Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Modos cuasinormales de campos escalares alrededor del agujero negro proveniente de gravedad Dilatónica en 1 + 1 dimensiones

Por

Jorge Arce Pérez

Profesor Guía

Dr. Ramón Becar Collao

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco - 16 de marzo de 2023

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

.....
Dr. Ramón Becar

Profesor informante:

.....
Dr. David Tempo

Profesor informante:

.....
Mg. Felipe Moncada

Director del Programa (Ministro de fe):

.....
Dr. Jacobo Hernández

Temuco .....

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas.
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi profesor guía el Dr. Ramón Becar, quien me brindó su apoyo en este proceso de investigación al entregar revisiones, orientación y sugerencias fundamentales para finalizar esta AFE, agradezco infinitamente su buena disposición.

A mis amigos Guillermo Manns y Francisco Pinochet quienes me acompañaron en el magíster y con quienes compartí buenos momentos, gracias por apoyarme en este proyecto al revisar los cálculos y brindarme motivación.

También agradezco a los profesores, la Dra. Almeira Sampson y Dr. Manuel Bustos, a los cuales conocí en la Universidad San Sebastián, quienes me brindaron su apoyo en diversas actividades, además de otorgarme las cartas de recomendación para hacer ingreso a este Magíster.

Por último pero no menos importante, agradezco a mi familia y amigos que constantemente me motivaron a terminar este programa de magíster.

Abstract

In this AFE we analytically calculated the quasi-normal modes obtained by perturbing a black hole of Dilatonic gravity in 1+1 dimensions by a non-minimally curvature-coupled massive scalar field by solving the hypergeometric differential equation obtained from the Klein-Gordon equation, and we also analyzed whether the black hole is stable under these perturbations.

Keywords: quasinormal modes, black hole, Dilatonian gravity, hypergeometric equation, Klein-Gordon equation

Resumen

En este AFE se calcularon analíticamente los modos cuasi-normales que se obtienen al perturbar un agujero negro de gravedad Dilatonica en 1+1 dimensiones por un campo escalar masivo no mínimalmente acoplado a la curvatura al resolver la ecuación diferencial hipergeométrica que se obtiene a partir de la ecuación de Klein-Gordon, además se analiza si el agujero negro es estable bajo estas perturbaciones.

Palabras claves: modos cuasi-normales, agujero negro, gravedad Dilatonica, ecuación hipergeométrica, ecuación de Klein-Gordon

Índice

1 Introducción **1**

2 Motivación **2**

3 Objetivos **3**

4 Modelo conceptual **4**
4.1 Agujeros Negros 4
4.1.1 Solución a las ecuaciones de Einstein 4
4.1.2 Tipos de agujeros negros 4
4.2 Métrica 5
4.3 Gravedad en bajas dimensiones 7
4.4 Perturbaciones sobre agujeros negros debido a campos clásicos 8
4.4.1 Modos cuasi-normales 9
4.4.2 Significado físico 9

5 Modelo matemático **10**
5.1 Solución general a la ecuación de propagación de un campo escalar 10
5.1.1 Deduccion de la ecuación de Klein-Gordon: 10
5.1.2 Coeficientes métricos 11
5.1.3 Ecuación Hipergeométrica 12
5.2 Solución con condiciones de borde 15
5.2.1 Condiciones de borde 15
5.2.2 Solución en la región cercana al horizonte 16
5.2.3 Solución en la región asintótica 17
5.2.4 Solución cerca del horizonte y la región asintótica 17
5.3 Modos cuasinormales del agujero negro dilatónico 19

6 Resultados **20**
6.1 Modos fudamentales ($n = 0$) 20
6.1.1 Modo fundamental para $\xi' < \frac{1}{4}$ 20
6.1.2 Modo fundamental para $\xi' > \frac{1}{4}$ 21
6.2 Graficos frecuencias QNM 22
6.3 Frecuencias QNM de escalares neutros con $\xi = 0$ 23
6.4 Ecuación tipo Schrödinger 23

7 Discusión **26**

8 Bibliografía **27**

Anexos **28**

A Ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar **28**

B Escalar de curvatura **29**

1 Introducción

Los modos cuasinormales son las frecuencias con que los sistemas disipativos liberan energía, por ejemplo: al perturbar una copa esta vibra y libera energía en forma de ondas provocando que se estabilice y no se quiebre. Los agujeros negros **(BH, por sus siglas en inglés)** forman inherentemente sistemas disipativos ya que, la energía puede perderse al interior del BH o bien escapar al infinito. Hoy en día el estudio astrofísico de los BH está en auge debido a su detección indirecta por la influencia sobre el movimiento de estrellas cercanas, la detección de las ondas gravitacionales de la colision de BH (el 11 de febrero de 2016, las colaboraciones LIGO, Virgo y GEO600 anunciaron la detección de la colisión de dos BH), ademas de la primera detección directa al observar los rayos X arrojados al universo por el agujero negro supermasivo (primera fotografía de un BH, publicada el 12 de mayo del 2019, por el Event Horizon Telescope).

Las ondas gravitacionales que producen los BH al interactuar con su entorno portan información sobre sus propiedades como lo son su masa, momentum angular y/o carga, de ahí la importancia de su estudio como lo es la espectroscopía de agujeros negros, además nos permite estudiar la estabilidad y realizar pruebas de cribados de BH.

En esta AFE se estudia las perturbaciones debidas a un campo escalar no mínimalmente acoplado a la curvatura sobre un agujero negro proveniente de gravedad Dilatónica en $1+1$ dimensiones, obteniendo de forma analítica las frecuencias cuasinormales y analizando la estabilidad del BH. Se escogió este tipo de agujero negro debido a que se conoce su solución de manera explícita y además posee propiedades similares a las del agujero negro de Schwarzschild.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: en las primeras secciones se da a conocer la motivación y los objetivos de esta AFE. En la **sección 4**, se dan a conocer los conceptos y definiciones fundamentales: definición de agujero negro, métrica, gravedad en bajas dimensiones, los tipos de perturbaciones sobre los BH y los modos cuasinormales.

En la **sección 5**, se obtienen las frecuencias cuasinormales de manera analítica partiendo de la dedución de la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar masivo no-mínimalmente acoplado, la obtención de la ecuación diferencial hipergeométrica asociada al fenómeno y las soluciones de esta con las condiciones de borde.

Las secciones finales corresponden a los apartados de resultados y discusión, donde en la primera, se interpreta las frecuencias cuasinormales obtenidas en vista a determinar la estabilidad del agujero negro analizando los graficos de estas y también se analiza el potencial que se obtiene al transformar la ecuación de Klein-Gordon a una ecuación tipo Schrödinger. Y en la segunda se dan las conclusiones de esta investigación.

2 Motivación

Pertubación de estructuras cósmicas

Todos los astros del Universo vibran u oscilan de alguna u otra forma. En el caso de nuestra estrella el Sol, las turbulencias en la superficie provocan las conocidas oscilaciones solares, estudiadas por la heliosismología[1]. Las estrellas Cefeidas[2] pulsan con periodos muy regulares, siendo una herramienta muy útil para medir distancias en el Universo. Las oscilaciones de las estrellas de neutrones estudiadas por la astrosismología[3], se pueden utilizar para sondear el interior de estos objetos tan compactos. Incluso objetos tan extremos como los agujeros negros vibran cuando son perturbados por un objeto cayendo hacia su interior o por una colisión.

Ondas gravitacionales

Un agujero negro en oscilación provoca ondulaciones del espacio tiempo que se propagan a la velocidad de la luz llamadas ondas gravitacionales (OG). Igual que la luz que nos llega de estrellas y galaxias lejanas, las OG que llegan a la Tierra son capaces de contarnos la historia del evento que las produjo, permitiéndonos observar la estructura de una estrella de neutrones o un agujero negro, o remontarnos al Universo primigenio. Las OG nos proporcionan una vía para estudiar el cosmos.

Múltiples eventos astrofísicos violentos, como las explosiones de supernova o las colisiones de estrellas de neutrones o agujeros negros producen OG bien definidas. La forma de la onda gravitacional asociada a un agujero negro perturbado se corresponde con una onda sinusoidal amortiguada llamada estabilización (ringdown", en inglés). Con los interferómetros podemos detectar las OG y realizar mediciones de caracteristicas de estos objetos astrofísico, en el caso de lo agujeros negros sus ondas gravitaciones portan información sobre su masa, momento angular y/o carga. Utilizando los modelos de agujeros negros se puede simular y estudiar la estabilidad de ellos frente a perturbaciones de campos gravitaciones, electromagnéticos y/o escalares.

[1] Es el estudio de las oscilaciones que se producen en la superficie del Sol. Se trata de ondas de presión generadas por la turbulencia de la superficie solar y amplificadas por medio de interferencias constructivas

[2] Es una estrella que pulsa radialmente, variando tanto en temperatura como diámetro para producir cambios de brillo con un periodo y amplitud estables muy regulares

[3] Es la ciencia que estudia la estructura interna de las estrellas pulsantes gracias a la interpretación de su espectro de frecuencias.

3 Objetivos

Objetivo general

Resolver analíticamente la ecuación diferencial que representa la propagación de un campo escalar sobre la geometría de un agujero negro de baja dimensiónalidad con vistas al análisis de su estabilidad.

Objetivos específicos

1. Formular un modelo físico-matemático que describa la propagación de un campo escalar sobre la geométria de un agujero negro de baja dimensionalidad.
2. Resolver analíticamente la ecuación de Klein-Gordon obteniendo los modos cuasinormales y frecuencias cuasinormales de oscilación.
3. Interpretar y analizar físicamente las frecuencias de oscilación cuasinormal con vista a determinar la estabilidad o inestabilidad del agujero negro bajo estudio.

