

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Solución analítica de la ecuación convección-difusión-reacción fraccional con el método de análisis de homotopía

 por

Jorge Otto Presmitta

Profesor guía

Dr. Emilio Cariaga L.

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco, 9 de abril de 2023

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor guía:

Dr. Emilio Cariaga L.

Profesor informante:

.....

Dr. Andrés Contreras T.

Profesor informante:

Dr. Alfredo Calderón C.

Director del Programa (Ministro de fe):

Dr. Jacobo Hernández Montelongo

Temuco, 9 de abril de 2023

Perfil de egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional postgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas dinámicos y evolutivos. Específicamente:

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes de sistemas dinámicos y evolutivos.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Desarrolla y/o utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos y evolutivos.

Comunica información científico-matemática con rigurosidad técnica y claridad en el ámbito de la matemática aplicada.

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente a Lucy Presmitta y Jorge Otto, mis padres, quienes me apoyaron incondicionalmente en esta nueva etapa como estudiante del magíster.

Abstract

This paper focuses on the application of the homotopy analysis method (HAM) to convection-diffusion (CDE) models, with spatial dependence and convection-diffusion-reaction (CDRE), with temporal decay rate. Both models were considered with fractional order in the temporal variable. Since there is no unified criterion on the definition of fractional derivative, firstly a bibliographical study of the definitions of fractional derivative present in the literature is made in order to choose the definition that best fits our models. In this process, it is chosen to work with the definition of conformal fractional derivative, whose operator, which in comparison with its predecessors (Riemann-Liouville and Caputo), inherits quite a few properties from the usual derivative. Then, the fractional models are computationally implemented in order to analyze the behavior of the solutions obtained by the HAM for different fractional orders. Finally, the solutions obtained by the HAM are validated, comparing against another analytical solution, available in the literature, which uses the Laplace transform method.

Resumen

El presente trabajo se centra en la aplicación del método de análisis de homotopía (HAM) a los modelos convección-difusión (CDE), con dependencia espacial y convección-difusión-reacción (CDRE), con tasa de decaímiento temporal. Ambos modelos serán considerados con orden fraccional en la variable temporal. Debido a que no existe un criterio unificado sobre de la definición de derivada fraccional, en primer lugar se hace un estudio bibliográfico de las definiciones de derivada fraccional presentes en la literatura con el objetivo de elegir la definición que mejor se ajuste a nuestros modelos. En este proceso, se elige trabajar con la definición de derivada fraccional conforme, cuyo operador, que en comparación con los predecesores (Riemann-Liouville y Caputo), hereda bastante propiedades de la derivada usual. Luego, se implementan computacionalmente los modelos fraccionarios con el fin de analizar el comportamiento de las soluciones obtenidas por el HAM para distintos ordenes fraccionarios. Finalmente se validan las soluciones obtenidas por el HAM, comparando contra otra solución analítica, disponible en la literatura, la cual utiliza el método de la transformada de Laplace.

Índice

1.	1. Introducción					
2.	Obj	etivos		5		
3.	Ecu	Ecuaciones diferenciales fraccionarias				
	3.1.	Funció	ón Gamma	6		
	3.2.	Funció	ón Beta	7		
	3.3.	Funció	ón de Mittag-Leffler	7		
	3.4.	Funció	ón Error	8		
3.5. La Función Hipergeométrica Confluente		nción Hipergeométrica Confluente	8			
	3.6.	La der	rivada fraccionaria de Riemann-Liouville	12		
	3.7.	La der	rivada fraccionaria de Caputo	18		
	3.8.	La der	rivada fraccionaria conforme	26		
	3.9.	Model	os CDE - CDRE	30		
4.	Mét	odo d	e análisis de homotopía	33		
	4.1.	Conce	pto de homotopía	33		
4.2. Formulación del método de análisis homotópico		lación del método de análisis homotópico	38			
	4.3.	Métod	lo de la transformada de Laplace fraccional	39		
	4.4.	Un nu	evo enfoque del método de la transformada de Laplace	42		
5.	Apl	icaciór	n del HAM	45		
	5.1.	Model	o 1: ecuación de convección-difusión fraccional con coeficientes que dependen del			
		espaci	o (CDE)	46		
		5.1.1.	Ecuación gobernante	46		
		5.1.2.	Fórmula iterativa	47		
		5.1.3.	Parámetros de entrada	48		
		5.1.4.	Selección del parámetro de control de convergencia	48		
		5.1.5.	Efecto del orden fraccional y otros parámetros sobre el transporte de contami-			
			nantes	50		
	5.2.	Model	o 2: ecuación de convección-difusión fraccional con coeficiente reactivo dependiente			
		del tie	mpo (CDRE)	54		
		5.2.1.	Ecuación gobernante	55		
		5.2.2.	Fórmula iterativa	55		
		5.2.3.	Parámetros de entrada	56		

		5.2.4.	Selección del parámetro de control de convergencia	57
		5.2.5.	Efecto del orden fraccional y otros parámetros sobre el transporte de contami-	
			nantes	58
Ę	5.3.	Impac	to del número de términos del HAM	62
Ę	5.4.	Valida	ción de los modelos	63
		5.4.1.	Validación del modelo CDE fraccionario	63
		5.4.2.	Validación del modelo CDRE fraccionario	66
6. 1	Disc	cusione	es	70
(6.1.	Depen	dencia del h_0	70
(6.2.	Orden	de aproximación del HAM	71
(6.3.	Eleccio	ón de la definición de derivada fraccional	71
7. (Con	clusio	nes	72
8. 1	Bib	liograf	ía	73
9. ⊿	Ane	xos		75
ę	9.1.	Código	os de los experimentos computaciones	75
		9.1.1.	Selección del parámetro de convergencia h_0	75
		9.1.2.	Aplicación del HAM a la CDE con derivada fraccional conforme $\ \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	76
		9.1.3.	Aplicación del HAM a la CDRE con derivada fraccional conforme	77
		9.1.3. 9.1.4.	Aplicación del HAM a la CDRE con derivada fraccional conforme Solución exacta vía transformada de Laplace	77 78

Índice de figuras

1.	Derivada de Riemann-Liouville de la función $f(x) = x^4$ con diferentes ordenes fraccionarios	16
2.	Comparación entre la derivada media de Riemann-Liouville y de Caputo de la función	
	f(x) = cos(x)	22
3.	Comparación entre la derivada media de Riemann-Liouville, de Caputo y conforme de	
	la función $f(x) = cos(x)$	29
4.	Deformación continua de la homotopía	34
5.	Deformación continua de la solucion $y(x;q)$ de la ecuación de homotopía (17)	35
6.	Curva h_0 para la solución HAM de la ecuación (54)	49
7.	Curva h_0 correspondiente a diferentes valores de orden fraccionario α	49
8.	Variación de la fuerza de concentración con orden fraccional variable y un tiempo fijo	
	t = 1 yr	50
9.	Distribución de la concentración para diferentes dominios de tiempo y orden fraccionario	
	fijo $\alpha=0.2.$	51
10.	Distribución de la concentración de contaminantes para diferentes valores del coeficiente	
	de difusión y tiempo fijo $t = 1$ yr	52
11.	Distribución de la concentración de contaminantes para diferentes valores del coeficiente	
	de convección y tiempo fijo $t = 1$ yr	53
12.	Distribución de la concentración de contaminantes para diferentes valores del parámetro	
	a, orden fraccionario $\alpha = 0.7$ y tiempo fijo $t = 1$ yr	54
13.	Curva h_0 para la solución HAM de la ecuación (63)	57
14.	Curva h_0 correspondiente a diferentes valores de orden fraccionario α	58
15.	Concentración de contaminantes vs distancia para orden fraccional variable y un tiempo	
	fijo $t = 20$ hr	59
16.	Efecto de la tasa de descomposición sobre la distribución de la concentración para un	
	orden fraccional fijo $\alpha = 0.7$ y un tiempo fijo $t = 25$ hr	60
17.	Efecto del parámetro γ sobre la distribución de la concentración para un orden fraccional	
	fijo $\alpha=0.7$ y un tiempo fijo $t=25$ hr	61
18.	Efecto del parámetro μ sobre la distribución de la concentración para un orden fraccional	
	fijo $\alpha = 0.7$ y un tiempo fijo $t = 25$ hr	61
19.	Convergencia de la solución del modelo CDE a través del HAM para $\alpha = 0.7, h_0 = -0.3$	
	y tiempo fijo $t = 1$ yr	62
20.	Convergencia de la solución del modelo CDRE a través del HAM para α = 0.7, h_0 =	
	-0.3 y tiempo fijo $t = 1$ yr	62

21.	Comparación entre la solución HAM y la solución exacta para $\alpha = 0.1$	64
22.	Comparación entre la solución HAM y la solución exacta para $\alpha = 0.1$	65
23.	Comparación entre la solución HAM y la solución exacta vía método de transformada	
	de Laplace para diferentes órdenes fraccionarios	67
24.	ZOOM de la gráfica comparativa entre la solución HAM y la solución vía método trans-	
	formada de Laplace.	68
25.	Comparación entre la solución HAM y la solución exacta para diferentes valores tem-	
	porales	69
26.	Comparación de la concentración para diferentes valores de h_0	70
27.	Error MATLAB	71

Índice de tablas

1.	Algunos ejemplos de derivada de Riemann-Liouville de funciones elementales	18
2.	Algunos ejemplos de derivada de Caputo de funciones elementales. \ldots \ldots \ldots \ldots	25
3.	Parámetros de entrada	48
4.	Parámetros de entrada	56
5.	Asignación del parámetro de convergencia para cada orden fraccionario. \ldots	64
6.	Asignación del parámetro de convergencia para cada orden fraccionario. \ldots	67

1. Introducción

El nacimiento del cálculo de orden fraccionario tuvo lugar después de la publicación, en 1675, de un documento de Leibniz, donde aparecía el símbolo $\frac{d^n y}{dx^n}$, el cual se refiere a la derivada de orden n de la función y respecto de x, donde n es un número natural [6]. Sin embargo, ¿Tendrá sentido extender los valores de n al conjunto de los racionales, irracionales o complejos? La primera persona de la que se tiene certeza que se planteó este problema fue l'Hopital, quien el 30 de septiembre de 1695 le plantea a Leibniz en una carta

$$\partial Que$$
 sucedería si n fuera $\frac{1}{2}$?

Leibniz le contesta de manera intuitiva:

"Esto conduciría aparentemente a una paradoja de la cual algún día serán extraídas consecuencias muy útiles".

Al parecer Leibniz estaba en lo correcto, ya que si bien es cierto la primera aplicación del cálculo fraccionario fue en 1823 de la mano de Abel (movimiento tautócrono), no fue hace un poco más de treinta años que el análisis fraccionario se reveló como una herramienta de gran potencia en la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales. La derivada de orden no entero tienen aplicaciones en el modelamiento de sistemas físicos con capacidad de modelar fenómenos con memoria como problemas de difusión, viscoelasticidad, movimiento Browniano, hidrodinámica, mecánica, biología, fenómenos fractales, entre otros [6].

Un problema latente en el mundo de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario es encontrar las soluciones analíticas. Es importante destacar que los métodos tradicionales para resolver ecuaciones diferenciales no funcionan si el orden el fraccionario, y actualmente existen pocos métodos que entregan una solución analítica a este tipo de problemas, entre los cuales destacamos el uso de las transformadas de Laplace y de Fourier, con sus respectivas adaptaciones para ordenes fraccionarios. Es en este punto donde el método de análisis de homotopía, más conocido como HAM, propuesto por el matemático Shijun Liao en 1992 [10], aparece como una alternativa bastante practica, ya que es un método analítico, formulado desde las teorías de la topología algebraica, altamente eficiente para resolver ecuaciones diferenciales no lineales y de fácil implementación computacional.

Motivados por la auge de los operadores fraccionarios y la simplicidad del HAM, este trabajo tendrá por finalidad, resolver la ecuación de convección-difusión-reacción a través del método de análisis de homotopía. En este camino, será critico comprobar si efectivamente la solución analítica vía HAM posee una buena concordancia, por lo que para ello se comparará esta solución contra otra solución analítica obtenida por otro método.

A continuación, describimos brevemente los ejes temáticos de esta tesis: El primer eje consiste en una breve introducción de lo que son las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Para ello, se comienza con un estudio bibliográfico de las distintas definiciones de derivada fraccionaria que existen. Debido a la extensión de definiciones que podemos encontrar en la literatura actual, hemos decidido enfocar el estudio en solo tres. La primera es la definición que desarrolló Riemann-Liouville, en el año 1847, la cual define el operador fraccionario como la derivada entera de una cierta integral fraccionaria. Esta definición se extiende para derivadas con órdenes reales y complejos, pero sólo utilizaremos órdenes reales. La segunda definición pertenece a la desarrollada por Caputo en el año 1967, la cual es un mejoramiento de la derivada de Riemann-Liouville a través de la sustración de un polinomio de Taylor. Posteriormente, estudiaremos una definición más moderna de derivada fraccional, la cual tiene por nombre derivada fraccional conforme, desarrollada en el año 2013. Esta definición a diferencia de las otras mencionadas anteriormente, posee propiedades similares a la derivada clásica o tradicional, lo cual simplifica bastante las operaciones. Para finalizar este eje, definiremos lo que son las ecuaciones diferenciales fraccionarias y presentaremos los dos modelos que se desarrollarán en esta tesis. El segundo eje consiste en describir las ideas básicas del método HAM y además se presenta la transformada de Laplace de orden fraccionario. En el último eje se desarrollan los modelos fraccionarios, los cuales serán resueltos por el HAM. Luego analizaremos la convergencia y finalmente se validan las soluciones obtenidas por el HAM, comparando contra otra solución analítica, disponible en la literatura, la cual utiliza el método de la transformada de Laplace.

2. Objetivos

Objetivo general

Estudiar la aplicación del método de análisis homotópico a una ecuación diferencial fraccionaria.

Objetivos específicos

- 1. Evaluar la aplicabilidad del método de análisis homotópico a una ecuación diferencial fraccionaria.
- 2. Resolver una ecuación diferencial fraccionaria tipo utilizando el método de análisis homotópico.
- 3. Comparar el método de análisis homotópico con otros métodos analíticos y/o numéricos, para una ecuación diferencial fraccionaria.

3. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

Para introducirnos en el mundo de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, primero debemos aprender que son los operadores fraccionarios. En esta sección comenzaremos definiendo algunas funciones especiales que juegan un rol crítico en la teoría de los operadores fraccionarios. Posteriormente expondremos de manera elemental las propiedades fundamentales de la derivada de Riemann-Liouville (1874) y de la derivada de Caputo (1963), las cuales son las dos definiciones de derivadas fraccionarias más estudiadas en la literatura, ilustrando con algunos ejemplos y gráficas comparativas. Posteriormente, hablaremos acerca de una nueva definición de derivada fraccionaria, cuya propiedades son similares a la derivada usual, la cual se conoce como derivada conforme (2013) [8]. Finalmente, definiremos lo que es una ecuación diferencial fraccionaria y presentaremos los dos modelos fraccionarios que trabajaremos en esta tesis.

Las demostraciones para las cuales no se informa una fuente externa, es porque son de propia autoría.

3.1. Función Gamma

Definimos la integral de Euler de segundo tipo como [15]:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \qquad z \in \mathbb{C} \text{ y } \Re(z) > 0$$

también conocida como función gamma. Esta integral converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ para la cual $\Re(z) > 0$ (la parte real de z). La función gamma puede ser extendida a todo el plano complejo, excepto para los números enteros negativos y al cero. En general, si $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces se cumple que:

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Por otra parte, otra propiedad que será bastante útil en este trabajo es la siguiente:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{z-1+1} e^{-t} dt$$
 (1)

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \tag{2}$$

Integrando (2) por partes, tenemos que

$$\Gamma(z+1) = -t^{z}e^{-t}\big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} zt^{z-1}e^{-t}dt$$
(3)

$$\Gamma(z+1) = z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{4}$$

Es fácil notar que la integral de (4) no es nada más que la definición de $\Gamma(z)$, por lo tanto la formula se reduce a

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z). \tag{5}$$

Para profundizar más sobre la función gamma ver [15].

3.2. Función Beta

Definimos la función beta también conocida como la integral de Euler de primer tipo como [15]:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-t} dt \qquad \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{C} \ \mathrm{y} \ \Re(\alpha) \,, \Re(\beta) > 0$$

Esta función se relaciona con la función Gamma de la siguiente manera:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Para profundizar más sobre la función beta ver [15].

3.3. Función de Mittag-Leffler

Mientras que la función Gamma es una generalización de los factoriales, la función Mittag-Leffler es una función compleja que depende de los parametros α y β la cual es una generalización de la función exponencial. Esta puede definirse mediante la siguiente serie [15]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha \cdot k + \beta)} \qquad \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ \mathrm{y} \ \Re(\alpha) \,, \Re(\beta) > 0$$

Con la definición anterior, podemos establecer los siguientes ejemplos de interés:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

3.4. Función Error

La función error está definida por [15]

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-t^{2}} dt \qquad z \in \mathbb{C}$$

Es interesante mencionar las siguientes propiedades:

$$\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$$
$$\operatorname{erfc}(0) = 1$$
$$\operatorname{erfc}(+\infty) = 0$$
$$\operatorname{erfc}(-z) = 2 - \operatorname{erfc}(z)$$
$$\int_{0}^{\infty} \operatorname{erfc}(z) \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

3.5. La Función Hipergeométrica Confluente

La función

$${}_{1}F_{1}(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{z^{k}}{k!}$$

es llamada hipergeométrica confluente o función Kummer [15]. La serie converge para $a, b, z \in \mathbb{C}$, $-b \notin \mathbb{N}_0, |z| < \infty.$

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Sea $f\in L^1([a,x])$ (esto significa que |f| es integrable en (a,x)). Definimos la función

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

la cual cumple que $I_a^1 f(a) = 0$.

Ahora definimos $I_a^2 f(x)$ de la siguiente manera:

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} f(t) \cdot dt$$
$$= \int_a^x \int_a^{t_1} f(t) \cdot dt \cdot dt_1$$

Como f es continua en la región $[a, x] \times [a, x]$ con x > t podemos aplicar el teorema de Fubini, por lo que la expresión anterior se puede reescribir como :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^{t_1} f(t) \cdot dt_1 \cdot dt = \int_a^x f(t) \cdot dt \int_t^x dt_1$$
$$= \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

De manera similar,

$$\begin{split} I_a^3 f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} f(t) \cdot dt \\ &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} f(t) \cdot dt \cdot dt_2 \\ &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1 - t) \cdot f(t) \cdot dt \\ &= \int_a^x f(t) \cdot dt \int_t^x (t_1 - t) \cdot dt_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x - t)^2 f(t) dt \end{split}$$

Generalizando para $n \in \mathbb{N}$, obtenemos la n-ésima integral repetida de la función o también conocida por otros autores como la fórmula de Cauchy

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t) dt \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}.$$
 (6)

Ahora notemos que la última expresión es válida para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, por lo tanto para extender el concepto de integral a ordenes no enteros, procedemos a quitarle la parte discreta a (6) a través de la función gamma, la cual generaliza los factoriales. De este modo, la expresión (6) puede ser escrita como:

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

donde $(\alpha - 1)! = \Gamma(\alpha)$. Finalmente, podemos extender la definición de integral fraccionaria de orden no entero de la siguiente manera.

Definición 3.1. ([16]). Sea $f \in L^1(a, b)$. Definimos la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ de f como:

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \qquad (\forall x > a).$$

$$\tag{7}$$

Es posible encontrar en diversas referencias la integral (7) por el nombre de integral fraccionaria por la izquierda de Riemann-Liouville. También existe una integral alternativa menos frecuente, llamada integral fraccionaria por la derecha, definida como:

$$I^{\alpha}_{-b}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \qquad (\forall x < b).$$

Proposición 1. ([16]). Sean $f, g \in L^1(a, b)$ $y \alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ entonces

$$I^{\alpha}_{a}[\gamma f + \delta g] = \gamma I^{\alpha}_{a}f + \delta I^{\alpha}_{a}g \qquad \forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Soluci'on.

$$\begin{split} I_a^{\alpha}[\gamma f + \delta g] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\gamma f(t) + \delta g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(p)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \gamma I_a^{\alpha} f + \delta I_a^{\alpha} g \qquad \forall \gamma, \delta \in \mathbb{R} \end{split}$$

	_	

Teorema 3.1. Sea $f \in L^1(a, b)$ y $\alpha, \beta > 0$ entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville cumple con la siguiente propiedad:

$$I^{\alpha}_{a}I^{\beta}_{a}f = I^{\alpha+\beta}_{a}f$$

Soluci'on.

$$\begin{split} I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x \frac{f(t) \cdot I_a^{\beta}}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{p-1}} \left(\frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t \frac{f(y)}{(t-y)^{\beta-1}} dy \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^t (t-y)^{\beta-1} \cdot f(y) \cdot dy \right) dt \end{split}$$

Aplicando teorema de Fubini

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(y) \left(\int_y^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot (t-y)^{\beta-1} \cdot dt \right) dy$$

Haciendo u = $\frac{t-y}{x-y} \rightarrow dt = du \cdot (x-y)$

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(y) \left(\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \cdot (t-y)^{\alpha+\beta-1} \cdot u^{\beta-1} du \right) dy$$
$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(y) (t-y)^{\alpha+\beta-1} dy \left(\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \cdot u^{\beta-1} du \right)$$

$$pero \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \cdot u^{\beta-1} du = B(\alpha,\beta)$$

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha,\beta) \int_a^x f(y)(t-y)^{\alpha+\beta-1} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(y)(t-y)^{\alpha+\beta-1} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(y)(t-y)^{\alpha+\beta-1} dy$$

$$= I_a^{\alpha+\beta} f$$

- 6	_	_	ъ.
- 6			

3.6. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Anteriormente hemos visto como a partir de la *n*-ésima integral repetida se construyó lo que hemos denominado la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. A continuación veremos cómo a partir de la definición de integral fraccionaria se construye una primera aproximación de lo que llamaremos derivada fraccionaria.

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville la denotaremos como ${}^{\text{RL}}D^{\alpha}$, en donde $\alpha \in \mathbb{R}$ representa el orden de la derivada. Por otra parte, este operador lo entederemos en simples palabras como la derivada entera de una cierta integral fraccionaria, cuya función debe pertenecer al espacio $L^1(a, b)$.

Esta sección se centrará básicamente en mencionar las propiedades más relevante de la derivada de fraccionaria de Riemann-Liouville, así como también ilustrar con algunos ejemplos.

Definición 3.2. ([16]). Sea $f \in L^1(a, b)$ y $n = [\alpha] + 1$ (donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\alpha]$ es la parte entera de α). La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \ge 0$) de una función se define como:

$${}^{\scriptscriptstyle RL}D^{\alpha}_{a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \qquad (\forall x > a).$$
(8)

donde $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ es la derivada usual.

Si $0 \leq \Re(\alpha) \leq 1$ entonces

$${}^{\scriptscriptstyle RL}D^{\alpha}_a f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-\Re(\alpha)}} dt \qquad (\forall x > a).$$

Proposición 2. ([16]). Sean $f, g \in L^1(a, b)$ $y \alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \ge 0$) entonces

$${}^{\scriptscriptstyle RL}D^{\alpha}_a[\gamma f + \delta g] = \gamma \cdot {}^{\scriptscriptstyle RL}D^p_{\alpha} + \delta \cdot {}^{\scriptscriptstyle RL}D^{\alpha}_a \qquad \forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Solución.

$${}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}[\gamma f + \delta g] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{\gamma f(t) + \delta g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

$$= \frac{\gamma}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt + \frac{\delta}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

$$= \gamma \cdot {}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha} + \delta \cdot {}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha} \qquad \forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

с	_	_	

El siguiente resultado refleja que, análogamente a lo que ocurre en el caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann - Liouville es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria [14].

Proposición 3. ([16]). Sean $f \in L^1(a, b)$ $y \alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re(\alpha) \ge 0)$ entonces $D^{\alpha}_a(I^{\alpha}_a f) = f(x)$

Solución. Intercambiando el orden de integración y haciendo un cambio de variable obtenemos que:

$${}^{\scriptscriptstyle \mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(I^{\alpha}_{a}f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_{a}^{t} \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} \, ds \, dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} f(s) \int_{s}^{x} (t-s)^{\alpha-1} (x-t)^{n-\alpha-1} \, dt \, ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} f(s) (x-s)^{n-1} \, ds$$
$$= \frac{d^{n}}{dx^{n}} I^{n}_{a} f(x)$$
$$= f(x)$$

El próximo resultado, nos ayudará a simplificar los cálculos a la hora de buscar la derivada fraccional de Riemann-Liouville de una función potencial.

Proposición 4. Sean $f \in L^1(a, b)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \ge 0$) $y \beta > 0$. Entonces se verifica que:

$${}^{\scriptscriptstyle RL}D^{\alpha}_{a}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} \cdot (x-a)^{\beta-\alpha}$$
(9)

Soluci'on.

$${}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \int_a^x \frac{(t-a)^{\beta}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \int_a^x (t-a)^{\beta} \cdot (x-t)^{n-1-\alpha} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \int_a^x (t-a)^{\beta} \cdot (x-t)^{n-1-\alpha} \cdot dt$$

Haciendo $y = \frac{t-a}{x-a} \rightarrow dt = (x-a) \cdot dy$

$$\begin{split} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot \int_0^1 (x-a)^{n-1-\alpha} \cdot (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot ((x-a) \cdot y)^{\beta} \cdot (x-a) \cdot dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} ((x-a)^{\beta+n-\alpha}) \cdot \int_0^1 (1-y)^{n-1-p} \cdot y^{\beta} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{(\beta+n-p)!}{(\beta+n-\alpha-n)!} \cdot (x-a)^{\beta+n-\alpha-n} \cdot \int_0^1 (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot y^{\beta} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{(\beta+n-\alpha)!}{(\beta-\alpha)!} \cdot (x-a)^{\beta-\alpha} \cdot \int_0^1 (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot y^{\beta} dy \end{split}$$

Notemos que la integral $\int_0^1 (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot y^\beta dy~$ es la función beta

$$B(n-\alpha,\beta+1)$$

y podemos relacionarla con la función gamma mediante:

$$B(n-p,\beta+1) = \frac{\Gamma(n-p) \cdot \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p+\beta+1)}$$

por lo tanto, reemplazando la integral por esta última expresión, tenemos que:

$${}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{(\beta+n-\alpha)!}{(\beta-\alpha)!} \cdot (x-a)^{\beta-p} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha) \cdot \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}$$
$${}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \cdot (x-a)^{\beta-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha) \cdot \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}$$

simplificando, finalmente tenemos que

$${}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \qquad (\forall x>a)$$

Proposición 5. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para f(x) = k, donde k es una constante arbitraria distinta de cero y $\alpha \ge 0$ es

$${}^{\scriptscriptstyle RL}D^{\alpha}_a(k) = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} \qquad (\forall x > a).$$

Solución.

$${}^{\rm RL}D^{\alpha}_{a}(k) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} \frac{k}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$
$${}^{\rm RL}D^{\alpha}_{a}(k) = \frac{k}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-1-\alpha} dt$$

Haciendo cambio de variable $u = (x-t) \rightarrow du = -dt$

$$\label{eq:RL} \begin{split} {}^{\mathrm{RL}}D_a^\alpha(k) &= \frac{-k}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{x-a}^0 u^{n-\alpha-1}du \\ {}^{\mathrm{RL}}D_a^\alpha(k) &= \frac{-k}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n} \left.\frac{u^{n-\alpha-1+1}}{n-\alpha-1+1}\right|_{x-a}^0 \\ {}^{\mathrm{RL}}D_a^\alpha(k) &= \frac{-k}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n} \left.\frac{u^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_{x-a}^0 \\ {}^{\mathrm{RL}}D_a^\alpha(k) &= \frac{-k}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dx^n}\frac{-(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \\ {}^{\mathrm{RL}}D_a^\alpha(k) &= \frac{k}{\Gamma(n-\alpha)(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha} \end{split}$$

Utilizando que $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z),$ la última expresión resulta

$${}^{\rm RL}D^{\alpha}_{a}(k) = \frac{k}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} (x-a)^{n-\alpha}$$

Calculando la n-ésima derivada (en el sentido usual) de $(x - a)^{n-\alpha}$ y reemplanzado en la última expresión, tenemos:

$${}^{\mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(k) = \frac{k}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{(n-\alpha)!(x-a)^{-\alpha}}{(-\alpha)!}$$
$${}^{\mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(k) = \frac{k}{\Gamma(1+n-\alpha)} \frac{(n-\alpha)!(x-a)^{-\alpha}}{(-\alpha)!}$$

Usando nuevamente propiedades de la función gamma, la última expresión finalmente queda como:

$${}^{\rm RL}D^{\alpha}_{a}(k) = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} \qquad (\forall x > a).$$

$$\tag{10}$$

Este resultado nos permite concluir que la derivada de Riemann-Liouville de una función constante es distinta de 0 para $\alpha \ge 0$.

