


Figura 25: z_0 a z_5 en $t = 8$

$$y_3: c_0(x, 8) + c_1(x, 8) + c_2(x, 8) + c_3(x, 8) + c_4(x, 8) + c_5(x, 8);$$

De este gráfico se puede concluir que cuando el tiempo t es más bajo, entonces el perfil de concentración inicia desde un punto más alto. Si el tiempo es mayor entonces la concentración es más baja, debido a que el término reactivo indica consumo del elemento químico y no generación del mismo. El método

HAM reproduce curvas no lineales para los perfiles espaciales de concentración de contaminantes, que disminuye con el aumento de la profundidad y se aproxima a un estado estacionario en zonas profundas.

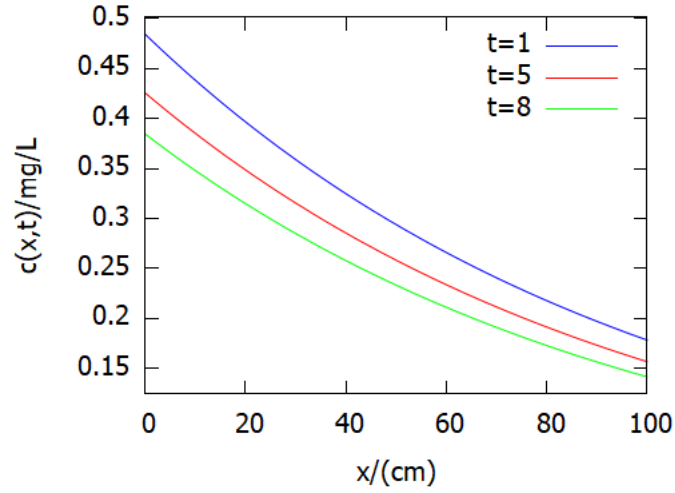


Figura 26: Perfiles de concentración para $t = 1, 5, 8$.

4.2.6. Experimento 4

Variación parámetros función $D(t)$. Para esta experimentación se utiliza un $t = 8$ y el parámetro de convergencia será $h = -1, 1$ para mantener el h idóneo encontrado en la ecuación CDR con difusión constante. Las gráficas obtenidas en las figuras 27,28 y 29 dan cuenta que el Modelo 2 es poco sensible a la variación del coeficiente difusivo.

$$D(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot D_0 + D_m$$

Parámetro coeficiente de difusión máxima D_0

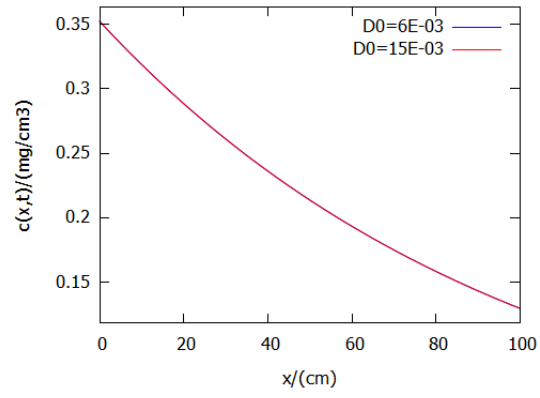


Figura 27: Variación parámetro difusivo D_0 .

Parámetro coeficiente de difusión molecular D_m

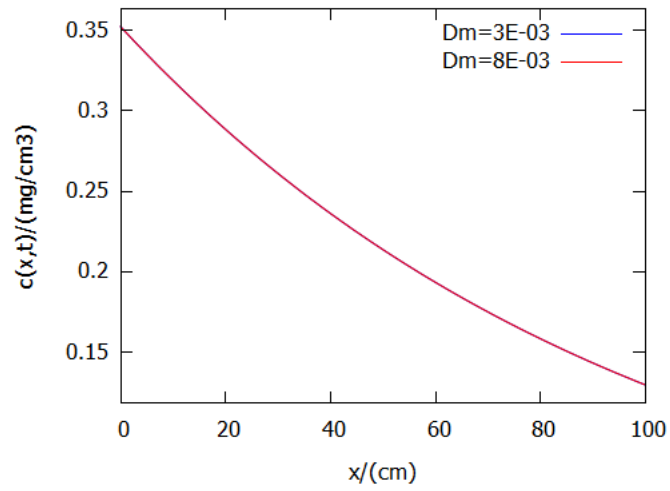


Figura 28: Variación parámetro difusivo D_m .

Parámetro del modelo r

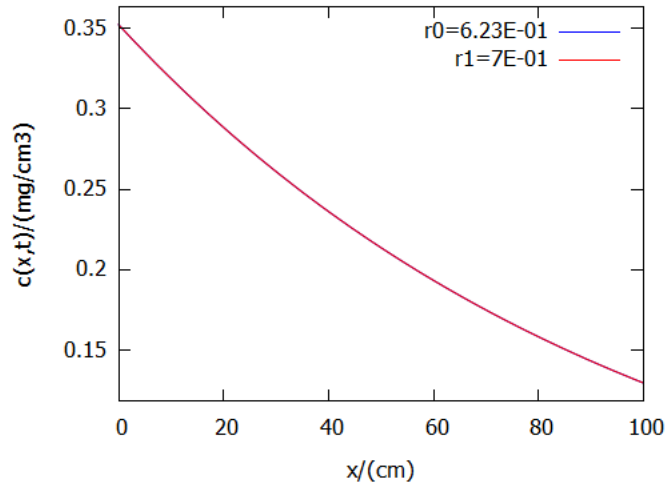


Figura 29: Variación parámetro del modelo r .