4 Modelo conceptual

4.1 Agujeros Negros

Los **agujeros negros (BH**) son los restos de antiguas estrellas, tan densas que ninguna partícula material, ni siquiera la luz, es capaz de escapar a su poderosa fuerza gravitatoria. Mientras muchas estrellas acaban convertidas en enanas blancas o estrellas de neutrones, los agujeros negros representan la última fase en la evolución de enormes estrellas que fueron al menos de 10 a 15 masa solares.

Cuando las estrellas alcanzan el estadio final de sus vidas estallan en cataclismos conocidos como supernovas. Tal explosión dispersa la mayor parte de la estrella al vacío espacial dejando una nebulosa, pero quedan una gran cantidad de restos en los que no se produce la fusión. En los restos inertes de una supernova no hay una fuerza que se resista a la gravedad, por lo que la estrella empieza a replegarse sobre sí misma. El *límite de Chandrasekhar* es la máxima masa posible de una estrella de tipo enana blanca, equivale a aproximadamente 1,44 masas solares. Si ésta superase el *límite de Chandrasekhar*, se colapsaría para convertirse en una estrella de neutrones o un agujero negro. De forma similar, también existe un límite a la masa que las estrellas de neutrones pueden soportar. En este caso, son los neutrones quienes están degenerados y pueden soportar una masa del orden de 2,20 masas solares. Este es el *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*.

4.1.1 Solución a las ecuaciones de Einstein

El 25 de noviembre de 1915 Albert Einstein presentó su teoría de la relatividad general ante la Academia Prusiana de Ciencias en Berlín. Sin embargo, cinco días antes de que Einstein presentara su "versión", el matemático David Hilbert le había ganado en presentar otra versión, en Göttingen, la cual dedujo a partir de un principio variacional.

Meses después de estos dos reportes, en 1916, el astrónomo alemán Karl Schwarzschild pública la primera solución a las ecuaciones, de la relatividad general. La solución que encontró Schwarzschild es la precursora de los enigmáticos agujeros negros, esos objetos que atrapan todo lo que está a su alcance, incluso la luz, de ahí su nombre. Y también en 1916 Einstein encontró soluciones tipo ondulatorio a sus ecuaciones linealizadas, es decir, en el régimen de campo débil donde se podrían encontrar algunos resultados. Descubrió que el espacio y el tiempo pueden oscilar propagando ondas gravitacionales que se mueven a la velocidad de la luz.

4.1.2 Tipos de agujeros negros

El **teorema sin pelo** o (traducción del inglés *no hair theorem*) postula que todas las soluciones del agujero negro descritas en las ecuaciones de Einstein-Maxwell de gravitación y electromagnetismo en la relatividad general pueden ser caracterizadas por solo tres parámetros observables de manera externa: su masa M, su carga Q y su momento angular J. Toda otra información acerca de la materia que forma el agujero negro o que está cayendo en él, desaparece detrás del horizonte de sucesos y es permanentemente inaccesible a un observador externo. Esto abre la cuestión de la *"paradoja de la información del agujero negro"*.

También nos dice que el estado final del agujero negro es independiente del cuerpo del que se contrajo o de la materia de la que provino, de la forma del cuerpo original, de su campo magnético y de todas sus otras propiedades físicas.

De acuerdo con lo anterior, las diferentes soluciones de agujeros negros se resumen en la siguiente tabla:

	No rotación ($J = 0$)	Rotación ($J \neq 0$)
Sin carga ($Q = 0$)	Schwarzschild	Kerr
Carga ($Q \neq 0$)	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Características

- **Horizonte de eventos:** Es la superficie pseudo-esférica imaginaria que rodea al agujero negro. Tiene una fuerza gravitacional tan fuerte que para que un objeto pudiera alejarse su velocidad de escape debe ser similar a la velocidad de la luz.
- **Singularidad**: Es una zona interior del espacio tiempo donde las magnitudes físicas relacionadas a los campos gravitatorios no pueden definirse.

4.2 Métrica

En geometría de Riemann, el tensor métrico es un tensor de rango 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en un espacio localmente euclídeo. Una vez que se elige una base local, el tensor métrico aparece como una matriz, notada convencionalmente g. La notación g_{ij} se utiliza convencionalmente para las componentes del tensor. Así el tensor métrico g se expresa fijada una base coordenada, usando el convenio de sumación de Einstein como:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{1}$$

En física es muy común escribir la métrica como el cuadrado del elemento de longitud, dado que el tensor es simétrico la notación física es equivalente a la notación anterior:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2}$$

¿Qué representa una métrica?

De acuerdo con la teoría de la relatividad general en presencia de materia, la geometría del espacio-tiempo no es plana, es decir, está caracterizada por un tensor de curvatura que no es idénticamente nulo en todos los puntos de la variedad. Este tensor de curvatura puede ser relacionado con tensor de energía-impulso que representa el contenido material del modelo de universo que se esté analizando. Algunos ejemplos de tensores métricos no euclídeos procedentes de la teoría relatividad general que se usan como modelos de universo son:

- Métrica de **Schwarzschild**, que representa la geometría del espacio-tiempo alrededor de un cuerpo de esférico aislado y estático (que no gira alrededor de sí mismo).
- Métrica de **Friedman-Lemaître-Robertson-Walker**, que se cree da una buena aproximación de la estructura del universo en expansión a grandes escalas.

En nuestro caso el tensor métrico describe la geometría de un agujero negro proveniente de gravedad acoplada al campo escalar Dilatón en 1+1 dimensiones.

Ejemplo: Métrica de Schwarzschild

La ecuación de campo de Einstein viene dada por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{3}$$

La cual representa 10 ecuaciones en un espacio-tiempo 4-dimensional como el nuestro. Cada símbolo del lado izquierdo de la igualdad corresponde a una cantidad geomátrica: $g_{\mu\nu}$ describe la métrica del espacio-tiempo, R es el llamado escalar de curvatura de Ricci, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci y Λ es frecuentemente llamada constante cosmológica. Del lado derecho de la igualdad, además de la constante de gravitación universal de Newton G y la rápidez de la luz en el vacío c, aparece el tensor de energía-momento, que describe la materia y energía que "montamos sobre" la geométria del espacio-tiempo.

La solución de Schwarzschild es una solución estática de las ecuaciones del vacío, con simetría esférica. Por lo tanto, es una buena descripción para el campo gravitatorio causado por objetos masivos esféricos, como estrellas y planetas. En particular, son precisamente las geodésicas de la métrica de Schwarzschild que nos permite calcular correcciones relativistas a las órbitas planetarias y la deflexión de la luz. En ausencia de energía y materia, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ es cero y las ecuaciones de Einstein se reducen a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

La solución de Schwarzschild viene dada por [9, pág 191 - 193]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{5}$$

La interpretación y algunas propiedades físicas de la solución de Schwarzschild son:

- Describe un objeto esférico y estático en el origen
- M es una medida para la masa del objeto que causa la curvatura del espacio. A veces se denomina a M como la *masa geométrica* de la solución de Schwarzschild.
- Para grandes valores de la coordenada radial r, el factor $\frac{M}{r} << 1$ y la métrica se aproxima cada vez más a la metrica de Minkowski sobre espacio-tiempo plano en coordenadas esféricas. Las soluciones con esta propiedad se llaman *asintóticamente planas* y se las puede ver como objetos aislados.

Los problemas que presenta esta métrica son las llamadas singularidades, que desde un punto de vista físico, corresponden a una zona del espacio-tiempo donde no se puede definir alguna magnitud física relacionada con los campos gravitatorios tales como la curvatura, u otras. Las singularidades pueden ser:

- **De coordenadas:** Son el resultado de haber escogido un mal sistema de coordenadas. Algunas de estas singularidades de coordenadas indican el horizonte de sucesos, que es

una hipersuperficie frontera del espacio-tiempo, tal que los eventos a un lado de ella no pueden afectar a un observador situado al otro lado. En la métrica de Schwarzschild es: $r = 2M$

- **Físicas:** Son singularidades espacio-temporales, se diferencia de las de coordenadas porque en algunas de las contracciones del tensor de curvatura dadas por $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, éste diverge, donde $R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ es el *tensor de Riemann*, de acuerdo a la teoría de la relatividad, este tipo de singularidad es un punto teórico con volumen cero y densidad infinita; de modo en esta zona del espacio-tiempo no se puede definir alguna magnitud fisíca. En la métrica de Schwarzschild es: $r = 0$

4.3 Gravedad en bajas dimensiones

El interés en teorías gravitatorias en bajas dimensiones *(menor de cuatro dimensiones)* se debe principalmente a disminución de la complejidad en los cálculos y además que muchos de los problemas resueltos en estas teorías se pueden extrapolar a a que modelos de más alta dimensión, es por todo esto que han sido enormemente usados en prácticamente todas las ramas de la física. Algunos ejemplo son:

- En mecánica cuántica, potenciales constantes en una dimensión nos proveen el ejemplo más sencillo de cuantización de la energía y tunelaje.
- En mecánica estadística, el modelo Ising dos dimensional es un sistema exactamente soluble exhibiendo transiciones de fase.
- En teoría de campos la inclusión de campos escalares en espacio-tiempo bidimensionales, son usados para describir efectos tales como quiebres espontáneos de simetría.

Modelos como los anteriores son importantes porque ellos generan nuevas ideas y entregan para sus contrapartes en altas dimensiones. Además las teorías en bajas dimensiones son un escenario en el cual ciertos fenómenos físicos básicos pueden ser fácilmente demostrados evitando la complejidad matemática de trabajar en dimensiones más altas.

