



Universidad Católica de Temuco  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

# Estudio de Parámetros Geométricos Superficiales para un Álabe Direccional de una Turbina de Media Potencia, Tipo Michell Bank

por

Gonzalo Andrés Moya Navarrete

Profesor guía

Dr. Jesús Jacobo Hernandez Montelongo

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de  
Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco, 18 de abril de 2023

Universidad Católica de Temuco  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

**COMISIÓN EVALUADORA**

Profesor guía:

.....

Dr. Jesús Jacobo Hernández Montelongo

Profesor informante:

.....

Dr. Jesús Jacobo Hernández Montelongo

Profesor informante:

.....

Dra. Elizabeth Mas Hernández

Profesor informante:

.....

Mg. Valeria Carrasco Zúñiga

Director del Programa (Ministro de fe):

.....

Dr. Jacobo Hernández Montelongo

Temuco, 18 de abril de 2023

# Perfil de egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas.  
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional postgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas dinámicos y evolutivos. Específicamente:

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes de sistemas dinámicos y evolutivos.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Desarrolla y/o utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos y evolutivos.

Comunica información científico-matemática con rigurosidad técnica y claridad.



# Agradecimientos

Agradezco, por todo los instantes acedémicos y extra académicos, a las personas que se mencionan, este trabajo para optar al grado académico de Magister en Matemáticas Aplicadas a: *JESUCRISTO, AUTOR DE LA VIDA*. En segundo lugar, debo mencionar y agradecer que, no hubiese sido posible este trabajo de título: a Mis Padres: *Rosa Adriana Navarrete Arellano y José Atricio Moya Silva*, Mis Hermanas: *Rose Marie Moya Soto, Sandra Moya Navarrete y Harlethe Moya Navarrete*; a Mis Sobrinos: *Paloma Navarrete Moya, Vicente Pedreros Moya y Franco Pincheira Moya*, a mi Tía: *Lucía Venegas Cárdenas*, a las Señoras y Señorita: *Esmilda Calbún Callupe, Javiera Barrios Cáceres, Constanza Rebolledo Seguel*; al: *Cuerpo Docente y Administrativo del Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad Católica de Temuco*, a los Profesores: *Esptiben Rojas Bernilla, René Cifuentes Bobadilla, Arnoldo Lopethegui Bohle, Carlos Molina Sandoval, Luz Cecilia Vera Oñate, David Viveros Hormazábal, Jorge Toro Vergara y Gabriel Espinoza Vargas*, a Mis Amigos: *Yasmín Navarrete Díaz, Margarita Quizpe Tuzco, Susana Farías Vera, Paulina Farías Vera, Josefa Kolbach Salvadores, Vanessa Salas Mendoza, Mauricio Díaz Raby, Felipe Durán Espinoza, Jorge Toro Oporto, Juan Carlos Leal Ulloa, Claudio Matus Melivilu, Victor Bravo Muñoz, Daniel Saez Quintana, Rodrigo Narvaez Vargas, Roberto Luna Gonzales, Rodrigo Mendoza Vallejos, Tomás Mora Chandía*, a: *Los Hermanos Rojas Leal*; Finalmente a la estudiante de enseñanza secundaria, Srta: *María Paz Altamirano Salinas*.

También, debo agradecer la guía espiritual brindada a los Señores:

*José Mardones Rivera* Ex Rector del Seminario Aliancista de Temuco y Ex Pastor Titular de la Segunda Iglesia Alianza Cristiana y Misionera de Temuco.

*Jorge Tapia Correa* Pastor y Consejero espiritual; Segunda Iglesia Alianza Cristiana y Misionera de Temuco.

*Luis Arcos Higuera* Pastor y Consejero espiritual; Primera Iglesia Alianza Cristiana y Misionera de Angol.

En forma especial, este trabajo está dedicado en memoria de grado, a los Profesores: *José Luis Cruz Paco (Q.E.P.D.) y Fernando Caire Villarroel. (Q.E.P.D.)*.