5. Conclusiones

En el presente estudio se han resuelto dos casos particulares de la ecuación diferencial parcial de transporte CDR con el método analítico HAM. Se consideró una ecuación CDR con coeficiente de difusión constante, y otra con coeficiente de difusión variable con dependencia temporal.

El foco de la investigación estuvo en evaluar la aplicabilidad del método HAM a este tipo de ecuaciones diferenciales.

Respecto de los objetivos de este trabajo:

1. Se implementó el método HAM con el software CAS Maxima.
2. Se evaluó la sensibilidad del método HAM ante cambios en todos los parámetros físico-químico relevantes, incluyendo el parámetro de convergencia.

En este sentido se ha podido concluir que, en este modelo particular CDR, predomina el consumo reactivo, luego el transporte por advección, y que el transporte por difusión posee un bajo impacto.

3. Se validó el método HAM con el método basado en la transformada de Laplace.

En términos generales se pudo constatar que:

- El método HAM posee una facilidad de uso muy competitiva, lo cual se ve debilitado por el consumo computacional que involucra el cálculo simbólico de los términos que forman su serie.
- No basta con determinar la región de convergencia calculada a partir de la *curva-h*, pues distintos valores de h pertenecientes a esta región pueden dar origen a distintas soluciones. Por lo tanto, se requieren elementos adicionales para garantizar la convergencia de la serie HAM.

Finalmente, como continuidad de este trabajo se vislumbra generalizar aún más la ecuación CDR, como por ejemplo, considerar coeficientes no lineales. Otra dirección de desarrollo sería optimizar la

implementación computacional del método HAM.

Referencias

- [1] Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N. (1982) Fenómenos de transporte: un estudio sistemático de los fundamentos del transporte de materia, energía y cantidad de movimiento. Reverte.
- [2] Cortés, A., Ridley, I. (2013). Efectos de la combustión a leña en la calidad del aire intradomiliario: La ciudad de Temuco como caso de estudio. Revista INVI (Impresa), 28(78), 257–271. <https://doi.org/10.4067/s0718-83582013000200008>
- [3] Fernández, G. (2008). Estructuras espacio- temporales en sistemas de reacción-difusión- advección [Tesis Doctorado]. Universidad de Santiago de Compostela.
- [4] Fernández, M. (2004). Estudio y modelización de la contaminación del acuífero del río Najerilla. Aplicación de la microextracción en fase sólida para la determinación de los contaminantes [Tesis doctoral]. Universidad de La Rioja.
- [5] Gallego Picó, A. (2013). Contaminación atmosférica.. UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia. <https://elibro.net/es/lc/uctemuco/titulos/48595>
- [6] Geankoplis, C. J. (2000). Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias. Ceca.
- [7] Ghajar, A., Cengel, Y. (2010). Transferencia de Calor y Masa. Mc Graw-Hill Interamericana Editores.
- [8] Huneus, N., et al. (2020). El aire que respiramos: pasado, presente y futuro - Contaminación atmosférica por MP2. Centro de Ciencia del Clima y la Resiliencia, 5.
- [9] Liao, S. (2012). Homotopy analysis method in nonlinear differential equations (2012a ed.). Springer.
- [10] López-Canteñs, G., Ostos-Santos, JA, Rojano-Aguilar, A., Vázquez-Alarcón, A., Arteaga-Tovar, E. (2006). Aproximación de la ecuación de difusión en el suelo con serie de Fourier. Terra Latinoamericana , 24 (4), 443-450.
- [11] Luque, A. (2021). Procesos no locales asociados a los flujos turbulentos en campos agrícolas de zonas semiáridas [Tesis Magíster]. Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [12] Molina, P. (2013). Simulación numérica de un problema de contaminación atmosférica [Tesis doctoral]. Universidad Politécnica de Madrid.
- [13] Munkres, J. R. (2000). Topology (2a ed.). Pearson.
- [14] Reporte del Estado del Medio Ambiente. (2021). sinia.mma.gob.cl. Recuperado 1 de septiembre de 2022, de <https://sinia.mma.gob.cl/wp-content/uploads/2022/06/REMA2021.pdf>

- [15] Seoáñez, M. (2008). Tratado de la contaminación atmosférica: problemas, tratamiento y gestión. Mundi-Prensa. <https://elibro.net/es/lc/uctemuco/titulos/35868>
- [16] Simpson, M. J., Ellery, A. J. (2014). Exact series solutions of reactive transport models with general initial conditions. *Journal of hydrology*, 513, 7–12. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2014.03.035>
- [17] Wang, H., Fang, D., Ma, J., Cai, X., Yu, X. (2018). Semi-analytical solution to one-dimensional advective-dispersive-reactive transport equation using homotopy analysis method. *Journal of Hydrology*, 565, 422–428. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2018.08.041>
- [18] wxMaxima Team. (2021). Maxima (V5.45.1) [Software]. <https://maxima.sourceforge.io/es/>