Las ecuaciones de campo de Einstein tiene soluciones tipo agujero negro para 2+1 dimenciones, una de las más famosas es el agujero negro BTZ que recibe su nombre debido a que fue descubierto por los físicos chilenos Bañados, Teitelboim y Zanelli **CITAR EL ARTICULO**. Para 1+1 dimensiones no posee soluciones agujero negro es por ello que se deben modificar o cambiar. Ejemplos de teorías de gravedad para bajas dimensiones son:

- Gravedad de Hořava
- Teoría de cuerda
- Gravedad AdS3
- Gravedad Cuántica de Bucles

Para esta AFE consideramos un agujero negro de 1+1 dimesiones proveniente de la gravedad dilatónica, que aparece en la teoría de cuerda. El dilatón es una partícula hipotética presente en esta teoría asociada a un campo escalar ϕ (el campo dilatonico) que hace variar la

constante de Newton otorgándole dinámica al espacio-tiempo. Descrito por la siguiente acción [1]-[2].

$$S_g = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}[R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2] \tag{6}$$

Ya que tiene solución de agujero negro con las propiedades deseadas. En primer lugar se conoce en forma explícita; en segundo lugar se la solución tiene propiedades similares a las del agujero negro de Schwarzschild, es asintóticamente plano.

4.4 Perturbaciones sobre agujeros negros debido a campos clásicos

Los agujeros negros son objetos monstruosos que se encuentran no aislados sino más bien rodeados de materia, energía y/o radiación en el universo, he ahí donde radica la importancia de estudiar su comportamiento bajo las perturbaciones que se puedan generar. Existen 3 tipos de perturbaciones:

- Gravitacionales
- Electromagnéticas
- Escalares

Cuando el agujero negro es perturbado existen tres instantes característicos de su vibración.

1. Alta excitación: depende de la forma de la onda inicial.
2. Periodo de amortiguamiento caracterizado por los llamados modos cuasi-normales y sus respectivas frecuencias cuasi-normales.
3. Decaimiento tipo cola

La figura abajo muestra la evolución temporal de una perturbación gravitacional en el entorno de un agujero negro de Schwarzschild.

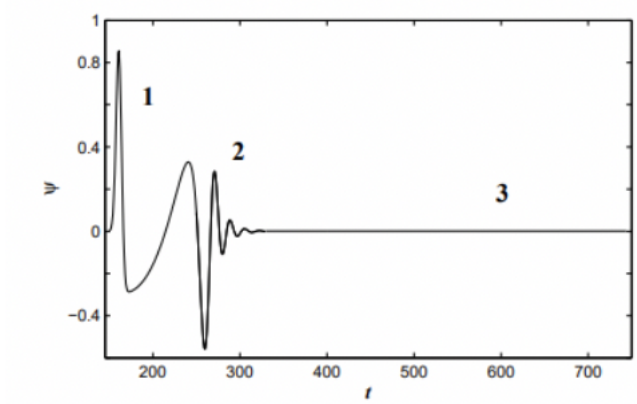


Figura 1: Onda gravitacional en el tiempo

4.4.1 Modos cuasi-normales

Los modos cuasinormales son la manifestación de las oscilaciones resonantes del propio espacio-tiempo del agujero negro y dominan las etapas intermedias de la evolución de la perturbación, sus frecuencias son llamadas cuasi-normales y se caracterizan por tener tanto parte real como imaginaria, siendo la parte real la relacionada con la frecuencia de oscilación del agujero negro y el valor absoluto de su parte imaginaria a la taza a la cual los modos se amortiguan o crecen. Si el agujero negro es estable la parte imaginaria de los modos debe ser negativa para que estos decaigan exponencialmente en el tiempo y el agujero negro pueda volver a su configuración de equilibrio.

En esta AFE nos centraremos en la obtención analítica de los modos cuasi-normales presentes en el periodo de amortiguamiento de un agujero negro de 1+1 dimenciones proveniente de gravedad Dilatónica debido a un campo escalar.

4.4.2 Significado físico

El estudio astrofísico de las ondas gravitacionales se debe a que estas llevan información importante sobre los agujeros negros (masa, momentum angular, carga), además desde el punto de vista teórico se pueden estudiar la estabilidad de los agujeros negros vía modos cuasinormales, tema importante ya que uno desea que los agujeros negros sean estables bajo distintas perturbaciones, por otra parte están ligados a la cuantización del área de los agujeros negros, y a probar nuevas teorías sobre la gravedad.

5 Modelo matemático

5.1 Solución general a la ecuación de propagación de un campo escalar

5.1.1 Deduccion de la ecuación de Klein-Gordon:

Para obtener los modos cuasi-normales de pertubación de un agujero negro por un campo escalar con acoplamiento no-mínimo (NMC, por sus siglas en inglés) se debe obtener la ecuación de onda dada descrito por la acción.

$$S[\varphi] = \frac{-1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}\left((\nabla\varphi)^2 + (m^2+\xi R)\varphi^2\right) \tag{7}$$

Donde m y R corresponde a la masa del agujero negro y al escalar de curvarura respectivamente, además ξ es el parámetro de acoplamiento no-minimal, es un término que permite acoplar el campo escalar a la curvatura, es decir a la geométria. Dos valores para el parámetro de acoplamiento no minimal más comunes en la literatura son: $\xi = 0$ es acoplamiento mímimo, mientras que $\xi \neq 0$ es para NMC, este último es necesario para la renormalización de la teoría de campo escalar en un espacio curvado.
Aplicando el principio varacional respecto de φ obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange [A]

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho\varphi\right)}\right) = 0 \tag{8}$$

Donde el Lagrangiano del campo escalar masivo acoplado no minimalmente a la curvatura esta dado por: $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + (m^2+\xi R)\varphi^2\right]$, sus respectivas derivadas son:
(considerando que $(\nabla\varphi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\partial_\mu\varphi$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= 2\sqrt{-g}(m^2+\xi R)\varphi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\varphi)} &= 2(\sqrt{-g}g^{\rho\nu}\partial_\nu\varphi)\end{aligned} \tag{9}$$

Reemplazando (9) en (8), obtenemos:

$$2\sqrt{-g}(m^2+\xi R)\varphi - 2\partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\rho\nu}\partial_\nu\varphi] = 0 \tag{10}$$

Dividiendo por $2\sqrt{-g}$, se obtiene:

$$(m^2+\xi R)\varphi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\rho\nu}\partial_\nu\varphi] = 0 \tag{11}$$

Definiendo en operador d'Alembertiano en 2 dimensiones como:

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu] \tag{12}$$

Podemos reescribir (11) obteniendo la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar acoplado no mímimalmente a la curvatura :

$$(\Box - m^2 - \xi R)\varphi = 0 \tag{13}$$

5.1.2 Coeficientes métricos

La métrica se obtiene como solución a la acción de la gravedad acoplada al campo dilatón ϕ, en dos dimensiones esta dada por la acción:

$$S_g = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}[R + 4(\nabla\phi)^2 + 4\lambda^2] \tag{14}$$

La solución más general para una métrica estática esta dada por:

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \tag{15}$$

Para esta teoría (14) la función $f(r)$ y la correspondiente solución para el campo dilatónico $\phi(r)$ son:

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - e^{-\phi(r)} \\ \phi(r) &= \frac{r - r_0}{r_0} \end{aligned} \tag{16}$$

Esta solución en la acción de la gravedad dilatónica (14) describe un agujero negro en la teoría de cuerdas [2], donde el horizonde de eventos se ubica en $f(r) = 0$, que implica que $r = r_0$. Al igual que el agujero negro de Schwarzschild es asintóticamente plano cuando $r \to \infty$, es decir tiende a la métrica asintótica de de Minkowsky:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 \tag{17}$$

La métrica contiene solo un parámetro r_0 que determina la posición del horizonte. El escalar de curvatura R es:

$$R = -\frac{d^2f}{dr^2} = \frac{1}{r_0^2}e^{-\frac{r-r_0}{r_0}} \tag{18}$$

A partir de la ecuación (18) obtemos que la singularidad física se ubica en $r \to -\infty$, ya que en este punto el escalar de curvatura se hace infinito (explota).

Aplicando el cambio de variable

$$x = \frac{r - r_0}{r_0} \tag{19}$$

Así se tiene que:

- $x = 0$ cuando $r \to r_0$
- $x \to \infty$ cuando $r \to \infty$

Trabajando la ecuación de Klein-Gordon (13) se obtiene:

$$\begin{aligned} (\Box - m^2 - \xi R)\varphi &= 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu] - m^2 - \xi R\right)\varphi &= 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}[\partial_t(\sqrt{-g}g^{tt}\partial_t + \partial_x(\sqrt{-g}g^{xx}\partial_x)] - m^2 - \xi R\right)\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Donde:

$$\sqrt{-g} = 1\,, \qquad g^{tt} = \frac{-1}{f} = \frac{-1}{1-e^{-x}}\,, \qquad g^{xx} = f = 1 - e^{-x}\,, \qquad R = \frac{1}{r_0^2}e^{-x} \tag{20}$$

Así se obtiene:

$$\partial_t\left(\frac{-1}{f(x)}\partial_t\varphi\right) + \partial_x(f(x)\partial_x\varphi) - \Big(m^2 + \xi R\Big)\,\varphi = 0 \tag{21}$$

Reemplazando los coeficientes métricos se obtiene:

$$\partial_t\left(\frac{-1}{1-e^{-x}}\partial_t\varphi\right) + \partial_x((1-e^{-x})\partial_x\varphi) - \left(m^2 + \frac{\xi}{r_0^2}e^{-x}\right)\varphi = 0 \tag{22}$$