# Dedicatoria

Antes de hacer mención, a quienes yo dedico esta memoria de grado académico de Magister en Matemáticas Aplicadas, para lo cual, yo citaré un versículo bíblico; Dónde, yo me he identificado durante todo este proceso, tanto el proceso lectivo, como el procesos de memoria de grado:

*No perdaís; pues, vuestra esperanza, que tiene grande galardón.*

*Hebreos 10:35*

También, yo dedico esta memoria de grado académico, primeramente a:

*DIOS, EN EL NOMBRE DE JESÚS.*

En segundo lugar, a mis Padres:

*José Atricio Moya Silva    &    Rosa Adriana Navarrete Arellano*

Además, a quienes colaboraron de una u otra forma, mis tíos:

*Patricio Iván Ibañez Aguilera    &    Leonor Enriqueta Navarrete Arellano*  
*Juan Alberto Hernández Vivanco    &    Gloria Noemi Toro Espinoza*  
*Jose Gregorio Saez Torres    &    Gladys Noemi Navarrete Arellano*

Finalmente, a mi tía:

*Lucia Elizabeth Venegas Cardenas*

*Creo en DIOS, y Creo en la Ciencia.*

*Porque la Ciencia es Creación de Dios para los Hombres.*

*En memoria de:*

***José Luis Cruz Paco***

***Q.E.P.D.***

*La Paz - Bolivia*

*Concepción - Chile*

***Fernando Teodoro Caire Villarroel***

***Q.E.P.D.***

*Temuco - Chile*







# Resumen

En conformidad al estudio sobre la simulación de los Parámetros Geométricos Superficiales para un álabe direccional en una turbina de media potencia, el motivo es mejorar los índices energéticos en este tipo de tecnologías. La productividad de energía eléctrica, mediante este tipo de tecnología, conocidas como turbinas de paso, utilizan el flujo de río y esteros, éstos en su gran mayoría se encuentran dentro de la zona centro sur de nuestro país.

La utilización de este tipo de turbinas hidráulicas, son ocupadas para caudales medianos o pequeños. Además, como dato histórico, ésta tecnología para la generación de energía eléctrica, fue diseñada y ensayada mecánicamente entre los años 1975 hasta 1980, por el centro alemán de tecnologías para el desarrollo (Deutsches Zentrum für Entwinglungstechnologien), por mandato de la empresa estadounidense: Butwal Engineering Work. Dichos ensayos técnicos para esta turbomáquina se llevaron a cabo, utilizando el fuente del río Ganges, en las faldas de los Hymalayas de Nepal, en el continente asiático.

En dicha propuesta, se pretende tomar como base de estudio el álabe direccional de la turbomáquina, encontrándose ésta en el interior de la carcasa comunicante que se encuentra entre la compuerta de la turbomáquina generadora de potencia y el inyector de ésta, siendo este elemento suministrador de fluido al rotor. Este elemento mecánico, es el principal elemento en esta turbomáquina, ya que, tiene la misión de transformar la energía de flujo en energía mecánica, posteriormente y mediante un alternador eléctrico transformar ésta energía mecánica en energía eléctrica.



# Abstract

In accordance with the study on the simulation of the Surface Geometric Parameters for a directional blade in a Cross flow turbine, the motive is to improve the energetic rates in this study a directional blade in Cross flow turbine generator, the motive is to increase the energetic indexes in this type of technology. type of technology. The productivity of electrical energy, by means of this type of technology, known as stepper turbines, uses the turbines, use the flow of rivers and estuaries, most of which are located in the south-central area of our country.

The use of this type of hydraulic turbines is used for small to midsize flow rates. In addition, as a historical fact, this technology for the generation of electric energy was designed and mechanically tested between 1975 and 1980 by the German Center for Development Technologies (Deutsches Zentrum für Entwindlungstechnologien), by mandate of the American company: Butwal Engineering Work. The technical tests for this turbomachine were carried out using the flow of the Ganges River in the foothills of the Hymalayas in Nepal, on the Asian continent.