6. Anexos

6.1. Anexos M1

6.1.1. Código método HAM c0 a c8

Análisis de Sensibilidad modificando parámetro D , V Y K

--> $c0(x, t) := 2 \cdot x \cdot \exp(-25 / 10000 \cdot x);$

$$c0(x, t) := 2x \exp\left(\frac{-25}{10000}x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c0(x, \text{tau}),$
> $\text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c1(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c2(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c3(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c4(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c6(x, t) := c5(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c5(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c5(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c6(x, t) := c5(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c5(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c5(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c7(x, t) := c6(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c6(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c6(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c7(x, t) := c6(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c6(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c6(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c8(x, t) := c7(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c7(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1 / 2) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 5) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x) + (1 / 20) \cdot c7(x,$
> $\text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c8(x, t) := c7(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c7(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c7(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $z1 : c0(x, 20) + c1(x, 20);$

$z2 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20);$

$z3 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20);$

$z4 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20);$

$z5 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20);$

$z0 : c0(x, 20);$

$z6 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20) + c6(x, 20);$

$z7 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20) + c6(x, 20) + c7(x, 20);$

$z8 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20) + c6(x, 20) + c7(x, 20) + c8(x, 20);$

$$2x\%e^{-\frac{x}{400}} - 22 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) \\ - 44 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(8334941131x + 45389678400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{25600000000} + 2x\%e^{-\frac{x}{400}}$$

6.1.2. Código para la curva h

6.1.3. Código TL

```
--> y : se ( x ) ;
      t : 20 ;
      D : 1 / 2 ;
      v : 1 / 5 ;
      k : 1 / 20 ;
      a : 2 ;
      b : 25 / 10000 ;
      phi : D · b · b + v · b - k ;
      E : exp ( - b · x ) ;
```

$$se(x)$$

$$20$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{20}$$

$$2$$

$$\frac{1}{400}$$

$$-\frac{15839}{320000}$$

$$e^{-\frac{x}{400}}$$

```
--> a1 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 2 · D · b - v ;
```

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{400}$$

```
--> a2 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 4 · D · b - 2 · v ;
      a3 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 6 · D · b - 3 · v ;
      a4 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 8 · D · b - 4 · v ;
      a5 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 10 · D · b - 5 · v ;
      a6 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 12 · D · b - 6 · v ;
      a7 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 14 · D · b - 7 · v ;
      a8 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 16 · D · b - 8 · v ;
      a9 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 18 · D · b - 9 · v ;
      a10 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 20 · D · b - 10 · v ;
      a11 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 22 · D · b - 11 · v ;
      a12 : D · b · b · x + v · b · x - k · x - 24 · D · b - 12 · v ;
```

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{200}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{400}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{100}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{80}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{200}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{567}{400}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{50}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{729}{400}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{40}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{891}{400}$$

$$-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{100}$$

```
--> t0 : a · x · E ;
      t1 : a · a1 · E · t ;
```

```

t2 : a · phi · a2 · E · ( t ^ 2 ) · ( 1 / factorial ( 2 ) ) ;
t3 : a · ( phi ^ 2 ) · a3 · E · ( t ^ 3 ) · ( 1 / factorial ( 3 ) ) ;
t4 : a · ( phi ^ 3 ) · a4 · E · ( t ^ 4 ) · ( 1 / factorial ( 4 ) ) ;
t5 : a · ( phi ^ 4 ) · a5 · E · ( t ^ 5 ) · ( 1 / factorial ( 5 ) ) ;
t6 : a · ( phi ^ 5 ) · a6 · E · ( t ^ 6 ) · ( 1 / factorial ( 6 ) ) ;
t7 : a · ( phi ^ 6 ) · a7 · E · ( t ^ 7 ) · ( 1 / factorial ( 7 ) ) ;
t8 : a · ( phi ^ 7 ) · a8 · E · ( t ^ 8 ) · ( 1 / factorial ( 8 ) ) ;
t9 : a · ( phi ^ 8 ) · a9 · E · ( t ^ 9 ) · ( 1 / factorial ( 9 ) ) ;
t10 : a · ( phi ^ 9 ) · a10 · E · ( t ^ 10 ) · ( 1 / factorial ( 10 ) ) ;
t11 : a · ( phi ^ 10 ) · a11 · E · ( t ^ 11 ) · ( 1 / factorial ( 11 ) ) ;
t12 : a · ( phi ^ 11 ) · a12 · E · ( t ^ 12 ) · ( 1 / factorial ( 12 ) ) ;