La siguiente gráfica representa la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de la función $f(x) = x^4$ para distintos ordenes fraccionarios.



Figura 1: Derivada de Riemann-Liouville de la función $f(x) = x^4$ con diferentes ordenes fraccionarios

Podemos notar en la figura (1) que cuando α es una número natural entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville coincide con la derivada usual. Más formalmente, podemos escribir $n = \alpha + 1$ entonces

$${}^{\mathrm{RL}}D_a^{\alpha}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} I_a^{(\alpha+1)-1}f(x)$$
$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} I_a f(x)$$
$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha+1} I_a f(x)$$
$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} f(x)$$

donde $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$ es la derivada en el sentido usual.

No menos importante, también podemos apreciar en la gráfica que se cumple que:

$${}^{\rm RL}D^0_a f(x) = f(x)$$

En la proposición 5, calculamos la derivada de Riemann-Liouville para una función constante. Se puede apreciar que el cálculo resulto ser bastante extenso, pero si utilizamos (10), podemos llegar al mismo resultado solo haciendo tender β a 0 por la derecha, es decir

$$\label{eq:RL} \begin{split} {}^{\mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(k) &= k \lim_{\beta \to +0} {}^{\mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ {}^{\mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(k) &= k \lim_{\beta \to +0} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ {}^{\mathrm{RL}}D^{\alpha}_{a}(k) &= \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} \end{split}$$

	$^{RL}D_0^{lpha}$	$^{RL}D_0^{rac{1}{4}}$	$^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}$	$^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} \cdot {^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}}$
f(x) = k	$\frac{k}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}$	$\frac{k}{\Gamma(\frac{3}{4})\cdot x^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{k}{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot x^{\frac{1}{2}}}$	0
$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}x^{\frac{1}{2}-\alpha}$	$rac{\sqrt{\pi}}{1,8182}x^{rac{1}{4}}$	0.8862	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
f(x) = x	$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}x^{1-\alpha}$	$1,\!0881\cdot x^{\frac{3}{4}}$	$1,\!1284\cdot x^{\frac{1}{2}}$	1
$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(\frac{5}{2}-\alpha)}x^{\frac{3}{2}-\alpha}$	$0,6620\sqrt{\pi}\cdot x$	$1,3292 \cdot x$	$\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = x^2$	$\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}x^{2-\alpha}$	$1,\!2435\cdot x^{\frac{7}{4}}$	$1,5045\cdot x^{\frac{3}{2}}$	$2 \cdot x$
$f(x) = e^{\lambda x}$	$x^{-\alpha} \cdot E_{1,1-\alpha}(\lambda x)$	$x^{-\frac{1}{4}} \cdot E_{1,\frac{3}{4}}(\lambda x)$	$x^{-\frac{1}{2}} \cdot E_{1,\frac{1}{2}}(\lambda x)$	$\lambda \cdot e^x$

Tabla 1: Algunos ejemplos de derivada de Riemann-Liouville de funciones elementales.

Fuente: Elaboración propia.

3.7. La derivada fraccionaria de Caputo

La derivada de Caputo se define a través de la derivada fraccionaria de Riemann - Liouville.

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(x) = \left({}^{RL}D_{a}^{a}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right]\right)(x)$$

(La demostración puede encontrarla en [9] página 93).

La derivada de Caputo puede considerarse una regularización de la derivada de Riemann-Liouville efectuada mediante la sustracción de una polinomio de Taylor, a través de la cual se obtienen ventajas importantes. También es importante destacar que este operador a diferencia del operador de Riemann-Liouville esta definido sobre el espacio AC[a, b] que representa el espacio todas las funciones absolutamente continuas (una función absolutamente continua es la integral definida sobre (a, b) de su derivada). Uno de los resultados que veremos en esta sección serán las diferencias y similitudes del operador de Riemann-Liouville con el operador de Caputo, así como también ilustrar con algunos ejemplos.

Observación 3.1. Si $f \in AC[a, b]$ entonces se tiene la siguiente relación.

$$f(x) \in AC[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \qquad f'(t) \in L^1[a,b]$$

Lema 3.1. ([16]). El espacio $AC^n[a, b]$ consta de aquellas y solo aquellas funciones f(x) las cuales se pueden representar

$$f(x) = I_a^n \varphi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

donde $\varphi(x) \in L^1(a,b)$ y $c_k = \frac{f^k(a)}{k!}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ son constante arbitarias.

Definición 3.3. ([16]). Sea $f \in AC^n[a,b]$ $y \ n = [\alpha] + 1$ (donde $n \in \mathbb{N}_0$ $y \ [\alpha]$ es la parte entera de α). La derivada fraccionaria de Caputo de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \ge 0$) de una función se define como:

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \qquad (\forall x > a).$$
(11)

donde $f^{(n)}$ es la enésima derivada usual.

Consideremos los siguientes casos particulares:

Si $0 \leq \Re(\alpha) \leq 1$ y $f \in AC[a, b]$ entonces

$$^{c}D_{a}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ entonces ${}^cD_a^0f(x) = f(x) y {}^cD_a^nf(x) = f^n(x)$, es decir, cuando n es un número natural, la derivada de Caputo coincide con la derivada usual.

Proposición 6. ([16]).

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}[\gamma f + \beta g] = \gamma \cdot {}^{c}D_{a}^{\alpha} + \beta \cdot {}^{c}D_{a}^{\alpha} \qquad \forall \gamma, \beta \in \mathbb{R}.$$

Soluci'on.

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}[\gamma f + \beta g] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{\gamma f^{(n)}(t) + \beta g^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$
$$= \frac{\gamma}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt + \frac{\beta}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{g^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$
$$= \gamma \cdot {}^{c}D_{a}^{\alpha} + \beta \cdot {}^{c}D_{a}^{\alpha} \quad \forall \gamma, \beta \in \mathbb{R}.$$

Observación 3.2. ([16]). Sea $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ y f(x) es una función para la cual la derivada de Caputo de orden $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) \ge 0)$ existe junto con la derivada fraccional de Rieman-Liouville entonces podemos establecer las siguientes relaciones.

1.
$${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(x) = {}^{RL}D_{a}^{\alpha}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(a)(x-a)^{k-a}}{\Gamma(k+1-a)} \quad (\forall x > a)$$

2. Si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ entonces ${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(x) = D_{a}^{\alpha}f(x)$

3. Si
$$0 < \Re(\alpha) < 1$$
 tenemos que ${}^{c}D_{a}^{\alpha}f(x) = {}^{RL}D_{a}^{\alpha}f(x)$ cuando $f(a) = 0$

Proposición 7. La derivada de Caputo de $f(x) = (x - a)^{\beta}$, con $\beta > 0$ es

$${}^{c}D^{p}_{a}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Solución.

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{x} \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{x} \frac{(t-a)^{(\beta)^{(n)}}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{x} \frac{\beta!}{(\beta-n)!} \cdot (t-a)^{\beta-n} \cdot (x-t)^{n-1-\alpha} \cdot dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-n)!} \cdot \int_{a}^{x} (t-a)^{\beta-n} \cdot (x-t)^{n-1-\alpha} \cdot dt$$

Haciendo $y = \frac{t-a}{x-a} \rightarrow dt = (x-a) \cdot dy$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-n)!} \cdot \int_0^1 (x-a)^{n-1-\alpha} \cdot (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot ((x-a) \cdot y)^{\beta-n} \cdot (x-a) \cdot dy$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-n)!} \cdot (x-a)^{n-\alpha-1+\beta-n+1} \cdot \int_0^1 (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot y^{\beta-n} dy$$

Notemos que la integral $\int_0^1 (1-y)^{n-1-\alpha} \cdot y^{\beta-n} dy$ es la función beta $B(n-\alpha, \beta-n+1)$

y podemos relacionarla con la función gamma mediante:

$$B(n-\alpha,\beta-n+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\cdot\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)}$$

por lo tanto, reemplazando la integral por esta última expresión, tenemos que:

$${}^{c}D_{0}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\beta!}{(\beta-n)!} \cdot (x-a)^{n-\alpha-1+\beta-n+1} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha) \cdot \Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1)}$$

pasando los factoriales a funciones gamma, finalmente tenemos que

$${}^{c}D_{0}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} \cdot (x-a)^{\beta-\alpha}$$

Si ponemos atención al resultado obtenido anteriormente, podemos verificar que se cumple la relación número 2 de la observación anterior, es decir, las derivadas de Riemann-Liouville y de Caputo van a coincidir para funciones del tipo $(x - a)^{\beta}$

Observación 3.3. ([16]). Sea
$$\alpha \in \mathbb{C}$$
 ($\Re(\alpha) > 0$), $\beta \in \mathbb{N}$ $y \ n = [\Re(\alpha)] + 1$ entonces ${}^{c}D_{a}^{\alpha}(x^{\beta}) = 0$ si
 $n - 1 < \alpha < n \quad y \quad \beta \le n - 1$

El siguiente gráfico ilustra que al tomar la derivada media de Riemann-Liouville y de Caputo respectivamente de la función f(x) = cos(x), estas derivadas no coinciden, ya que no cumple con el item 2 de la observación anterior, es decir, $f(0) = cos(0) = 1 \neq 0$



Figura 2: Comparación entre la derivada media de Riemann-Liouville y de Caputo de la función f(x) = cos(x)

Proposición 8. ([16]). Sea $f \in AC^n[a, b]$ o $C^n[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) $y = [\alpha] + 1$ (donde $n \notin \mathbb{N}_0$ y [p] es la parte entera de α) entonces se cumple que

$$^{c}D^{\alpha}_{a}(I^{\alpha}_{a}f(x)) = f(x) \tag{12}$$

$$I_a^{\alpha}(^{c}D_a^{\alpha}f(x)) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}$$
(13)

Proposición 9. ([14]). Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$), $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces la derivada de Caputo de la función exponencial esta dada por:

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}(e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} \cdot x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)} = \lambda^{n} \cdot x^{n-\alpha} \cdot E_{1,n-\alpha+1}(\lambda \cdot x)$$

Soluci'on.

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}(e^{\lambda x}) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{x} \frac{(e^{\lambda t})^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{x} \lambda^{n} e^{\lambda t} \cdot (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$= \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{x} e^{\lambda t} \cdot (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$= \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \int_{a}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k}}{k!} \cdot (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$= \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} \cdot \int_{a}^{x} t^{k} \cdot (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$= \frac{\lambda^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} \cdot \int_{a}^{x} t^{k} \cdot x^{n-\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} dt$$

$$= \frac{\lambda^{n} \cdot x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} \cdot \int_{a}^{x} t^{k} \cdot \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} dt$$

Haciendo $y = \frac{t}{x} \rightarrow dt = x \cdot dy$

$$\begin{split} &= \frac{\lambda^n \cdot x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \int_{\frac{a}{x}}^1 (xy)^k \cdot (1-y)^{n-\alpha-1} \cdot x \cdot dy \\ &= \frac{\lambda^n \cdot x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \int_{\frac{a}{x}}^1 x^k \cdot y^k \cdot (1-y)^{n-\alpha-1} \cdot x \cdot dy \\ &= \frac{\lambda^n \cdot x^{n-\alpha-1} \cdot x^{k+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \int_{\frac{a}{x}}^1 y^k \cdot (1-y)^{n-\alpha-1} \cdot dy \\ &= \frac{\lambda^n \cdot x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \int_{\frac{a}{x}}^1 y^k \cdot (1-y)^{n-\alpha-1} \cdot dy \\ &= \frac{\lambda^n \cdot x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \int_{0}^1 y^k \cdot (1-y)^{n-\alpha-1} \cdot dy \end{split}$$

Notemos que la integral $\int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} \cdot y^k \cdot dy$ es la función beta $B(n-\alpha, k+1)$ y podemos relacionarla con la función gamma mediante:

$$B(n-\alpha, k+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha) \cdot \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+1+k-\alpha)}$$

por lo tanto, reemplazando la integral por esta última expresión, tenemos que:

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}(e^{\lambda x}) = \frac{\lambda^{n} \cdot x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha) \cdot \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+1+k-\alpha)}$$
$$= \frac{\lambda^{n} \cdot x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha) \cdot \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+1+k-\alpha)}$$
$$= \lambda^{n} \cdot x^{n-\alpha+k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{\Gamma(n+1+k-\alpha)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} \cdot x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n+1+k-\alpha)}$$

Podemos generalizar esta última expresión con la función de Mittag-Leffler, por lo que finalmente tenemos:

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}(e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+n} \cdot x^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n+1+k-\alpha)} = \lambda^{n} \cdot x^{n-\alpha} \cdot E_{1,n+1-\alpha}(\lambda \cdot x)$$

Teorema 3.2. ([14]). Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}\sin(\lambda x) = -\frac{1}{2}i(i\lambda)^{n} \cdot x^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^{n}E_{1,n-\lambda+1}(-i\lambda x))$$

Solución. Podemos representar la función f(z) = sin(z) en el cuerpo de los números complejos como:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Por lo tanto

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}\sin(\lambda x) = {}^{c}D_{a}^{\alpha}\frac{e^{iz\lambda} - e^{-iz\lambda}}{2i}$$
$${}^{c}D_{a}^{\alpha}\sin(\lambda x) = \frac{1}{2i}({}^{c}D_{a}^{\alpha}e^{ix\lambda} - {}^{c}D_{a}^{\alpha}e^{-ix\lambda})$$

Usando la función Mittag-Leffler, tenemos que

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}\sin(\lambda x) = \frac{1}{2i}((i\lambda)^{n}x^{n-p}E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda x) - (-i\lambda)^{n}x^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda x))$$
$${}^{c}D_{a}^{\alpha}\sin(\lambda x) = -\frac{1}{2}i(i\lambda)^{n} \cdot x^{n-\alpha}(E_{1,n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^{n}E_{1,n-\alpha+1}(-i\lambda x))$$

	$^{c}D_{0}^{lpha}$	$^{c}D_{0}^{rac{1}{4}}$	${}^{c}D_{0}^{rac{1}{2}}$	${}^{c}D_{0}^{rac{1}{2}}\cdot {}^{c}D_{0}^{rac{1}{2}}$
f(x) = k	0	0	0	0
$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}x^{\frac{1}{2}-\alpha}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{1,8182}x^{\frac{1}{4}}$	0.8862	0
f(x) = x	$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}x^{1-\alpha}$	$1,0881 \cdot x^{rac{3}{4}}$	$1,1284 \cdot x^{rac{1}{2}}$	1
$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4\Gamma(\frac{5}{2}-\alpha)}x^{\frac{3}{2}-\alpha}$	$0,6620\sqrt{\pi}\cdot x$	$1,3292 \cdot x$	$\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = x^2$	$\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}x^{2-\alpha}$	$1,\!2435\cdot x^{\frac{7}{4}}$	$1,5045 \cdot x^{\frac{3}{2}}$	$2 \cdot x$
$f(x) = e^x$	$x^{n-\alpha}E_{1,n-\alpha+1}(x)$	$x^{\frac{3}{4}} \cdot E_{1,\frac{7}{4}}(x)$	$x^{\frac{1}{2}} \cdot E_{1,\frac{3}{2}}(x)$	e^x

Tabla 2: Algunos ejemplos de derivada de Caputo de funciones elementales.