In this project, it is intended to take as a basis for study the directional blade of the turbomachine, which is located inside the communicating casing between the damper of the power generating turbomachine and its injector, being this element supplying fluid to the rotor. This mechanical element is the main element in this turbomachine, since its mission is to transform the flow energy into mechanical energy, and then, by means of an electric alternator, transform this mechanical energy to electrical energy.



# Zusammenfassung

In Anlehnung an die Studie über die Simulation der Parameter und der Flächengeometrie für eine gerichtete Schaufel in einer Durchströmturbine geht es in dieser Studie um die Verbesserung der Energiewerte in einem Generator mit gerichteter Schaufel in einer Durchströmturbine geht es in dieser Studie um die Verbesserung der Energiewerte in diesem Technologietyp. Die Produktivität der elektrischen Energie, mittels dieser Art von Technologie, bekannt als Stepper-Turbinen, nutzt die Turbinen, die Strömung von Flüssen und Flussmündungen, von denen die meisten in der süd-zentralen Bereich unseres Landes befinden.

Diese Wasserturbinen werden bei mittleren und kleinen Durchflüssen eingesetzt. Historisch gesehen wurde diese Technologie zur Erzeugung von elektrischer Energie zwischen 1975 und 1980 vom Deutschen Zentrum für Entwinklunstechnologien im Auftrag des amerikanischen Unternehmens Butwal Engenieering Work entwickelt und mechanisch getestet. Die technischen Tests für diese Turbomaschine wurden mit der Strömung des Flusses Ganges in den Ausläufern der Hymalayas in Nepal, auf dem asiatischen Kontinent, durchgeführt.

In diesem Projekt soll die Richtungsschaufel der Turbomaschine als Studiengrundlage herangezogen werden, die sich im Inneren des Verbindungsgehäuses zwischen dem stromerzeugenden Turbomaschinenrotor und seinem Injektor befindet, wobei dieses Element den Rotor mit Flüssigkeit versorgt. Dieses mechanische Element ist das Hauptelement dieser Turbomaschine, da es die Aufgabe besitzt, die Strömungsenergie in mechanische Energie umzuwandeln und diese mechanische Energie anschließend mit Hilfe eines elektrischen Generators in elektrische Energie umzuwandeln.





# Motivación

Una de las líneas referente de este trabajo, se relaciona con el hecho de la generación de potencia en la zonas apartadas de las zonas urbanas principales, como es el caso de las localidades rurales e indígenas; tanto en América como en el resto del mundo.

Inspirados en el estudio realizado entre los años atrás, por la empresa estadounidense Butwal Engenieering Work, en donde:

A diciembre del año 2019, la matriz energética nacional, tenía 6679 ( $MW$ ) de capacidad de potencia instalada hidráulica, cuyo porcentaje respecto al total de esta a nivel nacional, es equivalente al 28 %.

Sobre la capacidad instalada hidráulica en Chile, generada principalmente por: grandes, medianas y pequeña centrales. Dónde, la producción disponible por éstas para uso industrial y doméstico es equivalente a la potencia neta. Respecto a este concepto de potencia neta o en la red, debe ser menor que la potencia instalada que entrega las centrales generadoras. Debido a que siempre existen pérdidas energéticas. Centrales de Gran potencia instalada hidráulica.

## **Centrales de Gran potencia instalada hidráulica.**

A continuación, se muestra una información correspondiente a potencia instalada hidráulica, generada por grandes centrales hidráulicas en Chile hasta dicha fecha:

Centrales de Gran potencia instalada hidráulica en Chile	
Central	Capacidad (potencia)
Ralco	690 ( <i>MW</i> )
Pangué	456 ( <i>MW</i> )
El Toro	450 ( <i>MW</i> )
Rapel	350 ( <i>MW</i> )

Sobre las potencias instaladas ya mencionadas, éstas se rigen de acuerdo a la solicitud del centro de despacho económico de carga, organismo perteneciente al MINISTERIO DEL INTERIOR, GOBIERNO DE CHILE.

De modo análogo al anterior, se muestra a continuación la información correspondiente sobre algunas centrales de media potencia en Chile.

### Centrales de Media potencia instalada hidráulica.

De la misma manera, se dan a conocer datos sobre generación de potencia instalada por centrales de media potencia a nivel nacional.