```

$$\begin{aligned}
& 2x \% e^{-\frac{x}{400}} \\
& 40 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}} \\
& - \frac{15839 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{200} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{800} \\
& \frac{250873921 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{38400000} \\
& - \frac{3973592034719 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{100} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{245760000000} \\
& \frac{62937724237914241 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{80} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{19660800000000000} \\
& - \frac{996870614204323663199 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{200} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{188743680000000000000} \\
& \frac{15789433658382282501408961 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{567}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{211392921600000000000000000} \\
& \frac{250088839715116972539816533279 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{50} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{2705829396480000000000000000000} \\
& \frac{3961157132247737728058154070606081 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{729}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{3896394330931200000000000000000000000} \\
& - \frac{62740767817671917874713102324329716959 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{40} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{623423092948992000000000000000000000000000} \\
& \frac{993751021464105507217580827715058386913601 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{891}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{1097224643590225920000000000000000000000000000} \\
& - \frac{15740022428969967128819262730178809790324526239 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{100} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{21066713156932337664000000000000000000000000000000}
\end{aligned}$$

--> y = t0 + t1 + t2 + t3 + t4 + t5 + t6 + t7 + t8 + t9 + t10 + t11 + t12 ;

$$se(x) = 2x \% e^{-\frac{x}{400}} + 40 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}} - \frac{15839 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{200} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{800} + \frac{250873921 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{38400000} - \frac{3973592034719 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{100} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{245760000000}$$

--> y12 : t0 + t1 + t2 + t3 + t4 + t5 + t6 + t7 + t8 + t9 + t10 + t11 + t12 ;

$$2x \% e^{-\frac{x}{400}} + 40 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}} - \frac{15839 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{200} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{800} + \frac{250873921 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{243}{400} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{38400000} - \frac{3973592034719 \left(-\frac{15839x}{320000} - \frac{81}{100} \right) \% e^{-\frac{x}{400}}}{245760000000} +$$

--> c0 (x , t) := 2 · x · exp (- 25 / 10000 · x) ;

$$c0(x, t) := 2x \exp \left(\frac{-25}{10000} x \right)$$

-- c1 (x , t) := - (11 / 10) · integrate (diff (c0 (x , tau) , tau) - (1 / 2) · diff (c0 (x , tau) , x , 2) + (1 / 5) · diff (c0 (x , tau) , x) + (1 / 20) · c0 (x , tau) ,
> tau , 0 , t) ;

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10} \right) \int_0^t \frac{d}{d\tau} c0(x, \tau) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c0(x, \tau) d\tau$$

-- c2 (x , t) := c1 (x , t) - (11 / 10) · integrate (diff (c1 (x , tau) , tau) - (1 / 2) · diff (c1 (x , tau) , x , 2) + (1 / 5) · diff (c1 (x , tau) , x) + (1 / 20) · c1 (x ,
> tau) , tau , 0 , t) ;

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c1(x, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c1(x, \tau) d\tau$$

```
-- c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) * integrate(diff(c2(x, tau), tau) - (1/2) * diff(c2(x, tau), x, 2) + (1/5) * diff(c2(x, tau), x) + (1/20) * c2(x, tau), tau, 0, t);
```

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c2(x, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c2(x, \tau) d\tau$$

```
-- c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) * integrate(diff(c3(x, tau), tau) - (1/2) * diff(c3(x, tau), x, 2) + (1/5) * diff(c3(x, tau), x) + (1/20) * c3(x, tau), tau, 0, t);
```

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c3(x, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c3(x, \tau) d\tau$$

```
-- c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) * integrate(diff(c4(x, tau), tau) - (1/2) * diff(c4(x, tau), x, 2) + (1/5) * diff(c4(x, tau), x) + (1/20) * c4(x, tau), tau, 0, t);
```

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c4(x, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \tau) \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \tau) \right) + \frac{1}{20} c4(x, \tau) d\tau$$

```
--> z1 : c0(x, 20) + c1(x, 20);
z2 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20);
z3 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20);
z4 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20);
z5 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20);
z0 : c0(x, 20);
```

$$2x e^{-\frac{x}{400}} - 22 \left(-\frac{\frac{x}{80000} e^{-\frac{x}{400}} - \frac{e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x}{200} e^{-\frac{x}{400}}}{5} + \frac{x e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - 44 \left(-\frac{\frac{x}{80000} e^{-\frac{x}{400}} - \frac{e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x}{200} e^{-\frac{x}{400}}}{5} + \frac{x e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(8334941131x + 45389678400) e^{-\frac{x}{400}}}{25600000000} + 2x e^{-\frac{x}{400}} - 66 \left(-\frac{\frac{x}{80000} e^{-\frac{x}{400}} - \frac{e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x}{200} e^{-\frac{x}{400}}}{5} + \frac{x e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - \frac{11(2337957543656999x + 20002142677730400) e^{-\frac{x}{400}}}{1228800000000000} + \frac{11(8334941131x + 45389678400) e^{-\frac{x}{400}}}{12800000000} - 88 \left(-\frac{\frac{x}{80000} e^{-\frac{x}{400}} - \frac{e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x}{200} e^{-\frac{x}{400}}}{5} + \frac{x e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(695910201279831022771x + 7946121679849581148800) e^{-\frac{x}{400}}}{78643200000000000000} - \frac{11(2337957543656999x + 20002142677730400) e^{-\frac{x}{400}}}{614400000000000} - 110 \left(-\frac{\frac{x}{80000} e^{-\frac{x}{400}} - \frac{e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x}{200} e^{-\frac{x}{400}}}{5} + \frac{x e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - \frac{11(221468695876892195776416559x + 3115913691749284257059844000) e^{-\frac{x}{400}}}{629145600000000000000000000} + \frac{11(695910201279831022771x + 7946121679849581148800) e^{-\frac{x}{400}}}{614400000000000}$$