Fuente: Elaboración propia.

3.8. La derivada fraccionaria conforme

Anteriormente estudiamos las siguientes definiciones de derivada fraccionaria

1. Definición de Riemann-Liouville. Para $\alpha \in [n-1,n),$ la α derivada de f es

$${}^{RL}D^{\alpha}_{a}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx$$

2. Definición de Caputo. Para $\alpha \in [n-1,n)$, la α derivada de f es

$$^{c}D^{\alpha}_{a}(f)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dx$$

Ahora, todas las definiciones que incluyen (1) y (2) satisfacen la propiedad de que la derivada fraccionaria es lineal. Esta es la única propiedad heredada de la derivada usual por todas las definiciones. Sin embargo, los siguientes son algunos contratiempos de estas dos definiciones:

- I. La derivada de Riemann-Liouville no satisface $D_a^{\alpha}(1) = 0$, si α no es un número natural.
- II. Ambas derivadas fraccionarias no satisfacen la fórmula conocida de la derivada del producto de dos funciones:

$$D_a^{\alpha}(fg) = gD_a^{\alpha}(f) + fD_a^{\alpha}(g)$$

III. Ambas derivadas fraccionarias no satisfacen la fórmula conocida de la derivada del cuociente de dos funciones:

$$D_a^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_a^{\alpha}(f) - fD_a^{\alpha}(g)}{g^2}$$

IV. Ambas derivadas fraccionarias no satisfacen la regla de la cadena:

$$D_a^{\alpha}(f \circ g)(t) = f^{\alpha}(g(t)) \cdot g^{\alpha}(t)$$

v. Ambas derivadas fraccionarias no satisfacen:

$$D_a^{\alpha} D_a^{\beta} = D_a^{\alpha+\beta}$$

VI. La derivada de Caputo asume que la función f es derivable en el sentido usual.

Por otra parte, como se sabe, la derivada usual de una función se define como:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$$

Según esto, se tiene que $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$. Entonces la pregunta es ¿Se puede poner una definición similar para la derivada fraccionaria de orden α , donde $0 < \alpha \leq 1$? O en general para $\alpha \in (n, n + 1]$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Denotamos por T_{α} al operador fraccionario conforme de orden α . Para $\alpha = 1$ se satisfacen las siguientes propiedades:

I. $T_1(af + bg) = aT_1(g) + bT_1(f)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y f, g en el dominio de T_1 .

II.
$$T_1(t^{\alpha}) = \alpha \cdot t^{\alpha - 1}$$
 para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- III. $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$
- IV. $T_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_1(g) gT_1(f)}{g^2}$
- V. $T_1(\lambda) = 0$, para toda función constante $f(t) = \lambda$.

Ahora presentamos la nueva definición, que es la definición más simple, natural y eficiente de derivada fraccionaria de orden $\alpha \in (0, 1]$. Debemos señalar que la definición se puede generalizar para incluir cualquier valor de α . Sin embargo, el caso $\alpha \in (0, 1]$ es el más importante, y una vez establecido, los demás casos son más simples.

Definición 3.4. ([8]). Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Entonces la "derivada fraccional conforme" de f de orden $\alpha \in (0, 1]$ se define por:

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}$$

para todo $t > 0, \alpha \in (0,1)$. Si f es α -derivable en $(0,a), a > 0, y \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ existe entonces

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

Teorema 3.3. ([8]). Si una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es α - derivable en $t_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ entonces f es continua en t_0

Solución. Ya que $f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\epsilon} \cdot \epsilon$. Entonces,

$$\lim_{\epsilon \to 0} [f(t_0 + \epsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\epsilon} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon$$

Sea $h = \epsilon t_0^{1-\alpha}$. Entonces,

$$\lim_{h \to 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{\alpha}(t_0) \cdot 0$$

lo que implica que

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

Por lo tanto, f es continua en t_0 .

Con el siguiente teorema, veremos que el operador fraccional conforme T_{α} posee un conjunto de propiedades muy similar al álgebra de derivadas usual.

Teorema 3.4. ([8]). Sea $\alpha \in (0, 1]$ y f, g son derivable en el sentido usual en un punto t > 0. Entonces el operador fraccional conforme T_{α} cumple con las slguientes propiedades:

- a. $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y f, g en el dominio de T_{α} .
- b. $T_{\alpha}(t^{\alpha}) = \alpha \cdot t^{\alpha-1}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- c. $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$
- d. $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{fT_{\alpha}(g) gT_{\alpha}(f)}{g^2}$
- e. $T_{\alpha}(\lambda) = 0$, para toda función constante $f(t) = \lambda$.
- f. Si f es derivable, entonces $T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \cdot \frac{df}{dt}(t)$

Derivada fraccionaria conforme de algunas funciones elementales

Los siguientes resultados simplifican los cálculo a la hora de encontrar una derivada fraccionaria conforme.

- $T_{\alpha}(t^q) = \alpha \cdot t^{q-\alpha}$ para todo $q \in \mathbb{R}$
- $T_{\alpha}(1) = 0.$
- $T_{\alpha}(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, \ c \in \mathbb{R}$
- $T_{\alpha}(\sin bx) = bx^{1-\alpha}\cos bx, \ b \in \mathbb{R}$
- $T_{\alpha}(\cos bx) = -bx^{1-\alpha}\sin bx, \ b \in \mathbb{R}$
- $T_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = 1$
- $T_{\alpha}(\sin\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}) = \cos\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$
- $T_{\alpha}(\cos\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}) = -\sin\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$
- $T_{\alpha}(e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$

Aunque el caso más importante para el orden de α es (0,1], pero ¿Y si $\alpha \in (n, n + 1]$ para algún número natural n? ¿Cuál sería la definición?

Definición 3.5. ([8]). Sea $\alpha \in (n, n+1]$, y f es n-diferenciable en t, donde t > 0. Entonces la derivada fraccional conforme de f de orden α se define como:

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t+\epsilon t^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-\alpha)}(t)}{\epsilon}$$

donde $[\alpha]$ es la parte entera de α .

Observación 3.4. ([8]). Como consecuencia de la definición anterior, tenemos que

$$T_{\alpha}(f)(t) = t^{([\alpha] - \alpha)} f^{[\alpha]}(t)$$

donde $\alpha \in (n, n+1]$, y f es (n+1)-derivable en t > 0.



Figura 3: Comparación entre la derivada media de Riemann-Liouville, de Caputo y conforme de la función f(x) = cos(x)

3.9. Modelos CDE - CDRE

Antes de presentar los modelos fraccionarios que se desarrollarán en este trabajo, es necesario responder

¿Qué es una ecuación diferencial fraccional?

Es una ecuación diferencial que incluye al menos una derivada de orden fraccionario, en cualquiera de sus posibles definiciones. Si bien este campo de las matemáticas data del siglo XIX, el mundo de las ecuaciones diferenciales fraccionarias ha despertado un interés considerable debido a su capacidad para modelar fenómenos relevantes para los cuales las ecuaciones diferenciales clásicas no presentan un buen ajuste. Cabe destacar que este campo esta en pleno desarrollo y según la base de datos scopus, a la fecha existen más de 11 mil artículos relaciones a los operadores fraccionales.

El siguiente ejemplo ilustra una ecuación diferencial fraccional homogénea

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} + y = 0$$

Aunque también podemos tener modelos más complejos, por ejemplo la ecuación de la onda, en su versión fraccional, la cual queda fórmulada como:

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Una ecuación diferencial fraccional se puede generalizar de la siguiente forma: sean $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0$ un conjunto de números no negativos, a_1, a_2, \ldots, a_m constantes y h(x) una función de clase C entonces denotamos

$$\frac{d^{\alpha_m}y}{dx^{\alpha_m}} + a_1 \cdot \frac{d^{\alpha_{m-1}}y}{dx^{\alpha_{m-1}}} + \dots + a_m \cdot y(x) = h(x)$$

Además cada α_j representa un número racional. Por lo tanto si q es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los α_j , podemos denotar $v = \frac{1}{q}$ y escribir lo anterior como

$$\frac{d^{nv}y}{dx^{nv}} + a_1 \cdot \frac{d^{(n-1)v}y}{dx^{(n-1)v}} + \dots + a_n \cdot y(x) = h(x)$$
(14)

Esta expresión la denominaremos ecuación diferencial fraccionaria lineal con coeficientes constantes de orden (n,q) no homogénea, donde x > 0 y los coeficientes a_i pueden ser cero. Por otra parte, si h(x) = 0 entonces diremos que la ecuación diferencial fraccionaria es **homogénea**. Notemos que si q = 1 y v = 1 entonces (14) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria.

Ahora, daremos paso a definir los dos modelos fraccionarios que serán nuestro objeto de estudio. Cabe destacar que en ambos modelos solo utilizaremos como operador fraccionario la derivada fraccional conforme.

I. Ecuación de convección-difusión fraccionario (en adelante CDE). Es una herramienta importante, cada vez más utilizada por los hidrólogos, para la descripción precisa del fenómeno de difusión anómala. En este trabajo, consideramos una ecuación de convección-difusión fraccional conforme unidimensional para el transporte de contaminantes en un dominio finito con difusión y velocidad que dependen del espacio.

La ecuación responsable del flujo de contaminantes se describe mediante

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{\partial C}{\partial x} - u_a C \right). \qquad 0 \le x \le L; \ t \ge 0$$
(15)

sujeto a la condición inicial y de frontera

$$C(x,0) = c_a \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x \le L$$
$$C(0,t) = 0 = C(L,t) \qquad t > 0$$

donde α ($0 < \alpha \leq 1$) es el término de orden fraccionario. Además D, u y la condición inicial depende de una constante física auxiliar a. El modelo **CDE** fraccional, presentado en la ecuación (15) se puede transformar en **CDE clásica** haciendo $\alpha = 1$.

En el fenómeno del mundo real, los componentes de conductividad hidráulica de un medio poroso son cantidades espacialmente dependientes. En comparación con las estructuras hechas por el hombre como presas de tierra, pozos, diques, etc., las estructuras porosas naturales, como los sistemas acuíferos confinados y no confinados, suelen ser muy heterogéneos y anisotrópicos en naturaleza. Además, para el análisis de la migración de contaminantes, teórica y experimentalmente, se verifica que la variabilidad dependiente de la distancia de los sistemas acuíferos tiene un impacto dominante en la distribución de la concentración de los contaminantes [3] y [19].

Por lo tanto, para comprender el comportamiento del transporte de contaminantes en tales estructuras geológicas naturales de una manera más realista y natural, es muy importante modelar la ecuación de transporte de contaminantes junto con los parámetros de migración variables en el espacio, es decir, el término de velocidad de filtración y los componentes del coeficiente de difusión que varían espacialmente [13].

II. Ecuación de convección-difusión-reacción fraccionario (en adelante CDRE): El estudio del transporte de contaminantes con el efecto de la tasa de descomposición dependiente del tiempo se lleva a cabo en presencia de un coeficiente de difusión constante y un coeficiente de convección constante. El modelo conforme de la ecuación de convección-difusión con un coeficiente reactivo variable en el timepo se considera de la siguiente manera.

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{\partial C}{\partial x} - u_a C \right) - \lambda(t)C \tag{16}$$

sujeto a la condición inicial y condiciones de frontera

$$\begin{split} C(x,0) &= c_a x e^{\gamma x}; & x > 0, \ t = 0 \\ C(0,t) &= 0; & x = 0, \ t > 0 \\ \lim_{x \to \infty} C(x,t) &= 0; & t > 0 \end{split}$$

donde α ($0 < \alpha \leq 1$) es el término de orden fraccionario. Además D y u dependen de una constante física auxiliar a. Por otra parte, la condición inicial depende de una constante física auxiliar a, pero además depende de otra constante física γ . Finalmente, λ es el coeficiente de reacción que depende del tiempo.

Observación 3.5. Si se cambia la definición de derivada fraccional o bien el orden de la derivada fraccional, en consecuencia, se modificará la ecuación que se está resolviendo, y por lo tanto, cambia la solución.

4. Método de análisis de homotopía

4.1. Concepto de homotopía

El método de análisis de homotopía, más conocido como HAM, fue propuesta por el matemático Shijun Liao en el año 1992 [10]. Este se basa en el concepto de homotopía, un concepto fundamental en topología y geometría diferencial. Como se sabe, una homotopía describe una especie de variación continua o deformación en matemáticas. Por ejemplo, un círculo puede deformarse continuamente en un cuadrado o una elipse, la taza del café puede deformase continuamente en la forma de una dona, sin embargo, la forma de una taza de café no se puede distorsionar continuamente en la forma de una pelota de fútbol. Esencialmente, una homotopía define una conexión entre diferentes cosas en matemáticas, que contienen las mismas características en algunos aspectos.