5.1.3 Ecuación Hipergeométrica

Aplicando el método de separación de variables donde asumimos una dependencia en el tiempo. Establecemos el Ansatz:

$$\varphi(x,t) = e^{-i\omega t}R(x) \tag{23}$$

Sustituyendo en la ecuación (22),

$$\partial_t\left(\frac{-1}{1-e^{-x}}\partial_t(e^{-i\omega t}R(x))\right) + \partial_x((1-e^{-x})\partial_x(e^{-i\omega t}R(x))) - \left(m^2 + \frac{\xi}{r_0^2}e^{-x}\right)e^{-i\omega t}R(x) = 0$$

$$\partial_t\left(\frac{i\omega}{1-e^{-x}}e^{-i\omega t}R(x)\right) + \partial_x\left((1-e^{-x})e^{-i\omega t}\frac{dR(x)}{dx}\right) - \left(m^2 + \frac{\xi}{r_0^2}e^{-x}\right)e^{-i\omega t}R(x) = 0$$

$$\frac{-(i\omega)^2}{1-e^{-x}}e^{-i\omega t}R(x) + e^{-x}e^{-i\omega t}\frac{dR(x)}{dx} + (1-e^{-x})e^{-i\omega t}\frac{d^2R(x)}{dx^2} - \left(m^2 + \frac{\xi}{r_0^2}e^{-x}\right)e^{-i\omega t}R(x) = 0$$

Obteniendo:

$$\left[(1-e^{-x})\frac{d^2R(x)}{dx^2} + e^{-x}\frac{dR(x)}{dx} + \left(\frac{\omega^2}{1-e^{-x}} - m^2 - \frac{\xi}{r_0^2}e^{-x}\right)R(x)\right]e^{-i\omega t} = 0 \tag{24}$$

Como $e^{-i\omega t} \neq 0$, $\forall t$, se tiene:

$$(1-e^{-x})\frac{d^2R(x)}{dx^2} + e^{-x}\frac{dR(x)}{dx} + \left(\frac{\omega^2}{1-e^{-x}} - m^2 - \frac{\xi}{r_0^2}e^{-x}\right)R(x) = 0 \tag{25}$$

Realizando en cambio de variable:

$$z = 1 - e^{-x} \tag{26}$$

De la definición de z, encontramos que:

- $z = 1$ cuando $r \to \infty$
- $z = 0$ cuando $r \to r_0$

De manera que,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (1-z)\frac{dR}{dz}$$
$$\frac{d^2R}{dx^2} = \frac{d^2R}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dR}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} = (1-z)^2\frac{d^2R}{dz^2} - (1-z)\frac{dR}{dz} \tag{27}$$

Sustituyendo (27) en la ecuación (25), obtenemos:

$$z\left((1-z)^2\frac{d^2R}{dz^2} - (1-z)\frac{dR}{dz}\right) + (1-z)^2\frac{dR}{dz} + \left[\frac{\omega^2}{z} - m^2 - \frac{\xi}{r_0^2}(1-z)\right]R = 0$$
$$z(1-z)\frac{d^2R}{dz^2} + (1-2z)\frac{dR}{dz} + P(z)R = 0 \tag{28}$$

Donde,

$$P(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + C \tag{29}$$

Con,

$$A = \omega^2; \qquad B = \omega^2 - m^2; \qquad C = -\frac{\xi}{r_0^2} \tag{30}$$

Ahora podemos redefinir $R(z)$ como:

$$R(z) = z^\alpha(1-z)^\beta F(z) \tag{31}$$

Calculamos $\frac{dR}{dz}$ y $\frac{d^2R}{dz^2}$

$$\frac{dR}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}(1-z)^\beta F(z) - \beta z^\alpha(1-z)^{\beta-1}F(z) + z^\alpha(1-z)^\beta\frac{dF}{dz} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{dz^2} =& \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}(1-z)^\beta F(z) - \alpha\beta z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}F(z) + \alpha z^{\alpha-1}(1-z)^\beta\frac{dF}{dz} \\ &- \alpha\beta z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}F(z) + \beta(\beta-1)z^\alpha(1-z)^{\beta-2}F(z) - \beta z^\alpha(1-z)^{\beta-1}\frac{dF}{dz} \\ &+ \alpha z^{\alpha-1}(1-z)^\beta\frac{dF}{dz} - \beta z^\alpha(1-z)^{\beta-1}\frac{dF}{dz} + z^\alpha(1-z)^\beta\frac{d^2F}{dz^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{dz^2} =& \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}(1-z)^\beta F(z) - 2\alpha\beta z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}F(z) + 2\alpha z^{\alpha-1}(1-z)^\beta\frac{dF}{dz} \\ &+ \beta(\beta-1)z^\alpha(1-z)^{\beta-2}F(z) - 2\beta z^\alpha(1-z)^{\beta-1}\frac{dF}{dz} + z^\alpha(1-z)^\beta\frac{d^2F}{dz^2}\end{aligned} \tag{33}$$

Reemplazamos (32) y (33) en la ecuación (28).

$$
\begin{aligned}
z(1-z)\Big(\alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}(1-z)^{\beta}F(z)-2\alpha\beta z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}F(z)+2\alpha z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta}\frac{dF}{dz}\\
+\beta(\beta-1)z^{\alpha}(1-z)^{\beta-2}F(z)-2\beta z^{\alpha}(1-z)^{\beta-1}\frac{dF}{dz}+z^{\alpha}(1-z)^{\beta}\frac{d^2F}{dz^2}\Big)\\
+(1-2z)\Big(\alpha z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta}F(z)-\beta z^{\alpha}(1-z)^{\beta-1}F(z)+z^{\alpha}(1-z)^{\beta}\frac{dF}{dz}\Big)\\
+P(z)z^{\alpha}(1-z)^{\beta}F(z)=0
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Reduciendo obtenemos:

$$
z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2}+(1+2\alpha-(2+2\alpha+2\beta)z)\frac{dF}{dz}+\left(\frac{\bar{A}}{z}+\frac{\bar{B}}{1-z}+\bar{C}\right)F(z)=0 \tag{35}
$$

Donde,

$$
\begin{aligned}
\bar{A}&=A+\alpha^2\\
\bar{B}&=B+\beta^2\\
\bar{C}&=C-(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta
\end{aligned}
\tag{36}
$$

La ecuación (35) se asemeja ecuación diferencial hipergeométrica cuya forma es [8, Sección 15, pág. 562]:

$$
z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2}+(c-(1+a+b)z)\frac{dF}{dz}-abF=0 \tag{37}
$$

Ahora, comparando los coeficientes de la ecuación (35) y (37), se obtienen las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
c&=1+2\alpha\\
1+a+b&=2+2\alpha+2\beta\\
\bar{A}&=A+\alpha^2=0\\
\bar{B}&=B+\beta^2=0\\
ab=-\bar{C}&=-C+(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$
\alpha=\pm i\omega \tag{39}
$$

$$
\beta=\pm i\sqrt{\omega^2-m^2} \tag{40}
$$

Y los coeficientes,

$$
\begin{aligned}
a&=\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma\\
b&=\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma\\
c&=1+2\alpha
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Donde:

$$\gamma = \pm\frac{\sqrt{1+4C}}{2} = \pm\frac{\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}}}{2} \tag{42}$$

La ecuación diferencial hipergeométrica (37) posee dos soluciones linealmente independientes cerca del horizonte, dadas por [8, Sección 15, pág. 563]

$$F(a,b,c;z) \qquad and \qquad z^{(1-c)}F(a-c+1,b-c+1,2-c;z) \tag{43}$$

Donde $F(a,b,c;z)$ corresponde a la función hipergeométrica que converge para $|z|=1$; definida por:

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!} \tag{44}$$

Y la función $\Gamma(z)$ se define por:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \tag{45}$$

Con los valores anteriores para a, b y c, la solución de la ecuación (35) es:

$$\begin{aligned} F(z) =& C_1F(\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma,1+2\alpha;z) \\ &+ C_2z^{-2\alpha}F(-\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,-\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma,1-2\alpha;z) \end{aligned} \tag{46}$$

Asi la solución general para la parte radial de la ecuación es:

$$\begin{aligned} R(z) =& C_1z^{\alpha}(1-z)^{\beta}F(\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,1+2\alpha;z) \\ &+ C_2z^{-\alpha}(1-z)^{\beta}F(-\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,-\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma,1-2\alpha;z) \end{aligned} \tag{47}$$

Finalmente la solución general para del campo escalar es:

$$\begin{aligned} \varphi(z,t) =& C_1z^{\alpha}(1-z)^{\beta}F(\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma,1+2\alpha;z)e^{-i\omega t} \\ &+ C_2z^{-\alpha}(1-z)^{\beta}F(-\alpha+\beta+\frac{1}{2}+\gamma,-\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\gamma,1-2\alpha;z)e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{48}$$

5.2 Solución con condiciones de borde

5.2.1 Condiciones de borde

Para determinar los modos libres de oscilación de un agujero negro, que corresponden a soluciones naturales de este ODE no forzado, debemos imponer condiciones de borde físicamente apropiadas en el horizonte y en el infinito espacial. Estas condiciones de contorno se analizan a continuación.