$$2x e^{-\frac{x}{400}}$$

```
--> z1(0);
z2(0);
z3(0);
z4(0);
z5(0);
z0(0);
```

$$\left(2x e^{-\frac{x}{400}} - 22 \left(-\frac{\frac{x}{80000} e^{-\frac{x}{400}} - \frac{e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x}{200} e^{-\frac{x}{400}}}{5} + \frac{x e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) \right) (0)$$

$$(2x e^{-\frac{x}{400}})(0)$$

```
-- plot2d([z5, t0 + t1 + t2 + t3 + t4 + t5 + t6 + t7 + t8 + t9 + t10 + t11 + t12], [x, 0, 3000], [style, [points, 1, 2, 1], [lines, 1, 1]], [legend, "Solución HAM", "Solución TL"]);
```

[nC : /Users/rossi/AppData/Local/Temp/maxout24684.gnuplotnC]

6.1.4. Análisis sensibilidad

```
--> c0(x,t):=2·x·exp(-25/10000·x);
```

%errorWarning: Can set maxima's working directory but cannot change it during the maxima session :

$$c0(x,t) := 2x \exp\left(\frac{-25}{10000}x\right)$$

```
-- c1(x,t):=-(11/10)·integrar(diff(c0(x,tau),tau)-(1/2)·diff(c0(x,tau),x,2)+(1/5)·diferencia(c0(x,tau),x)+(1/20)·c0(x,tau)
> ,tau,0,t);_--
```

$$c1(x,t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\tau} c0(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c0(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c0(x,\tau) d\tau$$

```
-- c2(x,t):=c1(x,t)-(11/10)·integrar(diferencia(c1(x,tau),tau)-(1/2)·diferencia(c1(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c1(x,tau),x)+(1/
> 20)·c1(x,tau),tau,0,t);
```

$$c2(x,t) := c1(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c1(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c1(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c1(x,\tau) d\tau$$

```
-- c3(x,t):=c2(x,t)-(11/10)·integrar(diferencia(c2(x,tau),tau)-(1/2)·diferencia(c2(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c2(x,tau),x)+(1/
> 20)·c2(x,tau),tau,0,t);
```

$$c3(x,t) := c2(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c2(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c2(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c2(x,\tau) d\tau$$

```
-- c4(x,t):=c3(x,t)-(11/10)·integrar(diferencia(c3(x,tau),tau)-(1/2)·diferencia(c3(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c3(x,tau),x)+(1/
> 20)·c3(x,tau),tau,0,t);
```

$$c4(x,t) := c3(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c3(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c3(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c3(x,\tau) d\tau$$

```
-- c5(x,t):=c4(x,t)-(11/10)·integrar(diferencia(c4(x,tau),tau)-(1/2)·diferencia(c4(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c4(x,tau),x)+(1/
> 20)·c4(x,tau),tau,0,t);
```

$$c5(x,t) := c4(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c4(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c4(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c4(x,\tau) d\tau$$

```
--> z1:c0(x,20)+c1(x,20);z2:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20);z3:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20)
```

```
+c3(x,20);
z4:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20)+c3(x,20)+c4(x,20);
z5:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20)+c3(x,20)+c4(x,20)+c5(x,20);
z0:c0(x,20);
```

$$\begin{aligned} & 2x\%e^{-\frac{x}{400}} - 22 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) \\ & - 44 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(8334941131x + 45389678400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{25600000000} + 2x\%e^{-\frac{x}{400}} \\ & - 66 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - \frac{11(2337957543656999x + 20002142677730400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{1228800000000000} + \frac{11(8334941131x + 45389678400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{12800000000} \\ & - 88 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(695910201279831022771x + 7946121679849581148800)\%e^{-\frac{x}{400}}}{78643200000000000000} - \frac{11(2337957543656999x + 20002142677730400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{61440} \\ & - 110 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - \frac{11(221468695876892195776416559x + 3115913691749284257059844000)\%e^{-\frac{x}{400}}}{62914560000000000000000000} + \frac{11(695910201279831022771x + 7946121679849581148800)\%e^{-\frac{x}{400}}}{61440} \\ & 2x\%e^{-\frac{x}{400}} \end{aligned}$$

```
--> z1(0);
z2(0);
z3(0);
z4(0);
z5(0);
z0(0);
```

```
--> c0(x,t):=2·x·exp(-25/10000·x);
```

$$c0(x,t) := 2x \exp\left(\frac{-25}{10000}x\right)$$

```
-- c1(x,t):=-(11/10)·integrate(diff(c0(x,tau),tau)-(1/2)·diff(c0(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c0(x,tau),x)+(1/20)·c0(x,tau),tau,0,t);
```

$$c1(x,t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\tau} c0(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c0(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c0(x,\tau) d\tau$$

```
-- c2(x,t):=c1(x,t)-(11/10)·integrate(diff(c1(x,tau),tau)-(1/2)·diff(c1(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c1(x,tau),x)+(1/20)·c1(x,tau),tau,0,t);
```