Por ejemplo, las dos funciones reales diferentes $\sin(\pi x)$ y 8x(x-1) en el intervalo $x \in [0,1]$ se pueden conectar construyendo una familia de funciones de tipo

$$\Psi(x;q) = (1-q)\sin(\pi x) + q \left[8x(x-1)\right]$$

donde q es llamado parámetro de incrustación. Notese que $\Psi(x;q)$ no solo depende de la variable independiente $x \in [0,1]$ sino también del parámetro de incrustación $q \in [0,1]$. Especialmente, cuando q = 0, tenemos que

$$\Psi(x;0) = \sin(\pi x) \qquad x \in [0,1]$$

y cuando q = 1 se cumple que

$$\Psi(x;1) = 8x(x-1) \qquad x \in [0,1]$$

respectivamente. Entonces a medida que el parámetro de incrustación $q \in [0,1]$ aumenta de 0 a 1, la función real $\Psi(x;q)$ varía continuamente de una función trigonométrica $\sin(\pi x)$ a un polinomio 8x(x-1), como se muestra en la siguiente figura.

En topología, $\Psi(x;q)$ se denomina homotopía, $\sin(\pi x) \ge 8x(x-1)$ se denominan funciones homotópicas, denotados por

$$\Psi:\sin(\pi x) \sim 8x(x-1)$$

Sea C[a, b] el conjunto de todas las funciones reales continuas en el intervalo $a \le x \le b$. En general, si una función continua $f \in C[a, b]$ se puede deformar continuamente en otra función continua $g \in C[a, b]$, se puede construir una homotopía



Figura 4: Deformación continua de la homotopía

$$\Psi: f(x) \sim g(x)$$

en el camino

$$\Psi(x;q) = (1-q) f(x) + q g(x) \qquad x \in [a,b]$$

Definición 4.1. ([10]). Una homotopía entre dos funciones continuas $f(x) \ y \ g(x)$ desde un espacio topológico X a un espacio topológico Y se define formalmente como una función continua $\Psi : X \times [0,1] \rightarrow Y$ tal que si $x \in X$ entonces $\Psi(x;0) = f(x) \ y \ \Psi(x;1) = g(x)$.

Dado que las curvas se pueden definir mediante ecuaciones algebraícas o diferenciales, el concepto de homotopía definido anteriormente para funciones se puede expandir fácilmente a ecuaciones. Por ejemplo, consideremos una familia de ecuaciones algebraícas

$$\Psi(q): (1+3q)x^2 + \frac{y^2}{1+3q} = 1 \qquad q \in [0,1]$$
(17)



Figura 5: Deformación continua de la solucion y(x;q) de la ecuación de homotopía (17).

donde $q \in [0, 1]$ es el parámetro de incrustación. Cuando q = 0 tenemos la ecuación circular

$$\Psi_0: x^2 + y^2 = 1 \tag{18}$$

cuya solución es una circunferencia $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$. Cuando q = 1, tenemos la ecuación de elipse.

$$\Psi_1: 4x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \tag{19}$$

cuya solución es la elipse $y=\pm\sqrt{1-4x^2}$

Por lo tanto, a medida que el parámetro de incrustación q aumenta de 0 a 1, la ecuación (17) varía continuamente de la ecuación circular Ψ_0 a la ecuación de la elipse Ψ_1 , mientras que su solución y se deforma continuamente desde la circunferencia $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ hasta la elipse $y = \pm \sqrt{1 - 4x^2}$, como se muestra en la figura 5.

Entonces, hablando con mayor precisión, la solución (17) depende no solo de x sino tambien de $q \in [0, 1]$, y por lo tanto (17) debe expresarse con mayor precisión en la forma

$$\Psi(q): (1+3q) x^2 + \frac{y^2(x;q)}{1+3q} = 1, \qquad q \in [0,1]$$
(20)

que define dos homotopías: una es la homotopía de la ecuación

$$\Psi(q):\Psi_0 \sim \Psi_1 \tag{21}$$

y la otra es la homotopía de la función

$$y(x;q) = \pm \sqrt{1-x^2} \sim \pm 2\sqrt{1-4x^2}$$
 (22)

En otras palabras, la solución (20) también es una homotopía. Para simplificar, llamamos a (20) ecuación de deformación de orden cero. La misma idea se puede extender fácilmente a otros tipos de ecuaciones, como ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, etc, como se mostrará más adelante.

Definición 4.2. ([10]). El parámetro de incrustación $q \in [0,1]$ en una homotopía de ecuaciones o funciones se llama parámetro de homotopía.

Definición 4.3. ([10]). Dada una ecuación denotada por $\Psi_1 = 0$, que tiene al menos una solución u. Sea Ψ_0 una ecuación propia, más simple, llamada ecuación inicial, cuya solución u_0 se conoce. Si se puede construir una homotopía de la ecuación $\Psi(q) : \Psi_0 \sim \Psi_1$ tal que a medida que el parámetro de homotopía $q \in [0,1]$ aumenta de 0 a 1, $\Psi(q)$ se deforma continuamente de la ecuación inicial Ψ_0 a la ecuación original Ψ_1 , mientras que su solución varía continuamente desde la solución conocida u_0 de Ψ_0 hasta la solución desconocida u de Ψ_1 , entonces este tipo de homotopía de ecuaciones se denomina ecuación de deformación de orden cero.

Podemos construir muchas homotopías diferentes que conectan la ecuación del circulo (18) y la ecuación de la elipse (19). Por ejemplo, la siguiente ecuación de deformación de orden cero

$$\Psi(q,\mu): (1+3q^{\mu}) x^2 + \frac{y^2(x;q)}{1+3q^{\mu}} = 1 \qquad q \in [0,1]$$

donde $\mu > 0$ es una constante, define una familia de homotopía de dos parámetros (q, μ) .

$$\Psi(q,\mu):\Psi_0\sim\Psi_1$$

donde Ψ_0 y Ψ_1 denota a (18) y (19) respectivamente. Para diferentes valores de μ , define una homotopía distinta. Dado que $\mu \in (0, +\infty)$, existe un número infinito de homotopías que conectan la ecuación de la circunferencia (18) y la ecuación de la elipse (19), y correspondientemente, un número infinito de homotopías de funciones que conectan la circunferencia $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ y la elipse $y = \pm 2\sqrt{1 - 4x^2}$. Esto ilustra la gran flexibilidad de construir una homotopía para dos funciones o ecuaciones homotópicas dadas. Todo esto pertenece a los conceptos basicos en topología y geometría diferencial [18,19]. Sobre la base de homotopía mencionada anteriormente, se pueden derivar algunos conceptos nuevos.

Nótese que la homotopía

$$\Psi(x;q) = (1-q)\sin(\pi x) + q [8x(x-1)]$$

puede ser reescrita de la forma

$$\Psi(x;q) = \sin(\pi x) + [8x(x-1) - \sin(\pi x)]q.$$

y por lo tanto tenemos que

$$\frac{d\Psi(x;q)}{dq} = 8x(x-1) - \sin(\pi x) \qquad q \in [0,1]$$

que describe la relación o la velocidad de la deformación continua de $sin(\pi x)$ a 8x(x-1), denominada derivada homotópica de primer orden. En general, la homotopía

$$\Psi(x;q) = (1-q) f(x) + q g(x), \qquad x \in [a,b]$$

define completamente la derivada de homotopía de primer orden correspondiente

$$\frac{d\Psi(x;q)}{dq} = f(x) - g(x), \qquad q \in [0,1]$$

Generalizando este concepto, se pueden definir aún más las derivadas homotópicas de alto orden.

4.2. Formulación del método de análisis homotópico

Consideremos una ecuación diferencial no lineal

$$N[(x,t)] = 0$$

donde N es un operador no lineal, u(x,t) es una función desconocida, x y t denotan variables independientes espaciales y temporales, respectivamente.

Podemos elegir una suposición inicial adecuada $u_0(x,t)$ y un operador lineal auxiliar \mathscr{L} , que tiene la propiedad $\mathscr{L}[0] = 0$ y es independiente del parámetro de homotopía q, para construir la siguiente ecuación de deformación de orden cero

$$(1-q)\mathscr{L}[\phi(x,t;q) - u_0(x,t)] = h_0 q N[\phi(x,t;q)]$$
(23)

donde $q \in [0, 1]$ es un parámetro de incrustación y h_0 es un parámetro de control de convergencia. En q = 0, según la definición de la ecuación de deformación de orden cero, tenemos la ecuación auxiliar Ψ_0 , cuya solución $u_0(x, t)$ es fácil de conocer, ya que

$$\phi(x,t;0) = u_0(x,t) \tag{24}$$

En q = 1, $\Psi(q)$ es equivalente a la ecuación original N[u(x,t)] = 0, por lo que tenemos:

$$\phi(x,t;1) = u(x,t) \tag{25}$$

Usando (23), la serie de Maclaurin con respecto al parámetro de homotopía q, esta dada por:

$$\phi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)q^k,$$
(26)

donde

$$u_k(x,t) = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k \phi(x,t;q)}{dq^k} \right|_{q=0} = \mathscr{D}_k[\phi(x,t;q)]$$

Aquí, (26) se denomina serie de homotopía-Maclaurin de $\phi(x,t;q)$, $\mathscr{D}_k[\phi(x,t;q)]$ se denomina homotopía-derivada de k-ésimo orden de $\phi(x,t;q)$ y \mathscr{D}_k se denomina operador derivada de homotopía de k-ésimo orden de $\phi(x,t;q)$. Especialmente, cuando q = 1 entonces la serie de homotopía es

$$\phi(x,t;1) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t)$$
(27)

Si la serie de homotopía anterior es convergente a $\phi(x,t;1)$, entonces, según (25), tenemos que

$$\phi(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t)$$
(28)

En la práctica, sólo se pueden obtener términos finitos, lo que nos da la aproximación de homotopía de orden m-ésimo es

$$u(x,t) \approx u_0(x,t) + \sum_{k=1}^m u_k(x,t)$$
 (29)

Finalmente con la aproximación de homotopía (29) se ha finalizado con la formulación del método de análisis homotópico. Todos los pasos vistos anteriormente, serán aplicados en los modelos CDE y CDRE.

4.3. Método de la transformada de Laplace fraccional

La transformada de Laplace y su inversa constituyen una poderosa técnica para resolver ecuaciones diferenciales lineales. En este capítulo revisaremos como este enfoque puede aplicarse a las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. De esta manera encontramos que las soluciones a tales ecuaciones pueden escribirse como series de potencias generalizadas por medio de la función de Mittag-Leffler.

Definición 4.4. ([21]). Dada una función f, que esté definida para todos los valores $t \ge 0$, se denomina transformada de Laplace de f a la función F dada por

$$F(s) = \mathcal{L}{f(t)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0$$

siempre que exista la integral sobre todos aquellos valores de s para los cuales la integral impropia es convergente.

Definición 4.5. ([21]). Se dice que una función f(t) es de orden exponencial α si existen constantes positivas α , M y T tales que

$$|f(t)| \le M e^{\alpha t}$$
 para toda $t > T$

Además, podemos recuperar la función original f(t) a partir de su transformada de Laplace mediante la transformada de Laplace inversa que definimos como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

 $\operatorname{con} c = \Re(s)$

Teorema 4.1. ([21]). Si f, f', \ldots, f^{n-1} son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^n(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$ entonces

$$\mathcal{L}\{f^{n}(t)\} = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}{f(t)}.$

Las siguientes dos definiciones corresponden al método de transformada de Laplace adaptado a ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

Definición 4.6. ([14]). Sea $f \in L^1(a, b)$ y $\alpha > 0$, definimos la transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann-Liouville de la función f de orden α como

$$\mathcal{L}\{^{RL}D_t^{\alpha}[f(t)]\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0)$$
(30)

donde $F(s) = \mathcal{L}{f(t)} y n = [\alpha] + 1$

Definición 4.7. ([14]). Sea $f \in L^1(a, b)$ y $\alpha > 0$, definimos la transformada de Laplace de la derivada fraccional de Caputo de la función f de orden α como

$$\mathcal{L}\{^{c}D_{t}^{\alpha}[f(t)]\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)$$
(31)

donde $F(s) = \mathcal{L}{f(t)} y n = [\alpha] + 1$

Podemos observar que para aplicar la transformada de Laplace a la derivada fraccional de Riemann-Liouville necesitamos condiciones iniciales fraccionarias, sin embargo, para la derivada fraccional de Caputo usamos condiciones iniciales enteras lo cual facilita nuevamente la interpretación física. La siguiente proposición ilustrará como calcular la transformada de Laplace de funciones de Mittang-Leffler.

Proposición 10. ([14]). Sean $k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces tenemos que para todo x > 0,

$$\mathcal{L}\{x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-\lambda)}$$
$$\mathcal{L}\{x^{k}E_{\alpha,k+1}(\lambda x^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-k-1}}{(s^{\alpha}-\lambda)}$$

 $con \ [s] > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \ y \ E_{\alpha,\beta} \ representa \ la \ función \ de \ Mittang-Leffler.$ En consecuencia

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-\lambda)}\right\} = x^{\beta-1} \cdot E_{\alpha,\beta}(\lambda x)$$
(32)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-k-1}}{(s^{\alpha}-\lambda)}\right\} = x^k \cdot E_{\alpha,k+1}(\lambda x^{\alpha})$$
(33)

Ejemplo 1. Supongamos que $y \in L^1$ y además $1 \le \alpha \le 2$ por lo que n = 2. Nuestro problema consiste en resolver

$$^{c}D_{0}^{\alpha}y(x) = \lambda y(x)$$

bajo las condiciones de frontera

$$y(0) = a_0$$
$$y'(0) = a_1$$

En primer lugar aplicamos la transformada de Laplace en ambos lados de la igualdad

$$\mathcal{L}\{^{c}D_{0}^{\alpha}y(x)\} = \mathcal{L}\{\lambda y(x)\} + \mathcal{L}\{0\}$$
$$s^{p}Y(s) - \sum_{k=0}^{1} s^{\alpha-k-1}y^{k}(0) = \lambda Y(s) + 0$$
$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) - s^{\alpha-2}y'(0) = \lambda Y(s)$$

aplicando condiciones iniciales

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1} \cdot a_0 - s^{\alpha-2} \cdot a_1 = \lambda Y(s)$$

y despejando tenemos que

$$Y(s) = \frac{s^{\alpha-1} \cdot a_0 + s^{\alpha-2} \cdot a_1}{s^{\alpha} - \lambda}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace a los miembros de la ecuación para recuperar y(x).