Centrales de Media potencia instalada hidráulica en Chile.	
Central	Capacidad Instalada
Florida 2	20 ( <i>MW</i> )
Chiburgo	19,1 ( <i>MW</i> )
Los Molles	18 ( <i>MW</i> )
Providencia	14,2 ( <i>MW</i> )
Guayacán	12 ( <i>MW</i> )
Chapiquiña	10,8 ( <i>MW</i> )

# Índice general

<b>1. Teoría Sobre Elementos Geométricos y Algebraicos</b>	<b>5</b>
1.1. Descripción General. . . . .	5
1.2. Leyes de Composición. . . . .	6
1.3. Propiedades de las Leyes de la Composición: . . . . .	8
1.4. Transformaciones y Producto entre Transformaciones. . . . .	11
1.5. Grupos. . . . .	13
1.5.1. Grupos de Transformaciones. . . . .	16
1.6. Transformaciones Geométricas. . . . .	17
1.7. Sistemas de Coordenadas Cartesianas en el Plano. . . . .	21
1.8. Sistema de Coordenadas Polares. . . . .	25
1.8.1. Gráficas Definidas por Ecuaciones en Coordenadas Polares. . . . .	29
1.9. Espacios Vectoriales Lineales . . . . .	30
<b>2. Descripción Experimental Para Modelo del Perfil del Álabé.</b>	<b>37</b>
2.1. Descripción General. . . . .	37
2.2. Generalidades del Álabé Direccional. . . . .	37
2.3. Relaciones Matriciales Entre los Sistemas Coordenados Cartesianos. . . . .	48
2.4. Sistema Coordenado Cartesiano Estandar $(x, y)$ . . . . .	52
2.5. Sistema Coordenado Cartesiano $(u, v)$ . . . . .	56
<b>3. Continuidad Aplicada al Perfil Superficial</b>	<b>61</b>
3.1. Descripción General: . . . . .	61
3.2. Teoría sobre Continuidad. . . . .	61
3.2.1. Definición: (Continuidad en un Punto) . . . . .	61
3.2.2. Definición: (Continuidad en un Conjunto) . . . . .	62
3.2.3. Teorema: (Condición Básica de Continuidad) . . . . .	63

3.2.4. Corolario: . . . . .	70
3.2.5. Corolario: . . . . .	71
3.2.6. Teorema: (Continuidad de una función compuesta) . . . . .	71
3.2.7. Demostración: . . . . .	72
3.3. Propiedades de Localidad: . . . . .	73
3.3.1. Definición: . . . . .	73
3.3.2. Proposición: . . . . .	73
3.3.3. Teorema: (Teorema de la Localización) . . . . .	74
3.3.4. Teorema: (Conservación local del signo) . . . . .	74
3.3.5. Demostración: . . . . .	75
3.3.6. Proposición: (Acotación Local) . . . . .	76
3.3.7. Demostración: . . . . .	76
<b>4. Longitud Infinitesimal Para la Curvatura del Arco.</b>	<b>79</b>
4.1. Descripción General. . . . .	79
4.2. Derivada Para la Longitud de la Curvatura. . . . .	80
4.3. Elementos de Curvatura. . . . .	86
4.3.1. Definición: (Límite de la Curvatura Media, Para el Arco de una Cuerda). . . . .	88
4.4. Determinación de los Valores de Curvatura Para el Arco. . . . .	89
4.5. Determinación de la Curvatura Para el Arco de la Cuerda de Manera Paramétrica. . . . .	93
4.6. Longitud de Curvatura. . . . .	96
4.6.1. Análisis Para la Determinación de la Ecuación. . . . .	96
4.7. Determinación de Longitud de la Longitud de Curvatura Paramétrica. . . . .	100
<b>5. Determinación de la Longitud de Curvatura Para el Arco <math>\widehat{OB}</math></b>	<b>103</b>
5.1. Descripción General. . . . .	103
5.2. Determinación del Valor Correspondiente al Arco de la Cuerda . . . . .	103
5.3. Parametrización del Arco de Curvatura de la cuerda $\widehat{OB}$ . . . . .	116
<b>6. Teoría Sobre Elementos Estadísticos y Probabilísticos</b>	<b>127</b>
6.1. Descripción General. . . . .	127
6.2. Variable Aleatoria Discretas. . . . .	127
6.3. Variable Aleatoria Continua. . . . .	130
6.3.1. Variables Aleatoria Continuas. . . . .	131
6.4. Teoría Sobre Valores Esperados. . . . .	131
6.5. Momentos: . . . . .	136