$$c2(x,t) := c1(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c1(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c1(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c1(x,\tau) d\tau$$

```
-- c3(x,t):=c2(x,t)-(11/10)·integrate(diff(c2(x,tau),tau)-(1/2)·diff(c2(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c2(x,tau),x)+(1/20)·c2(x,tau),tau,0,t);
```

$$c3(x,t) := c2(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c2(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c2(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c2(x,\tau) d\tau$$

```
-- c4(x,t):=c3(x,t)-(11/10)·integrate(diff(c3(x,tau),tau)-(1/2)·diff(c3(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c3(x,tau),x)+(1/20)·c3(x,tau),tau,0,t);
```

$$c4(x,t) := c3(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c3(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c3(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c3(x,\tau) d\tau$$

```
-- c5(x,t):=c4(x,t)-(11/10)·integrate(diff(c4(x,tau),tau)-(1/2)·diff(c4(x,tau),x,2)+(1/5)·diff(c4(x,tau),x)+(1/20)·c4(x,tau),tau,0,t);
```

$$c5(x,t) := c4(x,t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\tau} c4(x,\tau) d\tau - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x,\tau)\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c4(x,\tau)\right) + \frac{1}{20} c4(x,\tau) d\tau$$

```
--> z1:c0(x,20)+c1(x,20);
z2:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20);
z3:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20)+c3(x,20);
z4:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20)+c3(x,20)+c4(x,20);
z5:c0(x,20)+c1(x,20)+c2(x,20)+c3(x,20)+c4(x,20)+c5(x,20);
z0:c0(x,20);
```

$$\begin{aligned} & 2x\%e^{-\frac{x}{400}} - 22 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) \\ & - 44 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(8334941131x + 45389678400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{25600000000} + 2x\%e^{-\frac{x}{400}} \\ & - 66 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - \frac{11(2337957543656999x + 20002142677730400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{122880000000000} + \frac{11(8334941131x + 45389678400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{12800000000} \\ & - 88 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) + \frac{11(695910201279831022771x + 7946121679849581148800)\%e^{-\frac{x}{400}}}{78643200000000000000} - \frac{11(2337957543656999x + 20002142677730400)\%e^{-\frac{x}{400}}}{61440000000000} \\ & - 110 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - \frac{11(221468695876892195776416559x + 3115913691749284257059844000)\%e^{-\frac{x}{400}}}{62914560000000000000000000} + \frac{11(695910201279831022771x + 7946121679849581148800)\%e^{-\frac{x}{400}}}{61440000000000} \\ & 2x\%e^{-\frac{x}{400}} \end{aligned}$$

```
--> z1(0);
z2(0);
z3(0);
z4(0);
z5(0);
z0(0);
```

$$\left(2x\%e^{-\frac{x}{400}} - 22 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) \right) (0)$$

0.1 D1=(5/1000000000)

--> $c0(x, t) := 2 \cdot x \cdot \exp(-25 / 10000 \cdot x);$

%errorWarning: Can set maxima's working directory but cannot change it during the maxima session :

$$c0(x, t) := 2x \exp\left(\frac{-25}{10000}x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c0(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c1(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c2(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c3(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c4(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c6(x, t) := c5(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c5(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c5(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c6(x, t) := c5(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c5(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c5(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c7(x, t) := c6(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c6(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c6(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c7(x, t) := c6(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c6(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c6(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c8(x, t) := c7(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c7(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c7(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c8(x, t) := c7(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c7(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c7(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c9(x, t) := c8(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c8(x, \text{tau}), \text{tau}) - (5/100000000) \cdot \text{diff}(c8(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c8(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c8(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c9(x, t) := c8(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c8(x, \text{tau}) - \frac{5}{100000000} \left(\frac{d^2}{dx^2} c8(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c8(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c8(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $d1 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20) + c6(x, 20) + c7(x, 20) + c8(x, 20) + c9(x, 20);$

$$-198 \left(-\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{100} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - (11(42926650876698733831930599216550625946652579914232005581170795718859917661$$

--> $d1(0);$

0.1 V1=(1/50)

--> $c0(x, t) := 2 \cdot x \cdot \exp(-25 / 10000 \cdot x);$

%errorWarning: Can set maxima's working directory but cannot change it during the maxima session :

$$c0(x, t) := 2x \exp\left(\frac{-25}{10000}x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c0(x, \text{tau}),$
> $\text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c1(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c2(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c3(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c4(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c6(x, t) := c5(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c5(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c5(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c6(x, t) := c5(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c5(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c5(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c7(x, t) := c6(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c6(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c6(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c7(x, t) := c6(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c6(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c6(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c8(x, t) := c7(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c7(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c7(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c8(x, t) := c7(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c7(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c7(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c9(x, t) := c8(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c8(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c8(x, \text{tau}), x, 2) + (1/50) \cdot \text{diff}(c8(x, \text{tau}), x) + (1/20) \cdot c8(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c9(x, t) := c8(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c8(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c8(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{50} \left(\frac{d}{dx} c8(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{20} c8(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $v1 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20) + c6(x, 20) + c7(x, 20) + c8(x, 20) + c9(x, 20);$

$$-198 \left(-\frac{\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{80000} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{50} + \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{10} \right) - (11(4517065091371479321560651996717673298407093216143x + 1154925018723394536078$$