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = a_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{p-1}}{s^p - \lambda}\right) + a_1 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{p-2}}{s^p - \lambda}\right)$$
$$y(x) = a_0 \cdot E_{\alpha,1}(\lambda x^{\alpha}) + a_1 \cdot E_{\alpha,2}(\lambda x^{\alpha})$$
$$y(x) = a_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha \cdot k + 1)} + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha \cdot k + 2)}$$

donde este último resultado es la solución analítica del ejemplo 1. Podemos observar que la solución queda en dependencia de la función de Mittag-Leffler.

4.4. Un nuevo enfoque del método de la transformada de Laplace

Este método resulta ser crítico para las futuras comparaciones que se harán en esta tésis con las soluciones obtenidas por el HAM. Para presentar este nuevo enfoque, primero describimos como el método permite recuperar una función simple de su transformada de Laplace, sin el uso de tablas matemáticas o el cálculo numérico de la transformada inversa. Comenzamos considerando alguna función f(t), y la transformada de Laplace de esa función, la cual se define como [18]

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$
(34)

donde s es el parámetro de la transformada de Laplace elegido de modo que la integral impropia converge. Para elecciones adecuadas de f(t), tales que $\lim_{t\to\infty} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}e^{-st}\right] = 0$ para todo n, la aplicación repetida de la integral por partes a la ecuación (34) nos da

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} \left[f(0) + \frac{1}{s} \frac{df(0)}{dt} + \frac{1}{s^2} \frac{d^2 f(0)}{dt^2} + \frac{1}{s^3} \frac{d^3 f(0)}{dt^3} + \dots \right]$$
(35)

La igualdad (35) conduce a la propiedad

$$\lim_{s \to \infty} \left[s \mathcal{L}\{f(t)\} \right] = f(0), \tag{36}$$

permitiéndonos calcular el valor inicial de la función, f(0), directamente de $\mathcal{L}{f(t)}$ sin necesidad de invertir explícitamente la transformada de Laplace. Podemos extender el teorema del valor inicial haciendo un cambio de variable, sea $g(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$, para que tengamos $\lim_{s \to \infty} [s\mathcal{L}{g(t)}] = g(0)$. Expresando este resultado en términos de las variables originales se obtiene

$$\lim_{s \to \infty} \left[s \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} \right] = \frac{d^n f(0)}{dt^n}$$
(37)

lo que significa que si conocemos la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de una función, podemos evaluar la n-ésima derivada de esa función en t = 0 sin invertir explícitamente la transformada. Como sabemos que la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de una función esta dada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}\right\} = s^{n}\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{k-1}f(0)}{dt^{k-1}}s^{n-k}$$
(38)

con lo cual (37) se puede reescribir como

$$\frac{d^n f(0)}{dt^n} = \lim_{s \to \infty} \left[s^{n+1} \mathcal{L}\{f(t)\} - s \sum_{k=1}^n \frac{d^{k-1} f(0)}{dt^{k-1}} s^{n-k} \right]$$
(39)

lo que significa que dado $\mathcal{L}{f(t)}$, podemos calcular todas las derivadas de f(t) en t = 0. Con esta información podemos construir una serie de Maclaurin para la función original f(t)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i f(0)}{dt^i} \frac{t^i}{i!}$$
(40)

Por lo tanto, para una función particular f(t), para la cual podemos calcular la transformada de Laplace, $\mathcal{L}{f(t)}$, podemos reconstruir la función usando las ecuaciones (39) y (40). La reconstrucción de f(t) no depende del cálculo de la transformada inversa. Para la implementación práctica de la representación en serie de Maclaurin de f(t), debemos truncar la serie (40). Para ilustrar cómo podemos hacer uso de este resultado, consideremos el caso sencillo de $f(t) = e^{at}$, para lo cual la transformada de Laplace es $\mathcal{L}{f(t)} = \frac{1}{(s-a)}$, con s > a. Usando la ecuación (30) rápidamente vemos que tenemos

$$\frac{df}{dt}(0) = a, \ \frac{d^2f}{dt^2}(0) = a^2, \ \frac{d^3f}{dt^3}(0) = a^3, \ \frac{d^4f}{dt^4}(0) = a^4, \dots$$
(41)

que, usando la ecuación (40), nos permite reconstruir la conocida serie de Maclaurin para la función exponencial

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \dots$$
(42)

En resumen, la ecuación (39) nos da un método alternativo para invertir una transformada de Laplace. En lugar de usar tablas matemáticas o inversión numérica, si tenemos una fórmula explícita para $\mathcal{L}{f(t)}$, incluso sin ningún conocimiento de f(t), podemos recuperar la representación de la serie de Maclaurin de f(t) sin dificultad, siempre que la función sea lo suficientemente suave.

5. Aplicación del HAM

Para la aplicación del método de análisis homotópico a los dos modelos objeto de estudio, se siguieron las directrices descritas en la referencia [13]. Por otra parte, toda las gráficas fueron generadas en MATLAB y los códigos se encuentrán en la sección de anexos.

Siguiendo las ideas básicas del HAM descritas en el capítulo anterior, tomamos la siguiente ecuación diferencial

$$N[C(x,t)] = 0 (43)$$

donde N es un operador no lineal y C(x, t) es una función desconocida. Liao [12] propuso la siguiente ecuación de deformación de orden cero.

$$(1-q) \cdot L[\psi(x,t) - C_0(x,t)] = h_0 \cdot q \cdot N[\psi(x,t)]$$
(44)

donde L es un operador lineal auxiliar y N es el operador no lineal correspondiente a la ecuación original (43), $q \in [0, 1]$ es un parámetro de homotopía, $\psi(x, t)$ es la solución de la ecuación (43), h_0 es el parámetro de control de convergencia y $C_0(x, t)$ es la condición inicial para la solución.

Es importante remarcar que uno tiene la gran libertad de elegir los valores auxiliares para h_0 , L y la condición inicial $C_0(x,t)$. Además, el operador L tiene la propiedad de que L[0] = 0. Se puede observar que para q = 0, $\psi(x,t;q) = C_0(x,t)$, y para q = 1, $\psi(x,t;q) = C(x,t)$.

Por lo tanto, la solución $\psi(x,t;q)$ cambia continuamente de la condición inicial $C_0(x,t)$ a la solución requerida C(x,t) del problema a medida que el parámetro de homotopía q varía de 0 a 1.

La serie de Maclaurin correspondiente a la solución $\psi(x,t;q)$ con respecto a q se define como

$$\psi(x,t) = C_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x,t)q^m$$
(45)

Como la solución converge para q = 1, entonces la solución de la serie se obtiene de la siguiente manera

$$C(x,t) = C_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x,t)$$
(46)

La ecuación de deformación de orden m-ésimo se defime como [12]

$$L\left[C_m(x,t) - \chi_m C_{m-1}(x,t)\right] = \frac{h_0}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\psi(x,t)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0}$$
(47)

donde $\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1\\ 1, & m \geq 2 \end{cases}$.

A partir de las expresiones anteriores, la aproximación de orden mth de C(x, t) se obtiene de la siguiente manera

$$C_m(x,t) = \chi_m C_{m-1}(x,t) + L^{-1} \left[\frac{h_0}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\psi(x,t)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \right] \text{ para } m = 1, 2, \dots$$
(48)

5.1. Modelo 1: ecuación de convección-difusión fraccional con coeficientes que dependen del espacio (CDE).

5.1.1. Ecuación gobernante

$$\frac{\partial^{\alpha} C}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{C}{\partial x} - u_a C \right). \qquad 0 \le x \le L; \ t \ge 0$$
(49)

Las condiciones iniciales y de frontera que se asignaron al modelo (49) son las ecuaciones (50) y (51) respectivamente. La condición inicial definida por la ecuación (50) muestra que existe alguna concentración de contaminante de fondo, caracterizada como producto de la concentración inicial y alguna función trigonométrica. Se supone que los límites del dominio modelado están libres de contaminantes, definidos como límites de entrada y salida, representados por la ecuación (51).

$$C(x,0) = c_a \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x \le L \tag{50}$$

$$C(0,t) = 0 = C(L,t)$$
 $t > 0$ (51)

El coeficiente de difusión generalizada y la velocidad de filtración se definen como sigue:

$$u_a = u_0 \cdot (1 + ax) \tag{52}$$

$$D_a = D_0 \cdot (1 + ax) \tag{53}$$

en donde u_0 , D_0 y a son costantes físicas auxiliares.

Reemplazando (52) y (53) en la ecuación (49) obtenemos

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial t^{\alpha}} = D_0(1+ax)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \{aD_0 - u_0(1+ax)\}\frac{\partial C}{\partial x} - au_0C$$
(54)

5.1.2. Fórmula iterativa

El operador no lineal correspondiente al problema se define como:

$$N[C(x,t)] = \frac{\partial^{\alpha}C}{\partial t^{\alpha}} - D_0(1+ax)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \{aD_0 - u_0(1+ax)\}\frac{\partial C}{\partial x} + au_0C$$
(55)

donde se supone que C(x,t) es la solución del modelo considerado. Además, la condición inicial del modelo considerado es

$$C_0 = c_a \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{56}$$

y el operador lineal, requerido por el HAM es introducido como

$$L = \frac{\partial}{\partial t} \tag{57}$$

que satisface la propiedad de que L[0] = 0

Usando la ecuación (48), la aproximación de orden m^{th} de C(x,t) se define iterativamente como

$$C_m(x,t) = \chi_m C_{m-1}(x,t) + h_0 Q^{-1} \left[\frac{\partial^{\alpha} C_{m-1}}{\partial t^{\alpha}} - D_0(1+ax) \frac{\partial^2 C_{m-1}}{\partial x^2} - \{aD_0 - u_0(1+ax)\} \frac{\partial C_{m-1}}{\partial x} + au_0 C_{m-1} \right] \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

5.1.3. Parámetros de entrada

En esta sección, se explora la distribución de la concentración de contaminantes a partir de la solución semianalítica derivada del modelo considerado de la ecuación de convección-difusión. El dominio espacial se considera finito, es decir, $0 \le x(\text{km}) \le 1.5$ para la descripción gráfica. La fuerza de concentración se analiza a partir de la solución en serie dada por la ecuación (46) para el siguiente conjunto de parámetros del modelo respaldados por el estudio [20]:

Parámetro	Valor	Unidad
c_a	1	(mg/L)
u_0	0.001	$(\mathrm{km/year})$
D_0	0.01	$(\mathrm{km}^2/\mathrm{year})$
a	0.03	(km^{-1})

Tabla 3: Parámetros de entrada

Fuente: Elaboración propia.

5.1.4. Selección del parámetro de control de convergencia

Para obtener la solución adecuada del modelo, es muy importante asegurar la convergencia de la solución. En el método de análisis de homotopía, el parámetro de control h_0 es responsable de la convergencia de la solución, que puede ajustarse y controlarse mediante la región de convergencia obtenida de la curva h_0 [11]. La curva h_0 se presenta en la figura 6 y 7 correspondiente a $C_{tt}(0, 1)$.

La figura 6 muestra que la curva h_0 tiene un segmento de línea horizontal **entre -1.7 a 1.2** que ilustra la región acotada para el valor de h_0 que asegura la convergencia de la solución de la ecuación (46).

Por otra parte, en la figura 7 se observa que la curva h_0 para cada valor fraccionario es de naturaleza bastante diferente, pero la línea horizontal responsable del valor adecuado de h_0 es aproximadamente igual para cada valor de α .



Figura 6: Curva h_0 para la solución HAM de la ecuación (54).



Figura 7: Curva h_0 correspondiente a diferentes valores de orden fraccionario $\alpha.$

5.1.5. Efecto del orden fraccional y otros parámetros sobre el transporte de contaminantes

En esta sección se analizará cómo varia la ecuación (48) a medida varíamos el orden fraccionario y algunos parámetros que se definieron en la sección (5.2.3). Para efecto de los cálculos, tomaremos en particular $h_0 = -0.3$.

En la figura 8 se muestra el efecto del orden fraccinario (α) sobre el transporte de contaminantes. Se consideran en este caso el coeficiente de difusión dependiente del espacio y de la velocidad de filtración. Aquí se examina el perfil de concentración para el valor de orden fraccionario $\alpha = 0.3, 0.6,$ 0.9 y 1.0. Se observa en la gráfica que los valores de concentración crecen a medida aumenta el orden fraccionario.



Figura 8: Variación de la fuerza de concentración con orden fraccional variable y un tiempo fijo t = 1 yr.

La figura 9 proporciona el perfil de concentración para diferentes dominios de tiempo correspondientes a un orden fraccionario fijo $\alpha = 0.2$. Se observa que a medida aumenta la variable temporal la fuerza del valor de la concentración va disminuyendo.



Figura 9: Distribución de la concentración para diferentes dominios de tiempo y orden fraccionario fijo $\alpha=0.2.$

La figura 10 proporciona el efecto del coeficiente de difusión sobre la fuerza de concentración del contaminante. La atenuación de la concentración muestra una variación significativa en cada posición del dominio con una pequeña variación en el coeficiente de difusión. El valor de concentración aumenta con el valor decreciente del coeficiente de difusión para cualquier dominio de tiempo fijo.



Figura 10: Distribución de la concentración de contaminantes para diferentes valores del coeficiente de difusión y tiempo fijo t = 1 yr.

La figura 11 proporciona el efecto de la velocidad de filtración sobre la fuerza de concentración del contaminante. El valor de concentración disminuye a medida la velocidad va aumentando para cualquier dominio de tiempo fijo.



Figura 11: Distribución de la concentración de contaminantes para diferentes valores del coeficiente de convección y tiempo fijo t = 1 yr.

La figura 12 proporciona el efecto del parámetro a sobre la fuerza de la concentración. El valor de concentración disminuye a medida el parámetro a va aumentando para cualquier dominio de tiempo fijo.



Figura 12: Distribución de la concentración de contaminantes para diferentes valores del parámetro a, orden fraccionario $\alpha = 0.7$ y tiempo fijo t = 1 yr.