- **Cerca del horizonte de eventos**: ya que el horizonte de eventos desde el punto de vista clásico es una región del espacio-tiempo que solo permite el paso de materia hacia su interior, cerca del horizonte debe ser **ingoing** (entrante).

$$e^{-i\omega r_*} \tag{49}$$

Donde r_* se conoce como *coordenada tortuga*[4]

- **En el infinito**: la condición de borde depende si el espacio-tiempo es asintóticamente plano o AdS (Anti de Sitter).
  En nuestro caso el espacio-tiempo es asintóticamente plano luego la condición de borde es que sólo existan onda **outgoing** (salientes) en el infinito.

$$e^{i\omega r_*} \tag{50}$$

5.2.2 Solución en la región cercana al horizonte

Al analizar la ecuación (47) en el horizonte del BH donde $r \to r_0$, es decir cuando $z \to 0$. Cabe recalcar que la ecuación (47) es simétrica respecto al parámetro α, por lo que para todos los cálculos de esta AFE se usara el signo positivo para α (39).
Mientras más se aproxima z al horizonte la solución dada en la ecuación (47) se aproxima a:

$$R(z \to 0) = C_1 z^{\alpha} + C_2 z^{-\alpha} \tag{51}$$

Note que $F(a, b, c; z)$ y $(1 - z)^{\beta}$ tienden a 1 cuando $z \to 0$. Reescribiendo (51), como:

$$R(z \to 0) = C_1 e^{iw \ln z} + C_2 e^{-iw \ln z} \tag{52}$$

La coordenada tortuga esta dada por:

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)} = \frac{1}{r_0} \ln \left(e^{\frac{r - r_0}{r_0}} - 1 \right) \tag{53}$$

Cuando $r \to r_0$. Podemos aproximar a z de la siguiente manera:

$$z \approx \frac{r - r_0}{r_0} \tag{54}$$

De esa forma se puede aproximar la coordenada tortuga por, así podemos escribir:

$$r_* = \frac{1}{r_0} \ln \left(e^z - 1 \right) \tag{55}$$

Note que podemos aproximar $e^z - 1$ por z cuando $z \to 0$, donde se puede obtener:

$$r_* = \frac{1}{r_0} \ln \left(z \right) \tag{56}$$

Reemplazando en la ecuación (52), se obtiene:

$$R(r \to r_0) = C_1 e^{i\widehat{\omega} r_*} + C_2 e^{-i\widehat{\omega} r_*} \tag{57}$$

Donde:

$$\widehat{\omega} = r_0 \omega \tag{58}$$

[4]La coordenada tortuga lo que hace es mover el horizonte de eventos hacia menos infinito y el infinito espacial queda igual en más infinito.

El primer y segundo término de la ecuación (57) corresponde a una onda outgoing y ingoing respectivamente. Ahora aplicando las condiciones de borde dadas en (50), se concluye que $C_1 = 0$ y $C_2 \neq 0$ ya que la onda en el horizonte debe ser puramente ingoing. Por lo tanto la solución en el horizonte esta dada por:

$$R(z \to 0) = C_2 z^{-\alpha}(1-z)^{\beta} F\left(-\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}, -\alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}, 1-2\alpha; z\right) \tag{59}$$

5.2.3 Solución en la región asintótica

Ahora calculamos la solución en la región asintótica, es decir cuando $r \to \infty$. Para valores de r tendiendo al infinito podemos aproximar la función $f(r)$ definida en (16) por:

$$f(r) \to 1 - \frac{r_0}{r} = 1 - \frac{1}{x} \tag{60}$$

Con $x = \dfrac{r}{r_0}$,reemplazando en la ecuación (21) y simplificando se obtiene:

$$-\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{dR(x)}{dx} + \left[\left(\frac{x}{x-1}\right)\omega^2 - m^2 + \frac{2\xi}{x^3}\right]R(x) = 0 \tag{61}$$

Para valores de x tendiendo a infinito la ecuación diferencial anterior se reduce a:

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} - \left[\omega^2 - m^2\right]R(x) = 0 \tag{62}$$

La ecuación (62) es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general es:

$$R(r \to \infty) = D_1\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\beta} + D_2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{-\beta} \tag{63}$$

La expresión de β esta definida es la ecuación (44). Note que la forma de la solución en la ecuación (59) es escogida para facilitar compararla con las soluciones a medida en la sección siguiente.

5.2.4 Solución cerca del horizonte y la región asintótica

Para obtener las soluciones cerca del hotizonte y la región asintotica, se debe hacer coincidir la solución asintótica dada en la ecuación (63) con la solución en dada cerca del horizonte dada en (59). Para obtener el comportamiento cuando $z \to 1$ de la ecuación (59) aplicamos la transformación de la función hipergeométrica presente en [8, Sección 15, pág. 559] definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(a,b,c;z) =& \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a,b,a+b-c+1;1-z) \\ &+ (1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z) \end{aligned} \tag{64}$$

Aplicando la transformación a la ecuación (59) y sustituyendo los valores de a, b y c, se puede obtener la solución de la ecuación de onda en la región asintótica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R(z) =& C_2 \frac{z^{-\alpha}(1-z)^{\beta}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)} F\left(-\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}, -\alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}, 2\beta+1; 1-z\right) \\ &+ C_2 \frac{z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)} F\left(-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}, -\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}, 1-2\beta; 1-z\right) \end{aligned} \tag{65}$$

Tomando el límite de $R(z)$ cuando $z \to 1$ (es decir $r \to \infty$), obtenemos:

$$\begin{aligned} R(z \to 1) =& C_2 (1-z)^{\beta} \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)} \\ &+ C_2 (1-z)^{-\beta} \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \tag{66}$$

Note que reemplazamos $F(a, b, c; 1-z)$ y $z^{-\alpha}$ por 1 cuando z se aproxima a 1. Considerando podemos aproximar $1-z$ por $z \approx \frac{r_0}{r}$ cuando $r \to \infty$, se obtiene la siguiente expresión para $R(z)$:

$$\begin{aligned} R(r \to \infty) =& C_2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\beta} \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)} \\ &+ C_2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-\beta} \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \tag{67}$$

Comparando la ecuación (63) y (67), los coeficientes D_1 y D_2 se escriben como:

$$D_1 = C_2 \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(-2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)} \tag{68}$$

$$D_2 = C_2 \frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(2\beta)}{\Gamma\left(-\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\alpha+\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)} \tag{69}$$

Para determinar cual parte de la solución en (63) corresponde a las *ingoing* y *outgoing* respectivamente, Usamos la siguiente aproximación de la coordenada tortuga r_* en términos de r para valores tendiendo a infinito.

$$r_* \approx \frac{1}{r_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{70}$$

Donde,

$$r \approx r_0 e^{r_0 r_*} \tag{71}$$

Sustituyendo (71) y β definido en (40) en la ecuación (63) y reescribiendo como:

$$R(r \to \infty) = D_1 e^{-i\breve{\omega} r_*} + D_2 e^{i\breve{\omega} r_*} \tag{72}$$

Donde:

$$\breve{\omega} = r_0 \sqrt{\omega^2 - m^2} \tag{73}$$

De (72) se deduce que el primer término y el segundo representan las ondas *ingoing* y *outgoing* respectivamente.

5.3 Modos cuasinormales del agujero negro dilatónico

Los modos cuasinormales de una perturbación clásica del espacio-tiempo de un agujero negro se definen como las soluciones de las ecuaciones de onda relacionadas con ondas puramente *ingoing* en el horizonte. Además, también hay que imponer condiciones de contorno a las soluciones en la región asintótica. En el espacio-tiempo asintóticamente plano, el segundo límite es que la solución sea puramente *outgoing* en el infinito espacial, (como se define en la **sección 5.2.1**)

Considerando el campo $R(z)$ a grandes distancias dado por la ec. (67). Es evidente que el segundo término desaparece cuando $r \to \infty$. Esto también puede verse en la ecuación (65), donde el segundo término desaparece para $z \to 1$. Puesto que C_2 no es cero, el primer término desaparece sólo en los polos de las funciones Gamma $\Gamma\left(-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}\right)$ ó $\Gamma\left(-\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}\right)$. Nótese que la función Gamma $\Gamma(x)$ tiene polos en $x=-n$ para $n=0,1,2,...$ Por lo tanto, para obtener QNM's, se deben cumplir las siguientes relaciones.

$$-\alpha-\beta-\gamma+\frac{1}{2}=-n \tag{74}$$

ó

$$-\alpha-\beta+\gamma+\frac{1}{2}=-n \tag{75}$$

Las dos ecuaciones anteriores conducen a las dos posibilidades siguientes para β,

$$\beta=\left(\frac{1}{2}+n\right)-\alpha\pm\gamma \tag{76}$$

Reemplazando los valores de α y γ de (40) y (44) respectivamente, se obtiene:

$$\beta=\left(\frac{1}{2}+n\right)-i\omega\pm\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}} \tag{77}$$

Reescribiendo la ecuación (41) con el resultado anterior obtenemos:

$$\omega^2-m^2+\left[\left(\frac{1}{2}+n\right)-i\omega\pm\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}}\right]^2=0 \tag{78}$$

Resolviendo la ecuación anterior para ω, se tiene:

$$\omega_+=-i\frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+\left(1-4\frac{\xi}{r_0^2}\right)+2\left(\frac{1}{2}+n\right)\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}}-m^2}{2\left[\left(\frac{1}{2}+n\right)+\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}}\right]} \tag{79}$$

$$\omega_-=-i\frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+\left(1-4\frac{\xi}{r_0^2}\right)-2\left(\frac{1}{2}+n\right)\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}}-m^2}{2\left[\left(\frac{1}{2}+n\right)-\sqrt{1-4\frac{\xi}{r_0^2}}\right]} \tag{80}$$

Las frecuencias cuasinormales son puramente imaginarias si $\xi<\dfrac{r_0^2}{4}$, en caso contrario se puede separar en, $\omega=\omega_{real}+\omega_{imaginario}$

6 Resultados

6.1 Modos fudamentales ($n = 0$)

Analizaremos el comportamiento de $Im(\omega)$ para $n = 0$, para los valores $\xi' = \dfrac{\xi}{r_0^2}$, considerando $\omega = \omega_+$ para esta sección.