--> $v1(0);$

0.1 K1=(7/100)

--> $c0(x, t) := 2 \cdot x \cdot \exp(-25 / 10000 \cdot x);$

%errorWarning: Can set maxima's working directory but cannot change it during the maxima session :

$$c0(x, t) := 2x \exp\left(\frac{-25}{10000}x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c0(x, \text{tau}),$
> $\text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c1(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c2(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c3(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c4(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c6(x, t) := c5(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c5(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c5(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c5(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c6(x, t) := c5(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c5(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c5(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c5(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c7(x, t) := c6(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c6(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c6(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c6(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c7(x, t) := c6(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c6(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c6(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c6(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c8(x, t) := c7(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c7(x, \text{tau}), \text{tau}) - (1/2) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x, 2) + (1/5) \cdot \text{diff}(c7(x, \text{tau}), x) + (7/100) \cdot c7(x,$
> $x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c8(x, t) := c7(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c7(x, \text{tau}) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{d}{dx} c7(x, \text{tau})\right) + \frac{7}{100} c7(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $k1 : c0(x, 20) + c1(x, 20) + c2(x, 20) + c3(x, 20) + c4(x, 20) + c5(x, 20) + c6(x, 20) + c7(x, 20) + c8(x, 20);$

$$-176 \left(-\frac{x\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{\%e^{-\frac{x}{400}}}{100}}{2} + \frac{2\%e^{-\frac{x}{400}} - \frac{x\%e^{-\frac{x}{400}}}{200}}{5} + \frac{7x\%e^{-\frac{x}{400}}}{50} \right) + (11(1025264250488798002195097026822652843863677x + 165490330153440674104137894$$

--> $f;$

f

--> $k1(0);$

0.2 k2=(1/20)

6.2. Anexo M2

6.2.1. Código método HAM c0 a c5

(%i1) $D(t) := (1 - \exp(-t/(623/1000))) \cdot (3/500) + (3/1000);$

$$D(t) := \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\frac{623}{1000}}\right)\right) \frac{3}{500} + \frac{3}{1000}$$

(%i2) $c0(x, t) := 1/2 \cdot \exp(-1/100 \cdot x);$

$$c0(x, t) := \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{100} x\right)$$

(%i3) $c1(x, t) := -(11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c0(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

(%i4) $c2(x, t) := c1(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c1(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

(%i5) $c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c2(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

(%i6) $c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c3(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

(%i7) $c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c4(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

(%i13) $z0: c0(x, 8);$
 $z1: c0(x, 8) + c1(x, 8);$
 $z2: c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8);$
 $z3: c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8) + c3(x, 8);$
 $z4: c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8) + c3(x, 8) + c4(x, 8);$
 $z5: c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8) + c3(x, 8) + c4(x, 8) + c5(x, 8);$

$$\frac{\%e^{-\frac{x}{100}}}{2} - \frac{11 \left(\frac{1869\%e^{-\frac{x}{100}}}{10000000000} + \frac{(1747964000\%e^{\frac{8000}{623}} - 1869)\%e^{-\frac{x}{100}} \frac{8000}{623}}{10000000000} \right)}{2} - \frac{11 \left(\frac{1869\%e^{-\frac{x}{100}}}{10000000000} + \frac{(1747964000\%e^{\frac{8000}{623}} - 1869)\%e^{-\frac{x}{100}} \frac{8000}{623}}{10000000000} \right)}{5} + (11(225885477061078176771\%e^{26} - 277462860601542\%e^{\frac{8198}{623}} + 38424771\%e^{\frac{198}{623}})\%e^{-\frac{x}{100}-26})/;$$

!!IsIttau!positive, negative or zero?!!positive;

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8167361$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8167361$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 898409$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{4\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8167361$

$$\frac{\%e^{-\frac{x}{100}}}{2} - \frac{33 \left(\frac{1869\%e^{-\frac{x}{100}}}{10000000000} + \frac{(1747964000\%e^{\frac{8000}{623}} - 1869)\%e^{-\frac{x}{100}} \frac{8000}{623}}{10000000000} \right)}{10} + (11(225885477061078176771\%e^{26} - 277462860601542\%e^{\frac{8198}{623}} + 38424771\%e^{\frac{198}{623}})\%e^{-\frac{x}{100}-26})/;$$

6.2.2. Código para la curva h

--> $D(t) := (1 - \exp(-t/(623/1000))) \cdot (3/500) + (3/1000);$

$$D(t) := \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\frac{623}{1000}}\right)\right) \frac{3}{500} + \frac{3}{1000}$$