5.2. Modelo 2: ecuación de convección-difusión fraccional con coeficiente reactivo dependiente del tiempo (CDRE).

En esta sección, el estudio del transporte de contaminantes con el efecto de un coeficiente reactivo dependiente del tiempo se lleva a cabo en presencia de un coeficiente de difusión generalizado y una velocidad de filtración constante.

5.2.1. Ecuación gobernante

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\alpha} \frac{\partial C}{\partial x} - u_{\alpha}C \right) - \lambda(t)C$$
(58)

donde D_{α} y u_{α} se consideran constante y la tasa de decaimiento se define como

$$\lambda(t) = \lambda_0 (1 - \mu t) \tag{59}$$

donde λ_0 es la tasa de decaimiento inicial.

Las condiciones iniciales y de frontera se definen como:

$$C(x,0) = c_a x e^{\gamma x}; \qquad x > 0, \ t = 0$$
 (60)

$$C(0,t) = 0;$$
 $x = 0, t > 0$ (61)

$$\lim_{x \to \infty} C(x,t) = 0; \qquad t > 0 \tag{62}$$

Ahora reemplazando (59) en (58) tenemos que

$$\frac{\partial^{\alpha}C}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\alpha} \frac{\partial C}{\partial x} - u_{\alpha}C \right) - \lambda_0 (1 - \mu t)C$$
(63)

5.2.2. Fórmula iterativa

Con base en la teoría de HAM, el operador no lineal correspondiente al problema se define como:

$$N[C(x,t)] = \frac{\partial^{\alpha} C}{dt^{\alpha}} - D_{\alpha} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u_{\alpha} \frac{\partial C}{\partial x} + \lambda_0 (1-\mu t)C$$
(64)

donde se supone que C(x,t) es la solución del modelo considerado. Además, la condición inicial del modelo considerado es

$$C_0 = c_a x e^{\gamma x} \tag{65}$$

y el operador lineal, requerido en HAM es introducido como

$$L = \frac{\partial}{\partial t} \tag{66}$$

que satisface la propiedad de que L[0] = 0

La aproximación de orden m th de C(x,t) se define como

$$C_m(x,t) = \chi_m C_{m-1}(x,t) + h_0 Q^{-1} \left[\frac{\partial^{\alpha} C_{m-1}}{\partial t^{\alpha}} - D_{\alpha} \frac{\partial^2 C_{m-1}}{\partial x^2} + u_{\alpha} \frac{\partial C_{m-1}}{\partial x} + \lambda_0 (1-\mu t) C_{m-1} \right]$$

5.2.3. Parámetros de entrada

Para la interpretación gráfica del transporte de contaminantes correspondiente al modelo de tasa de decaimiento que varía temporalmente, se adopta el siguiente conjunto de parámetros de entrada del estudio previamente disponible [18]:

Parámetro	Valor	Unidad
c_a	2	(mg/L)
u_{lpha}	0.2	$(\mathrm{cm/hr})$
D_{lpha}	0.5	$(\mathrm{cm}^2/\mathrm{year})$
λ_0	0.05	(km^{-1})
γ	0.0025	$(\mathrm{cm}^2/\mathrm{year})$
μ	0.01	-

Tabla 4: Parámetros de entrada

Fuente: Elaboración propia.

5.2.4. Selección del parámetro de control de convergencia

Como se discutió en la sección 5.2.4, se demuestra que el parámetro de control h_0 es responsable de la convergencia de la solución en serie vía HAM. Para esto, se puede trazar la curva h_0 para ajustar la región de convergencia como un segmento de línea horizontal que proporciona el rango acotado para el valor de h_0 .



Figura 13: Curva h_0 para la solución HAM de la ecuación (63).

La figura 13 muestra la curva h_0 correspondiente a la solución en serie presentada por la ecuación (37), que proporciona el rango numérico h_0 como $-0.9 \le h_0 \le 1.5$.

Al igual que en el modelo anterior, podemos observar en la figura 14 que la curva h_0 para cada valor fraccionario es de naturaleza bastante diferente, pero la línea horizontal responsable del valor adecuado de h_0 es aproximadamente igual para cada valor de α .



Figura 14: Curva h_0 correspondiente a diferentes valores de orden fraccionario $\alpha.$

5.2.5. Efecto del orden fraccional y otros parámetros sobre el transporte de contaminantes

La figura 15 presenta la variación de la fuerza de concentración debido al cambio en la derivada de orden fraccionario del modelo. Esta exploración se realiza para un coeficiente de difusión y un coeficiente de convección constantes, en presencia de un coeficiente reactivo variable en el tiempo correspondiente a la solución HAM de quinto orden. Para efecto de los cálculos, en este segundo modelo tomaremos en particular $h_0 = -0.6$.

La atenuación de la concentración está análogamente relacionada con el valor de orden fraccionario $\alpha = 0.1, 0.4, 0.7$ y 1.0. Se observa que la fuerza de concentración es mayor para menores valores de orden fraccionario. Además, para cualquier derivada de orden fraccionario fijo, la fuerza de concentración aumenta rápidamente hasta cierta distancia y luego cambia de naturaleza y decrece hacia el final de la formación y alcanza su valor mínimo.



Figura 15: Concentración de contaminantes v
s distancia para orden fraccional variable y un tiempo fij
o $t=20~{\rm hr.}$

Se observa en la figura 16 que a medida vamos disminuyendo la tasa de descomposición aumenta la fuerza de la concentración. En la figura 17 se observa que para valores más bajo del parámetro γ tenemos mayores valores de concentración y finalmente en la figura 18 se observa que a medida incrementamos el parámetro μ también aumenta la fuerza de la concentración.



Figura 16: Efecto de la tasa de descomposición sobre la distribución de la concentración para un orden fraccional fijo $\alpha = 0.7$ y un tiempo fijo t = 25 hr.



Figura 17: Efecto del parámetro γ sobre la distribución de la concentración para un orden fraccional fijo $\alpha = 0.7$ y un tiempo fijo t = 25 hr.



Figura 18: Efecto del parámetro μ sobre la distribución de la concentración para un orden fraccional fijo $\alpha = 0.7$ y un tiempo fijo t = 25 hr.

5.3. Impacto del número de términos del HAM

Es natural preguntarse ¿Qué pasaría si aumentamos el orden de aproximación del HAM? Si ponemos atención a las gráficas 19 y 20, podemos observar que tanto en el modelo **CDE** como en el **CDRE**, el método de análisis de homotopía va convergiendo a la solución exacta.



Figura 19: Convergencia de la solución del modelo CDE a través del HAM para $\alpha = 0.7$, $h_0 = -0.3$ y tiempo fijo t = 1 yr.



Figura 20: Convergencia de la solución del modelo CDRE a través del HAM para $\alpha = 0.7$, $h_0 = -0.3$ y tiempo fijo t = 1 yr.

5.4. Validación de los modelos

Un punto crítico de este trabajo será la validación de las soluciones obtenidas vía método HAM de los modelos objeto de estudio. Esto es revelante, ya que debemos comprobar si efectivamente las soluciones obtenidas van en una dirección correcta. Para ello, se compararán las soluciones del HAM versus otra solución analítica, la cual se obtuvo vía método de transformada de Laplace, siguiendo las directrices descritas en la referencia [18].

5.4.1. Validación del modelo CDE fraccionario

Para validar la solución del modelo **CDE** fraccional obtenido por el HAM, haremos una comparación contra otra solución analítica obtenida por el método de la transformada de Laplace, el cual se aplica a ecuaciones diferenciales lineales. Para ello, se ha transformado la ecuación (49) en una nueva ecuación, similar a la forma clásica de la **CDE**, utilizando las propiedades de la derivada fraccional conforme. En efecto, tomamos

$$T = \frac{1}{\alpha} t^{\alpha} \tag{67}$$

Reemplazando (67) en (49), tenemos que el modelo CDE se transforma en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{\partial C}{\partial x} - u_a C \right). \tag{68}$$

sujeto a las condiciones:

$$\begin{split} C(x,0) &= c_a x e^{\gamma x}; & x > 0, \ T = 0 \\ C(0,T) &= 0; & x = 0, \ T > 0 \\ \lim_{x \to \infty} C(x,T) &= 0; & T > 0 \end{split}$$

La ecuación anterior (68) es similar al modelo presentado en la literatura [18], que proporciona la solución analítica mediante el uso de la transformada de Laplace, con las mismas condiciones iniciales y de frontera.

Dicha solución analítica esta dada por:

$$C(x,t) = c_a x e^{-\gamma x} + c_a (D_\alpha \gamma^2 x + u_\alpha \gamma x - 2D_\alpha \gamma - u_\alpha) \cdot e^{-\gamma x} t$$
$$+ c_a \phi (D_\alpha \gamma^2 x + u_\alpha \gamma x - 4D_\alpha \gamma - 2u_\alpha) \cdot e^{-\gamma x} \frac{t^2}{2!}$$
$$+ c_a \phi^2 (D_\alpha \gamma^2 x + u_\alpha \gamma x - 6D_\alpha \gamma - 3u_\alpha) \cdot e^{-\gamma x} \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^4)$$

donde $\phi = D_{\alpha}\gamma^2 + u_{\alpha}\gamma$



Figura 21: Comparación entre la solución HAM y la solución exacta para $\alpha = 0.1$

De acuerdo a la observación 3.5, si varíamos el orden de una ecuación diferencial fraccional entonces cambia la solución de la ecuación. Esto sugiere que si hacemos cambios en el orden, también debemos modificar el parámetro h_0 del HAM, ya que de no hacerlo, podríamos tener problemas de convergencia. Los valores del parámetro de control de convergencia h_0 utilizado para resolver la ecuación (68) para los distintos ordenes fraccionarios α fueron los siguientes:

α	h_0
0.1	-0.3
0.5	-0.6

Tabla 5: Asignación del parámetro de convergencia para cada orden fraccionario.

Fuente: Elaboración propia.


Figura 22: Comparación entre la solución HAM y la solución exacta para $\alpha=0.1$

En las figuras 21 y 22 se comtempla la validación realizada para un valor temporal fijo t = 1 hrs y para ordenes fraccionarios $\alpha = 0.1$ y 0.5. Se observa que la solución HAM presenta una buena concordancia con la solución en serie de potencias y gráficamente es bastante difícil manifestar diferencia entre estas dos soluciones.

5.4.2. Validación del modelo CDRE fraccionario

Para validar la solución del modelo **CDRE** fraccional obtenido por el HAM, haremos una comparación contra otra solución analítica obtenida por el método de la transformada de Laplace, el cual se aplica a ecuaciones diferenciales lineales. Para ello, se ha transformado la ecuación (63) en una nueva ecuación, similar a la forma clásica de la **CDE**, utilizando las propiedades de la derivada fraccional conforme. En efecto, tomamos

$$T = \frac{1}{\alpha} t^{\alpha} \tag{69}$$

Ahora establecemos $\mu = 0$ y luego reemplazando (69) en (63), el modelo CDRE se transforma en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_a \frac{\partial C}{\partial x} - u_a C \right) - \lambda_0 C \tag{70}$$

sujeto a las condiciones:

$$C(x, 0) = c_a x e^{\gamma x};$$
 $x > 0, T = 0$
 $C(0, T) = 0;$ $x = 0, T > 0$
 $\lim_{x \to \infty} C(x, T) = 0;$ $T > 0$

La ecuación anterior (70) es similar al modelo presentado en la literatura [18], que proporciona la solución analítica mediante el uso de la transformada de Laplace, con las mismas condiciones iniciales y de frontera.

Dicha solución analítica esta dada por:

$$C(x,t) = c_a x e^{-\gamma x} + c_a (D_\alpha \gamma^2 x + u_\alpha \gamma x - \lambda_0 x - 2D_\alpha \gamma - u_\alpha) \cdot e^{-\gamma x} t$$

+ $c_a \phi (D_\alpha \gamma^2 x + u_\alpha \gamma x - \lambda_0 x - 4D_\alpha \gamma - 2u_\alpha) \cdot e^{-\gamma x} \frac{t^2}{2!}$
+ $c_a \phi^2 (D_\alpha \gamma^2 x + u_\alpha \gamma x - \lambda_0 x - 6D_\alpha \gamma - 3u_\alpha) \cdot e^{-\gamma x} \frac{t^3}{3!} + \mathcal{O}(t^4).$

donde $\phi = D_{\alpha}\gamma^2 + u_{\alpha}\gamma - \lambda_0$



Figura 23: Comparación entre la solución HAM y la solución exacta vía método de transformada de Laplace para diferentes órdenes fraccionarios

Cabe destacar que los valores del parámetro de control de convergencia h_0 utilizado para resolver la ecuación (61) para los distintos ordenes fraccionarios α fueron los siguientes:

α	h_0
0.6	-0.7
0.7	-0.81
0.8	-0.95
0.9	-1.15
1.0	-1.3

Tabla 6: Asignación del parámetro de convergencia para cada orden fraccionario.

Fuente: Elaboración propia.



Figura 24: ZOOM de la gráfica comparativa entre la solución HAM y la solución vía método transformada de Laplace.

La validación se realiza tomando como valor temporal fijo t = 10 hr y para valores de $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ y 1.0. La diferencia entre el valor de concentración derivado de la solución HAM y la solución exacta correspondiente a la solución disponible en la literatura [18] es casi insignificante.



Figura 25: Comparación entre la solución HAM y la solución exacta para diferentes valores temporales.

La figura 25 presenta una comparación entre la solución HAM y la solución exacta derivada por el método de transformada de Laplace para el modelo CDE clásico, para $\alpha = 0.7$. La comparación se realiza para t = 0, 10 y 25 horas. Para la validación de la solución, la aproximación de quinto orden de la solución HAM se compara con la solución exacta, que se trunca hasta el orden $\mathcal{O}(t^4)$. Se observa que la solución HAM presenta una buena concordancia con la solución en serie de potencias y gráficamente es bastante difícil manifestar diferencia entre estas dos soluciones.

6. Discusiones

6.1. Dependencia del h_0

Un punto importante, es el hecho que la convergencia del HAM depende de la elección del parámetro h_0 , pero ¿Qué tan sensible es el método a la elección de h_0 ? En la figura 23, hemos ilustrado una comparación entre la solución HAM y la solución exacta para diferente ordenes fraccionarios. En particular, detengámonos en el caso $\alpha = 0.7$. En la siguiente figura, se observa que tomando dos valores de h_0 correspondientes al rango número factible (segmento horizontal de la figura 13) se tienen resultados bastante dispares, ya que para $h_0 = -0.83$ la fuerza de concentración crece y converge hacia la solución exacta, pero si modificamos el valor de h_0 a -1.2 entonces la fuerza de concentración disminuye y se aleja considerablemente de la solución exacta.