6.1.1 Modo fundamental para $\xi' < \frac{1}{4}$

Para $\xi' < \frac{1}{4}$, los modos fundamentales estan dados por.

$$\omega = -i\frac{\frac{5}{4} - 4\xi' + \sqrt{1-4\xi'} - m^2}{1 + 2\sqrt{1-4\xi}} \tag{81}$$

Estas frecuencias son puramente imaginarias, pero no son todas negativas, por lo tanto, para garantizar la estabilidad se tiene que cumplir:

$$\frac{5}{4} - 4\xi' + \sqrt{1-4\xi'} - m^2 > 0 \tag{82}$$

Donde se obtiene que ξ' debe satisfacer la siguiente condición:

$$\xi' < \frac{1}{16}\left(-4m^2 + 4m + 3\right) \tag{83}$$

En la figura 2 podemos observar que para $m = 1$, las frecuencias son puramente imaginarias y negativas si $\xi' < \frac{3}{16}$. Para valores de ξ' pertenecientes a $\left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right)$ las frecuencias cuasinormales son positivas lo cual indica que perturbaciones escalares que excitan el modo fundamental son inestables.

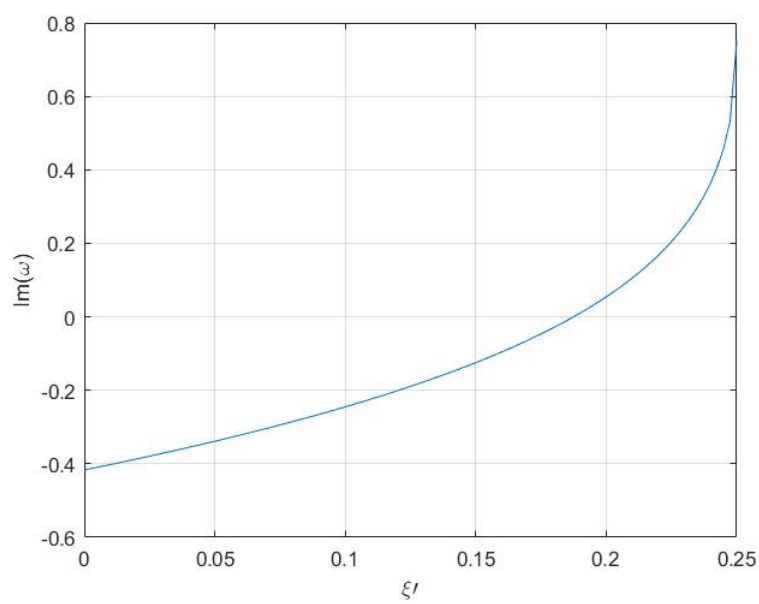


Figura 2: Parte imaginaria de ω Vs ξ' para $n = 0$, $m = 1$; para $\xi' \in (0, \frac{1}{4})$

6.1.2 Modo fundamental para $\xi' > \frac{1}{4}$

Para $\xi' > \frac{1}{4}$, los modos fundamentales están dados por:

$$\omega = -i\frac{\frac{5}{4} + 4\xi' + i\sqrt{4\xi' - 1} - m^2}{1 + 2i\sqrt{4\xi' - 1}} \tag{84}$$

Note que se utilizó la siguiente equivalencia para $\sqrt{1 - 4\xi'} = i\sqrt{4\xi' - 1}$, ya que $\xi' > \frac{1}{4}$. Reescribiendo (84) de la forma $\omega = \omega_{real} + \omega_{imaginario}$, se obtiene:

$$\omega_{real} = -\frac{8\xi'\sqrt{4\xi' - 1} - \frac{6}{4}\sqrt{4\xi' - 1} + m^2\sqrt{4\xi' - 1}}{16\xi' + 3} \tag{85}$$

$$\omega_{imaginario} = -i\frac{-\frac{5}{4} + 4\xi' + m^2 - 2(4\xi' - 1)}{16\xi' + 3} \tag{86}$$

Para garantizar la estabilidad se tiene que cumplir:

$$-\frac{5}{4} + 4\xi' + m^2 - 2(4\xi' - 1 > 0 \tag{87}$$

Donde se obtiene la siguiente restricción para ξ'

$$\xi' > \frac{1}{16}(4m + 3) \tag{88}$$

En la figura 3 podemos obervar que para $m = 1$, la parte imaginaria de ω es negativa si $\xi' > \frac{7}{16}$ por lo que en este intervalo las frecuencias fundamentales son estables y amortiguadas.

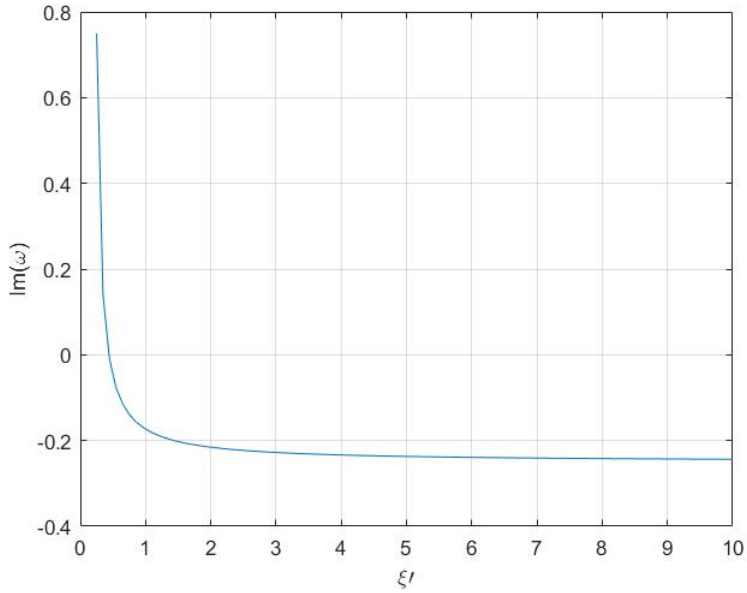
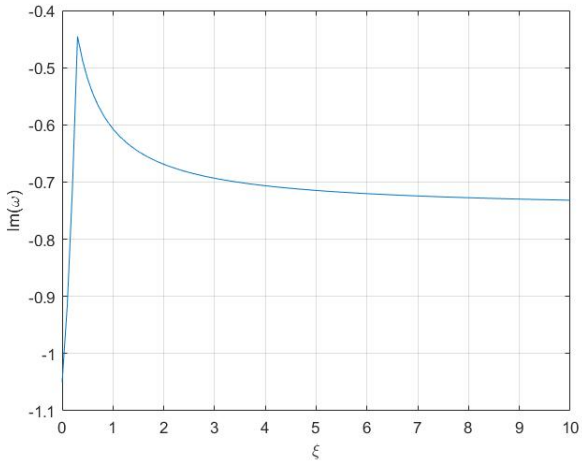
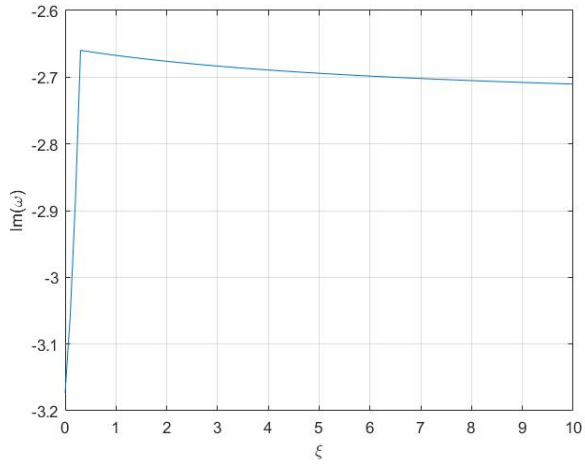


Figura 3: Parte imaginaria de ω Vs ξ' para $n = 0$, $m = 1$; para $\xi' \in (\frac{1}{4}, 10)$, con $\xi' = \frac{\xi}{r_0^2}$

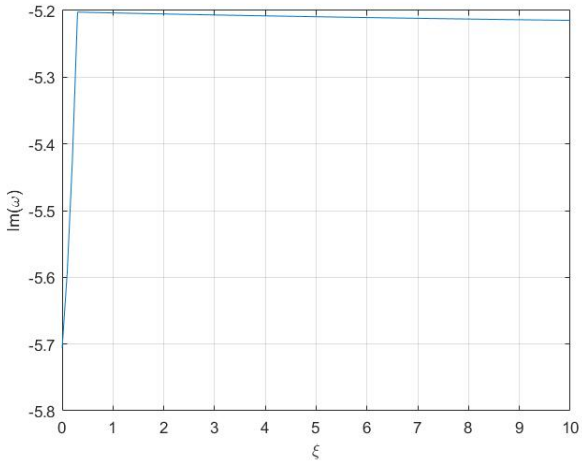
6.2 Graficos frecuencias QNM



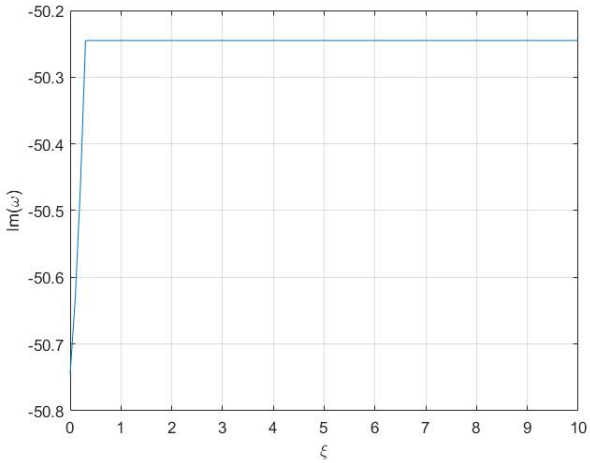
(a) $n = 1$



(b) $n = 5$



(c) $n = 10$



(d) $n = 100$

Figura 4: $Im(\omega)$ vs ξ' para $m = 1$ y distintos valores de n

Analizando los graficos de las QNM para $n > 0$ observamos que la parte imaginaria $Im(\omega)$ en función del parametro de acoplamiento no minimal son negativas y tienden a estabilizarce a medida que este crece.