--> $c0(x, t) := 1/2 \cdot \exp(-1/100 \cdot x);$

$$c0(x, t) := \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{100}x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(h) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c0(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := (-h) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau}) \right) + \frac{231}{5000} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (h) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c1(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - h \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau}) \right) + \frac{231}{5000} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (h) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c2(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - h \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau}) \right) + \frac{231}{5000} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (h) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c3(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - h \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau}) \right) + \frac{231}{5000} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (h) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c4(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - h \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau}) \right) + \frac{231}{5000} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $f(x, t) := c0(x, t) + c1(x, t) + c2(x, t) + c3(x, t) + c4(x, t) + c5(x, t);$

$$f(x, t) := c0(x, t) + c1(x, t) + c2(x, t) + c3(x, t) + c4(x, t) + c5(x, t)$$

--> $\text{diff}(f(x, t), t, 2);$

//Is!t!positive,negativeorzero?!positive;

//Is!tau!positive,negativeorzero?!positive;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000tau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000tau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000htau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000htau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 218495500000000000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000tau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000tau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000tau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000htau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000htau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 218495500000000000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000tau^2(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000tau(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{tau}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

%defaultRefusing to factor polynomial 47740283520250000g16529^2(%e ^{$\frac{\text{g16529}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 2184955816736179000g16529(%e ^{$\frac{\text{g16529}}{623}$})²⁰⁰⁰ + 18690003493161(%e ^{$\frac{\text{g16529}}{623}$})²⁰⁰⁰ - 8167361;

6.2.3. Análisis sensibilidad

--> $D(t) := (1 - \exp(-t/(623/1000))) \cdot (3/500) + (3/1000);$

$$D(t) := \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\frac{623}{1000}}\right)\right) \frac{3}{500} + \frac{3}{1000}$$

--> $c0(x, t) := 1/2 \cdot \exp(-1/100 \cdot x);$

$$c0(x, t) := \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{100} x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c0(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c1(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c2(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c3(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c4(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $z5 : c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8) + c3(x, 8) + c4(x, 8) + c5(x, 8);$

!!Is!!tau!!positive, negative or zero?!!positive;

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8984097$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8984097$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{g}15659^2 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{g}15659 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{g}15659^2 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{g}15659 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

--> $D(t) := (1 - \exp(-t / (623 / 1000))) \cdot (3 / 500) + (3 / 1000);$

$$D(t) := \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\frac{623}{1000}}\right)\right) \frac{3}{500} + \frac{3}{1000}$$

--> $c0(x, t) := 1 / 2 \cdot \exp(-1 / 100 \cdot x);$

$$c0(x, t) := \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{100} x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 4) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (231 / 5000) \cdot c0(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 4) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (231 / 5000) \cdot c1(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 4) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (231 / 5000) \cdot c2(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 4) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (231 / 5000) \cdot c3(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11 / 10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1 / 4) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (231 / 5000) \cdot c4(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $z5 : c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8) + c3(x, 8) + c4(x, 8) + c5(x, 8);$

//Is//tau//positive, negative or zero?//positive;

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8984097$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8984097$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{g}15659^2 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{g}15659 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{g}15659^2 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{g}15659 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

--> $D(t) := (1 - \exp(-t/(623/1000))) \cdot (3/500) + (3/1000);$

$$D(t) := \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\frac{623}{1000}}\right)\right) \frac{3}{500} + \frac{3}{1000}$$

--> $c0(x, t) := 1/2 \cdot \exp(-1/100 \cdot x);$

$$c0(x, t) := \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-1}{100} x\right)$$

-- $c1(x, t) := -(11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c0(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c0(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c0(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c1(x, t) := \left(-\frac{11}{10}\right) \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c0(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c0(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c0(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c2(x, t) := c1(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c1(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c1(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c1(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c2(x, t) := c1(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c1(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c1(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c1(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c3(x, t) := c2(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c2(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c2(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c2(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c3(x, t) := c2(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c2(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c2(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c2(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c4(x, t) := c3(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c3(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c3(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c3(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c4(x, t) := c3(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c3(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c3(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c3(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

-- $c5(x, t) := c4(x, t) - (11/10) \cdot \text{integrate}(\text{diff}(c4(x, \text{tau}), \text{tau}) - (D(\text{tau})) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x, 2) + (1/4) \cdot \text{diff}(c4(x, \text{tau}), x) + (231/5000) \cdot c4(x, \text{tau}), \text{tau}, 0, t);$

$$c5(x, t) := c4(x, t) - \frac{11}{10} \int_0^t \frac{d}{d\text{tau}} c4(x, \text{tau}) - D(\text{tau}) \left(\frac{d^2}{dx^2} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} c4(x, \text{tau})\right) + \frac{231}{5000} c4(x, \text{tau}) d\text{tau}$$

--> $z5 : c0(x, 8) + c1(x, 8) + c2(x, 8) + c3(x, 8) + c4(x, 8) + c5(x, 8);$

//Is//tau//positive, negative or zero?//positive;

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8984097$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $525143118722750000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184963984097969000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690038424771 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 8984097$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{tau}^2 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{tau} \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{tau}}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{g}15659^2 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{g}15659 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} - 81673617$

%defaultRefusing to factor polynomial $47740283520250000\text{g}15659^2 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 2184955816736179000\text{g}15659 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} + 18690003493161 \left(\%e^{\frac{\text{g}15659}{623}}\right)^{2000} - 81673617$