Figura 26: Comparación de la concentración para diferentes valores de h_0 .

Acá surge la inquietud si es que existe algún método capaz de encontrar analíticamente un valor para el parámetro h_0 del HAM, de tal modo que el error cuadrático medio (asociado a una serie HAM finita) sea mínimo, ya que de ello depende de que tan buena o mala es la aproximación de la solución.

6.2. Orden de aproximación del HAM

Otro punto importante a considerar en la aplicabilidad del HAM es el orden de aproximación. Se comprobó que ha medida se aumenta el orden de aproximación, la solución del HAM va tendiendo a estabilizarse (Ver gráficos 19 y 20 del capítulo anterior). Pero cada aumento en el orden de aproximación impacta en la rápidez en que el programa encuentra la solución. En particular, se experimentó hasta un orden de aproximación m = 14, ya que posterior a ese orden el computador (MacBook Pro, Procesador 2.3 GHz, Memoria 8 GB) se vuelve bastante ineficiente para encontrar la solución.

6.3. Elección de la definición de derivada fraccional

Es natural hacerse la pregunta ¿Qué sucede con la aplicabilidad del HAM si se cambia la definición de la derivada fraccional?. Si se toma, por ejemplo, la definición de derivada fraccionaria de Caputo y se hace la adaptación a los modelos **CDE** y **CDRE** entonces aparecen los problemas operativos (cálculos de derivada y anti derivadas). En primer lugar, para funciones como $\sin(x)$, $\cos(x)$ o e^x , la derivada de Caputo presenta desventajas, ya que estas derivadas quedan dependiendo de funciones como la hipergeométrica, error o de fresnel, las cuales son series o integrales impropias. Pero el verdadero problema nace cuando se aplica el HAM al modelo fraccionario y se requiere integrar estás funciones especiales. El siguiente programa construido en **MATLAB**, se hizo con la finalidad de comparar las soluciones obtenidas con la derivada fraccional conforme y las soluciones obtenidas con la derivada fraccional de Capitulo, pero **MATLAB** nos arroja el siguiente error en la resolución:



Figura 27: Error MATLAB

Este error quiere decir que el **symbolic toolbox de MATLAB** no es capaz de realizar algunas de las operaciones que aparecen en el HAM. Una recomendación para intentar resolver este problema operatorio es reemplazar las funciones involucradas por aproximaciones polinomiales basadas en la serie de Taylor.

7. Conclusiones

Se concluye que a pesar que el método de análisis homotópico tiene ventajas en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, éste tiene un interesante ajuste en los modelos lineales que fueron presentados y que además se adaptaron a orden fraccionarios, utilizando la definición de derivada conforme. Por otra parte, el estudio de la aplicabilidad del método HAM utilizando la definición de derivada fraccionaria de Caputo resultó inconcluso, ya que hubo problemas operativos producto de cálculos de derivada y anti derivadas.

Otra ventaja importante en la aplicación del método de análisis homotópico es que éste resulta ser bastante práctico de implementar computacionalmente (se puede verificar en las líneas códigos citadas en la sección de anexo) aunque se requiere de un procesador adecuado para alcanzar soluciones óptimas.

Finalmente, se concluye que las soluciones obtenidas mediante el HAM presentan buena concordancia con las soluciones vía transformada de Laplace (extraídas de la literatura) y gráficamente es difícil notar diferencias significativas entre estas dos soluciones.

8. Bibliografía

- A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in: Math. Studies., North-Holland, New York, 2006.
- [2] Armstrong, M.A.: Basic Topology (Undergraduate Texts in Mathematics). Springer, New York (1983).
- [3] Batu V. Applied flow and solute transport modeling in aquifers: fundamental principles and analytical and numerical methods. CRC Press; 2005.
- [4] Beerends, R.J., ter Morche, H.G., van den Berg, J.C., van de Vrie, E.M., 2003. Fourier and Laplace Transforms. Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frecuency independent. II, The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 13, 1967, pp. 529-539.
- [6] Guía-Calderón, M., Rosales-García, J. J., Guzmán-Cabrera, R., González-Parada, A., Álvarez-Jaime, J. A. (2015). El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. Acta universitaria, 25(2), 20-27.
- [7] De Hoog, F.R., Knight, J.H., Stokes, A.N., 1982. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 3, 357–366.
- [8] Khalil R, Al Horani M, Yousef A, Sababheh M. A new definition of fractional derivative. J Comput App Math 2014;264:65–70.
- [9] Kreyszig, E., 2006. Advanced Engineering Mathematics. John Wiley and Sons, Singapore.
- [10] Liao SJ. Advances in the homotopy analysis method. Singapore: World Scientific; 2013.
- [11] Liao SJ. An approximate solution technique not depending on small parameters: a special example. Int J Non-Linear Mech 1995;30(3):371–80.
- [12] Liao SJ. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems (Doctoral dissertation). Shanghai Jiao Tong University; 1992. Ph. D. Thesis.
- [13] M. Chaudhary, R. Kumar, M.K. Singh. Fractional convection-dispersion equation with conformable derivative approach. Chaos Solitons & Fractals, 411 (2020), p. 110426.
- [14] M. Ishteva, Properties and applications of the Caputo fractional operator, Msc. Thesis, Dept. of Math., Universität Karlsruhe (TH), Sofia, Bulgaria, 2005.

- [15] Podlubny, I., Fractional differential equations. Academic Press, San Diego, 1999.
- [16] Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O., Fractional integrals and derivates. Gordon and Breach Publichiers, Amsterdam, 1993.
- [17] Sen, S.: Topology and Geometry for Physicists. Academic Press, Florida (1983).
- [18] Simpson MJ, Ellery AJ. Exact series solutions of reactive transport models with general initial conditions. J Hydrol 2014; 513:7-12.
- [19] Todd DK. Groundwater Hydrology. second ed. John Wiley & Sons; 1980.
- [20] Yu C, Deng A, Ma J, Cai X, Wen C. Semi-analytical solutions for two-dimensional convectiondiffusion-reactive equations based on homotopy analysis.
- [21] Zill, D.G., Cullen, M.R., 1992. Advanced Engineering Mathematics. PWS Publishing Company, Boston, USA.

9. Anexos

9.1. Códigos de los experimentos computaciones

En esta sección se presentan los códigos implementados para la construcción de cada gráfico. Todos los códigos fueron creados en MATLAB y son de elaboración propia. Se debe tener instalado el Toolbox symbolic Math para su implementación .

9.1.1. Selección del parámetro de convergencia h_0

Se deben ingresar manualmente solo los parámetros iniciales que se encuentran en la sección (5.1.3) para el caso del modelo **CDE** o los parámetros iniciales que se encuentran en la sección (5.2.3) para el caso del modelo **CDRE**.

```
syms x t h;
ca = 1;
u0 = 0.001;
d0 = 0.01;
a = 0.03;
L = 1;
p = 0.7; orden fraccionario
m = 5;
\text{ctotal} = 0;
c0 = ca^* sin((pi^*x)/L);
for i=1:m
if(m==1)
\mathbf{c} = \mathbf{h}^* \mathrm{int}(t^{1-p} * \mathrm{diff}(\mathbf{c}0, \mathbf{t}) - \mathbf{d}0^* (1 + \mathbf{a}^* \mathbf{x}) * \mathrm{diff}(\mathbf{c}0, \mathbf{x}, 2) - (\mathbf{a}^* \mathbf{d}0 - \mathbf{u}0^* (1 + \mathbf{a}^* \mathbf{x})) * \mathrm{diff}(\mathbf{c}0, \mathbf{x}) + \mathbf{a}^* \mathbf{u}0^* \mathbf{c}0, \mathbf{t}, 0, \mathbf{t});
ctotal = c0 + c;
c0 = c;
else
c = c0 + h^{*}int(t^{1-p*}diff(c0,t) - d0^{*}(1+a^{*}x)^{*}diff(c0,x,2) - (a^{*}d0 - u0^{*}(1+a^{*}x))^{*}diff(c0,x) + a^{*}u0^{*}c0,t,0,t);
ctotal = ctotal + c;
c0 = c;
end
end
Ctt = diff(ctotal, t, 2);
Ctt = subs(Ctt,x,t,0,1);
```

Ctt = inline(Ctt); h = -10:0.032:10; Ctt = Ctt(h);plot (h,Ctt); hold on;

9.1.2. Aplicación del HAM a la CDE con derivada fraccional conforme

Se deben ingresar manualmente los parámetros iniciales que se encuentran en la sección (5.1.3), un valor para el tiempo y el orden de aproximación del HAM, el cual esta representado en el código por la letra m.

```
syms x t;
ca = 1;
u0 = 0.001;
d0 = 0.01;
a = 0.02;
L = 1;
h = -0.3;
p = 0.7; orden fraccionario
m = 5;
\text{ctotal} = 0;
c0 = ca^* sin((pi^*x)/L);
for i=1:m
if(m==1)
c = h^{*} int(t^{1-p*} diff(c0,t) - d0^{*}(1+a^{*}x)^{*} diff(c0,x,2) - (a^{*}d0 - u0^{*}(1+a^{*}x))^{*} diff(c0,x) + a^{*}u0^{*}c0,t,0,t);
ctotal = c0 + c;
c0 = c;
else
c = c0 + h^{*}int(t^{1-p*}diff(c0,t)-d0^{*}(1+a^{*}x)^{*}diff(c0,x,2)-(a^{*}d0-u0^{*}(1+a^{*}x))^{*}diff(c0,x)+a^{*}u0^{*}c0,t,0,t);
ctotal = ctotal + c;
c0 = c;
end
end
ctotal = subs(ctotal,t,0);
ctotal = inline(ctotal);
```

```
x = 0:0.002:1;
ctotal = ctotal(x);
plot (x,ctotal);
hold on;
grid on;
```

9.1.3. Aplicación del HAM a la CDRE con derivada fraccional conforme

Se deben ingresar manualmente los parámetros iniciales que se encuentran en la sección (5.2.3), un valor para el tiempo y el orden de aproximación del HAM, el cual esta representado en el código por la letra m.

syms x t; ca = 2;u0 = 0.2; d0 = 0.5; L = 1;h = -0.1;p = 0.7; orden fraccionario lambda = 0.05;y = 0.0025;mu = 0.15; m = 10;ctotal = 0; $c0 = ca^*x^*exp(-y^*x);$ for i=1:m if(i==1) $c = h^* int(t^{1-p} * diff(c0,t) - d0 * diff(c0,x,2) + u0 * diff(c0,x) + lambda * (1-mu^*t) * c0,t,0,t);$ ctotal = c0 + c; c0 = c;else $c = c0 + h^{*}int(t^{1-p*}diff(c0,t)-d0^{*}diff(c0,x,2)+u0^{*}diff(c0,x)+lambda^{*}(1-mu^{*}t)^{*}c0,t,0,t);$ ctotal = ctotal + c;c0 = c;end

```
end

ctotal = subs(ctotal,t,25);

ctotal = inline(ctotal);

x = 0:10:3000;

ctotal = ctotal(x);

ctotal(1) = 0;

plot (x,ctotal);

hold on;

grid on;
```

9.1.4. Solución exacta vía transformada de Laplace

Se deben ingresar manualmente los parámetros iniciales que se encuentran en la sección (5.2.3).

syms x t; ca = 2;u0 = 0.2; d0 = 0.5; L = 1;lambda = 0.05; y = 0.0025;p = 0.1; orden fraccionario $c0 = ca^*x^*exp(-y^*x);$ $phi = d0^*y^2 + u0^*y - lambda;$ $f0 = c0 + ca^{*}(d0^{*}y^{2*}x + u0^{*}y^{*}x - lambda^{*}x - 2^{*}d0^{*}y - u0)^{*}exp(-y^{*}x)^{*}(1/p)^{*}t^{p};$ $f1 = ca^*phi^*(d0^*y^{2*}x + u0^*y^*x - lambda^*x - 4^*d0^*y - 2^*u0)^*exp(-y^*x)^*((1/p)^*t^p)^2/2;$ $f2 = ca^*phi^*phi^*(d0^*y^{2*}x + u0^*y^*x - lambda^*x - 6^*d0^*y - 3^*u0)^*exp(-y^*x)^*((1/p)^*t^p)^3/6;$ c = f0 + f1 + f2;c = subs(c,t,1);c = inline(c);x = 0:10:3000;c = c(x);c(1) = 0;plot (x,c,'*', 'Color', 'k'); hold on; grid on

9.1.5. Aplicación del HAM a la CDE con derivada fraccional de Caputo

Se deben ingresar manualmente los parámetros iniciales que se encuentran en la sección (5.1.3), un valor para el tiempo y el orden de aproximación del HAM, el cual esta representado en el código por la letra m.

```
syms x t;
ca = 2;
u0 = 0.2; d0 = 0.5;
a = 0.03;
L = 1;
h = -1.3;
p = 0.5; orden fraccionario
n = 1; parte entera del orden fraccionaria más uno.
lambda = 0.05;
y = 0.0025;
mu = 0.01;
m = 2;
ctotal = 0;
c0 = ca^* sin((pi^*x)/L);
for i=1:m
if(i==1)
f = (1/gamma(n-p))^* int(diff(c0,x,n)^*(t-x)^{(n-1-p)},x,0,t);
c = h*int(f-d0*diff(c0,x,2)+u0*diff(c0,x)+lambda*(1-mu*t)*c0,t,0,t);
ctotal = c0 + c;
c0 = c;
else
f = (1/gamma(n-p))^* int(diff(c0,x,n)^*(t-x)^{(n-1-p)},x,0,t);
c = c0 + h*int(f-d0*diff(c0,x,2)+u0*diff(c0,x)+lambda*(1-mu*t)*c0,t,0,t);
ctotal = ctotal + c;
c0 = c;
end
end
ctotal = subs(ctotal,t,1);
ctotal = inline(ctotal);
```

$$\begin{split} x &= 0:0.002:1;\\ ctotal &= ctotal(x);\\ ctotal(1) &= 0;\\ plot (x,ctotal);\\ hold on;\\ grid on; \end{split}$$