6.3 Frecuencias QNM de escalares neutros con $\xi = 0$

Considerando el parámetro de acoplamiento no-minimal $\xi = 0$, se obtiene las siguientes soluciones para las frecuencias QNM's:

$$\omega_+ = -\frac{i}{2\left(n+\frac{3}{2}\right)}\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)^2 - m^2\right) \qquad , n = 0, 1, 2, ... \tag{89}$$

$$\omega_- = -\frac{i}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - m^2\right) \qquad , n = 0, 1, 2, ... \tag{90}$$

Con la condición de estabilidad $n > m + \frac{1}{2}$, las frecuencias QNM's son puramente imaginarias.

6.4 Ecuación tipo Schrödinger

Partiendo de la ecuación de Klein-Gordon (13), se puebe obtener una ecuación tipo Schrödinger aplicando un cambio de variable a la coordenada tortuga $r_* = \ln(e^x - 1)$. Aplicando este cambio al operador d'Alembertiano:

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu] = -\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{91}$$

Donde $x = \frac{r - r_0}{r_0}$, reemplazando las siguiente equivalencia $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{f(r_*)}\frac{\partial}{\partial r_*}$, se obtiene.

$$\Box = -\frac{1}{f(r_*)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{f(r_*)}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} \tag{92}$$

Sustituyendo lo anterior a la ecuación de Klein-Gordon (13), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} - \left(m^2 + \xi R\right) f(r_*)\right)\varphi = 0 \tag{93}$$

Las soluciones a la ecuación anterior pueden construirse a partir de ondas monocromáticas[5] $\varphi \backsim e^{-i\omega t}R(r_* \mid \omega)$ en las que los modos radiales son $R(r_* \mid \omega)$ que obedecen a la ecuación tipo Schrödinger independiente del tiempo:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \omega^2 - \left(m^2 + \xi R\right) f(r_*)\right) R(r_* \mid \omega) = 0 \tag{94}$$

Donde se define la función el potencial $U(x_*)$ como:

$$U(r_*) = \left(m^2 + \xi R\right) f(r_*) \tag{95}$$

[5] Una onda monocromática, u onda armónica, es una onda que puede describirse mediante una función sinusoidal del tiempo. Solo tiene una frecuencia, cuya amplitud depende de la posición debido a la atenuación.

Reescribiendo el escalar de curvatura en términos de la coordenada tortuga,

$$R = \frac{1}{r_0^2} e^{-x} = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{e^{-r_*}}{1 + e^{-r_*}} \right) \tag{96}$$

Reemplazando en la función potencia, obtenemos:

$$U(r_*) = \frac{m^2 r_0^2 + \xi}{r_0^2 \left(1 + e^{-r_*}\right)} - \frac{\xi}{r_0^2 \left(1 + e^{-r_*}\right)^2} \tag{97}$$

Usando el siguiente cambio de variable:

$$z = \frac{1}{1 + e^{-r_*}} \tag{98}$$

Se tiene:

$$U(z) = \left(\frac{m^2 r_0^2 + \xi}{r_0^2} \right) z - \frac{\xi}{r_0^2} z^2 \tag{99}$$

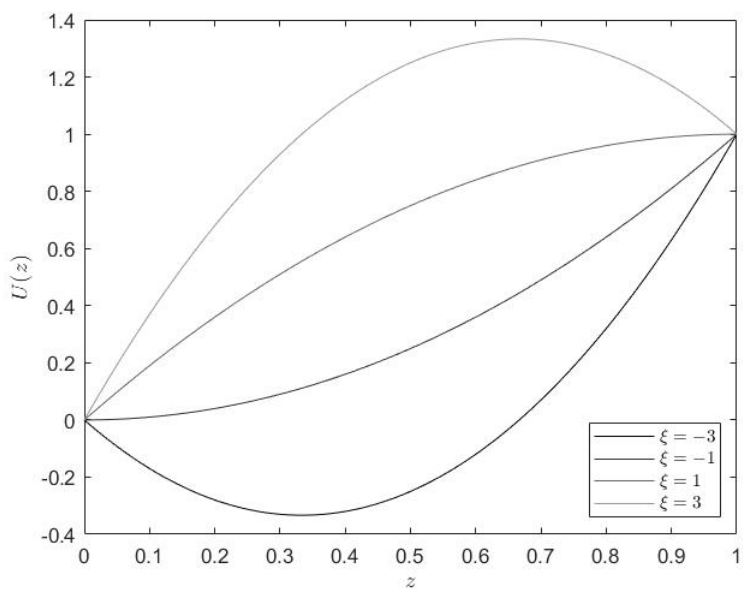


Figura 5: Potencial U(z) para $m^2 = 1, r_0^2 = 1$ en función de z

Así

$$\frac{d}{dz} U(z) = \left(\frac{m^2 r_0^2 + \xi}{r_0^2} \right) - 2 \frac{\xi}{r_0^2} z \tag{100}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} U(z) = -2 \frac{\xi}{r_0^2} \tag{101}$$

La función $U(z)$ tiene un máximo (mínimo) en el intervalo $z \in (0,1)$ cuando $\xi > m^2 r_0^2$ ($\xi < -m^2 r_0^2$), la función $U(z)$ es monótona si $|\xi| < m^2 r_0^2$. Podemos apreciar su comportamiento en la Figura 5. Para valores fijos de masa y horizonte la profundidad del potencial depende de ξ.

Resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, se puede estudiar los efectos cuánticos para un campo escalar cúantico no-minimal para un agujero negro bidimensional, donde se puede obtener y analizar explícitamente los factores de cuerpo gris (greybody factors) y calcular la radiación de Hawking, como se muestra en [3], además de concluir que los estados límite para el campo escalar de masa m cerca del agujero negro cuyo radio gravitatorio r_0 están presentes cuando $-\xi \geq \mu(\mu+1)$, donde $\mu = mr_0$. Estos estados límite conducen a la inestabilidad.

7 Discusión

En este estudio demostramos que para la métrica de agujero negro de gravedad Dilatónica en 1+1 dimensiones motivada por cuerdas la ecuación de campo escalar de Klein-Gordon masivo no mínimalmente acoplado a la curvatura permite soluciones analíticas exactas en términos de funciones hipergeométricas para las frecuencias cuasi-normales. Las frecuencias fundamentales resultaron ser puramente imaginarios para $\xi < \frac{r_0^2}{4}$ y negativas para $\xi < \frac{r_0^2}{16}\left(-4m^2 + 4m + 3\right)$, es decir, son clásicamemte estables y amortiguados (decaen con el tiempo), para $\xi > \frac{r_0^2}{4}$ las frecuencias fundamentales son complejas con parte imaginaria negativa para $\xi > \frac{r_0^2}{16}(4m + 3)$.

Algunas aplicaciones de los QNM's son: la espectroscopía de agujeros negros que nos dice que para dos agujeros negros distintos sus QNM tienen que ser distintos (debido a que están definidos por su masa, momento angular y/o carga) y esto lo podemos explotar de modo inverso, si se detecta los QNM agujero negro se puede inferir sus todas las propiedades; una segunda aplicación de los QNM seria para poder hacer cribados de agujeros negros, que es justamente lo que se realizó en esta AFE, que consiste en analizar la solución tipo agujero negro dada por una teoría, la primera pregunta que nos deberíamos hacer es si ese agujero negro puede existir en la naturaleza, dar una respuesta a esta interrogante es complicado, se puede partir estudianto sus QNM y si todos sus modos cuasinormales son complejos con parte imaginaria negativa es un candidato viable, ahora, basta con que uno de los infinitos modos cuasinormales tenga parte imaginaria positiva para descartarlo.

8 Bibliografía

Referencias

[1] G. Mandal, A. Segupta, and S. Wadia, *Two-dimensional gravity, matrix models and nonperturbative string theory*, Mod. Phys. Lett. A6 1685, (1991)

[2] E. Witten, *String theory and black holes*, Phys. Rev. D 44 314, (1991)

[3] V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic concepts and new developments*, Academic, (1998)

[4] Sharmanthie Fernando, *Quasinormal modes of charget scalars around Dilaton Black Hole in 2+1 dimensions: exact frequencies*, Northern Kentucky University, Kentucky, (2008). arXiv:0802.3321v3 [hep-th] 22 Apr 2008

[5] V. P. Frolov and A. Zelnikov, *Non-minimally coupled massive scarlar Field in a 2D Black Hole: exactly solvable Model*, (2000). arXiv:hep-th/0012252v1 28 Dec 2000

[6] A. López Ortega and I. Vega Acevedo, *Quasinormal frequencies of asymptotically flat two-dimensional Black Holes*, Springer Science Business Media, LLC, (2008). DOI 10.1007/s10714-011-1185-7

[7] S. Estrada Jiménez, J. R. Gómez Díaz and A. López Ortega, *Quasinormal modes of a two-dimensional Black Hole*, México, (2018). arXiv:1308.5943v1 [gr-qc] 27 Aug 2013

[8] M. Abramowitz and A. Stegun, Dover, *Handbook of Mathematical Functions*, (1977).

[9] Bert Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada, España, (2013).

Anexos

A Ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar

Para un campo escalar que viene descrito por $\phi(t,r) = \phi(x)$, con la condición de contorno que el campo permanezca constante en el infinito ($\delta\varphi = 0$), y su dinámica por un langragiano,

$$L = \int dr \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\rho \varphi\right) \tag{102}$$

En adelante, llamaremos lagrangiano a la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$. La acción para el campo esta dado por:

$$S = \int dt L = \int d^2x \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\rho \varphi\right) \tag{103}$$

El principio de mímima acción se escribe:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \varphi\right)}\delta\left(\partial_\rho \varphi\right)\right] \tag{104}$$

Integrando el segundo término por partes se tiene:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \varphi\right)}\delta\left(\partial_\rho \varphi\right) = \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \varphi\right)}\delta\varphi} - \int d^2x \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \varphi\right)}\right)\delta\varphi \tag{105}$$

El primer término de la integración por parte se anula debido a la condición impuesta sobre el campo. Reemplazando en (104), obtiene:

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \varphi\right)}\right)\right]\delta\varphi = 0 \tag{106}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar φ esta dado por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\rho \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\rho \varphi\right)}\right) = 0 \tag{107}$$

B Escalar de curvatura

La métrica esta dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{f(r)} \end{pmatrix} \tag{108}$$

Así:

$$g = det(g_{ij}) = -1 \tag{109}$$

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{f(r)} & 0 \\ 0 & -f(r) \end{pmatrix} \tag{110}$$

$g_{\mu\nu}$: Tensor métrico
g: Determinante de la métrica
R: Escalar de curvatura

Se procede a calcular los **símbolos de Christoffel**, dados por la siguiente ecuación:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(g_{js,i} + g_{si,j} - g_{ij,s}) \tag{111}$$

Con $g_{ij,s} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}$, $x^1 = ct$ y $x^2 = r$; entonces:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}} - \cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}}\right) - \cancelto{0}{g^{12}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right] \\ \Gamma^1_{11} &= 0 \end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}}\right) - \cancelto{0}{g^{12}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}} + \cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}} - \cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}\right)\right] \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f(r)} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(f(r)) = \frac{f'(r)}{2f(r)} \end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}} - \cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}}\right) - \cancelto{0}{g^{12}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}} - \cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}\right)\right] \\ \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f(r)} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(f(r)) = \frac{f'(r)}{2f(r)} \end{aligned} \tag{114}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}}\right)-\cancelto{0}{g^{12}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\right] \\
\Gamma^1_{22} &= 0 \qquad (115)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{g^{21}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}}\right)-g^{22}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right] \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{-1}{2}\cdot f(r)\cdot\frac{-\partial}{\partial r}\left(f(r)\right)=\frac{f(r)f'(r)}{2} \qquad (116)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{g^{21}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}}\right)-g^{22}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}\right)\right] \\
\Gamma^2_{12} &= 0 \qquad (117)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{g^{21}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}}\right)-g^{22}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}\right)\right] \\
\Gamma^2_{21} &= 0 \qquad (118)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\left[\cancelto{0}{g^{21}}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}}+\cancelto{0}{\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}}-\cancelto{0}{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}}\right)-g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\right] \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{-1}{2}\cdot(-f(r))\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-1}{f(r)}\right)=\frac{f'(r)}{2f(r)} \qquad (119)
\end{aligned}
$$

Con lo anterior se puede encontrar el **tensor de Riemann** mediante la expresión:

$$
R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \qquad (120)
$$

Con $\mu=1,2$, obteniendo:

$$
\begin{aligned}
R^1_{111} &= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}\right)+\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}+\Gamma^1_{21}\cdot\Gamma^2_{11}-\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}-\Gamma^1_{21}\cdot\Gamma^2_{11} \\
R^1_{111} &= 0 \qquad (121)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{112} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^1_{12}\right)} - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}\right) + \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} \cdot \Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{21} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} - \Gamma^1_{12} \cdot \Gamma^1_{12} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} \cdot \Gamma^2_{11} \\
R^1_{112} &= -\left(\frac{f'(r)}{2f(r)}\right)^2 = \frac{-(f'(r))^2}{4f^2(r)} \qquad (122)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{121} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^1_{12}\right)} + \Gamma^1_{12} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} + \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} \cdot \Gamma^2_{11} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} \cdot \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} \\
R^1_{121} &= 0 \qquad (123)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{211} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^1_{21}\right)} - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^1_{21}\right)} + \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} \cdot \Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{21} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} \cdot \Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{21} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} \\
R^1_{211} &= 0 \qquad (124)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{122} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^1_{12}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^1_{12}\right) + \Gamma^1_{12} \cdot \Gamma^1_{12} + \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} - \Gamma^1_{12} \cdot \Gamma^1_{12} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} \\
R^1_{122} &= 0 \qquad (125)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{212} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^1_{22}\right)} - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^1_{21}\right) + \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} + \Gamma^1_{21} \cdot \Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12} \cdot \Gamma^1_{21} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} \cdot \Gamma^2_{21} \\
R^1_{212} &= \frac{-\partial}{\partial r}\left(\frac{f'(r)}{2f(r)}\right) + \frac{f'(r)}{2f(r)} \cdot \frac{f'(r)}{2f(r)} - \frac{f'(r)}{2f(r)} \cdot \frac{f'(r)}{2f(r)} \\
R^1_{212} &= \frac{-f(r)f''(r) + (f'(r))^2}{2f^2(r)} \qquad (126)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{221} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^1_{21}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^1_{22}\right)} + \Gamma^1_{12} \cdot \Gamma^1_{21} + \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} \cdot \Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{21} \cdot \Gamma^2_{22} \\
R^1_{221} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'(r)}{2f(r)}\right) + \cancel{\left(\frac{f'(r)}{2f(r)}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{f'(r)}{2f(r)}\right)^2} \\
R^1_{221} &= \frac{f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{2f^2(r)} \qquad (127)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_{222} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^1_{22}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^1_{22}}\right) + \Gamma^1_{12}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} + \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}}\cdot\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} - \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}}\cdot\Gamma^2_{22} \\
R^1_{222} &= 0 \qquad (128)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{111} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{11}\right)} - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{11}\right)} + \Gamma^2_{11}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} + \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{11}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\Gamma^2_{11} \\
R^2_{111} &= 0 \qquad (129)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{112} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{12}\right)} - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{11}\right)} + \Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^1_{12} + \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} - \Gamma^2_{22}\cdot\Gamma^2_{11} \\
R^2_{112} &= \frac{\cancel{f(r)}f'(r)}{2}\cdot\frac{f'(r)}{2\cancel{f(r)}} - \frac{f'(r)}{2\cancel{f(r)}}\cdot\frac{\cancel{f(r)}f'(r)}{2} \\
R^2_{112} &= 0 \qquad (130)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{121} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^2_{11}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{12}\right)} + \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{11}} + \Gamma^2_{22}\cdot\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^1_{12} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\Gamma^2_{12} \\
R^2_{121} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-f(r)f'(r)}{2}\right) + \frac{f'(r)}{2f(r)}\cdot\frac{-f(r)f'(r)}{2} - \frac{-f(r)f'(r)}{2}\cdot\frac{f'(r)}{2f(r)} \\
R^2_{121} &= \frac{-f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{2} \qquad (131)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{211} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{21}\right)} - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{21}\right)} + \Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^1_{21} + \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} - \Gamma^2_{11}\cdot\Gamma^1_{21} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} \\
R^2_{211} &= 0 \qquad (132)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{122} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\right) + \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\cdot\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\cdot\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} \\
R^2_{122} &= 0 \qquad (133)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{212} &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{22}\right)} - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\right) + \Gamma^2_{11}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} + \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\cdot\Gamma^2_{22} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}}\cdot\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{22}\cdot\cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} \\
R^2_{212} &= 0 \qquad (134)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{221} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\cancelto{0}{\Gamma^2_{21}}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^2_{22}\right)} + \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} \cdot \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} - \Gamma^2_{11} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{21}} \cdot \Gamma^2_{22} \\
R^2_{221} &= 0 \qquad (135)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{222} &= \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^2_{22}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^2_{22}\right) + \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} + \Gamma^2_{22} \cdot \Gamma^2_{22} - \cancelto{0}{\Gamma^2_{12}} \cdot \cancelto{0}{\Gamma^1_{22}} - \Gamma^2_{22} \cdot \Gamma^2_{22} \\
R^2_{222} &= 0 \qquad (136)
\end{aligned}
$$

Ahora, calculamos el tensor de Ricci, que se encuentra contrayendo el tensor de Riemann, esto es:

$$
R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \qquad (137)
$$

De esta ecuación se obtiene el siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \cancelto{0}{R^1_{111}} + R^2_{121} = \frac{-f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{2} && (138) \\
R_{12} &= R^1_{112} + \cancelto{0}{R^2_{122}} = \frac{-(f'(r))^2}{2} && (139) \\
R_{21} &= \cancelto{0}{R^1_{211}} + \cancelto{0}{R^2_{221}} = 0 && (140) \\
R_{22} &= R^1_{212} + \cancelto{0}{R^2_{222}} = \frac{f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{2f^2(r)} && (141)
\end{aligned}
$$

Finalmente, el escalar de curvatura está dado por:

$$
R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad (142)
$$

Así se obtiene la siguiente expresión para el escalar de curvatura:

$$
\begin{aligned}
R &= g^{11} R_{11} + \cancelto{0}{g^{12}} R_{12} + \cancelto{0}{g^{21}} \cancelto{0}{R_{21}} + g^{22} R_{22} \\
R &= \frac{1}{f(r)} \cdot \left(\frac{-f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{2}\right) + (-f(r)) \cdot \left(\frac{f(r)f''(r) - (f'(r))^2}{2f^2(r)}\right) \\
R &= \frac{-f(r)f''(r) - \cancel{(f'(r))^2} - f(r)f''(r) + \cancel{(f'(r))^2}}{2f(r)} \\
R &= -f''(r) \qquad (143)
\end{aligned}
$$