6.6.	Distribuciones Muestrales. . . . .	138
6.7.	Momentos Muestrales. . . . .	142
6.7.1.	Momento Estadístico. . . . .	142
6.7.2.	Momentos Muestrales. . . . .	143
6.8.	Regresión Simple. . . . .	143
<b>7.</b>	<b>Longitud de Curvatura en el Arco <math>\widehat{BC}</math></b>	<b>149</b>
7.1.	Descripción General: . . . . .	149
7.2.	Estadística Descriptiva Bivariante . . . . .	150
7.2.1.	Proposición: . . . . .	150
7.2.2.	Definición: (Covarianza) . . . . .	151
7.2.3.	Definición: (Varianza $\sigma^2$ ) . . . . .	153
7.2.4.	Definición: (Correlación de Pearson) . . . . .	153
7.3.	Regresión Lineal . . . . .	157
7.3.1.	Redondeo de la pendiente mediante estimadores estadísticos $\gamma_0$ y $\gamma_1$ . . . . .	159
<b>8.</b>	<b>Teoría Infinitesimal Sobre Áreas Planas.</b>	<b>161</b>
8.1.	Descripción General. . . . .	161
8.2.	Concepto de Área Mediante una Función de Conjunto. . . . .	162
8.3.	Área bajo el Concepto de Integración. . . . .	168
8.4.	Integral Doble Sobre un Rectángulo Definido. . . . .	169
8.5.	Integrales Dobles Iteradas . . . . .	172
8.5.1.	Teorema de Fubini Aplicado Para las Integrales Dobles: . . . . .	173
8.5.2.	Integrales Dobles Para una Región Plana. . . . .	173
8.6.	Dominios Para Regiones Planas de Tipo <i>I</i> y Tipo <i>II</i> . . . . .	175
8.6.1.	Integrales Dobles Para Regiones Planas del Tipo <i>I</i> : . . . . .	177
8.6.2.	Integrales Dobles Para Regiones Planas del Tipo <i>II</i> : . . . . .	178
8.7.	Propiedades Para las integrales Dobles Sobre una Región Plana . . . . .	179
8.8.	Integrales Dobles Para Transformaciones en Coordenadas Polares . . . . .	180
<b>9.</b>	<b>Determinación del Área Superficial Sobre el Perfil del Álabo</b>	<b>187</b>
9.1.	Descripción general. . . . .	187
9.2.	Esquematización de la Superficie Para el Perfil del Álabo. . . . .	188
9.3.	Determinación del Valor Analítico Para la Subárea $\mathcal{A}_2$ . . . . .	190
9.4.	Determinación del Valor Analítico Para la Subárea $\mathcal{A}_2$ . . . . .	196
9.5.	Determinación del Valor Analítico Para la Subárea $\mathcal{S}_3$ . . . . .	197

9.5.1.	Determinación de la Recta $\mathcal{L}_{S_3}$ .	199
9.5.2.	Determinación Matricial de la Recta $\mathcal{L}_{S_3}$ .	203

# Introducción

Los sistemas aplicados a procesos industriales computacionales, específicamente los sistemas Control Numérico Computacionales (C.N.C.). Corresponden a sistemas lógico programables, utilizados en el desarrollo de estos procesos, con un grado de taxatividad mayor que los procesos análogos o semicovencionales.

Se debe señalar que, los procesos industriales en la actualidad se encuentran clasificados mediante: Procesos Con Arranque de Viruta (C.A.V.) y Procesos Sin Arranque de Viruta (S.A.V.); Dentro de los procesos con arranque de viruta que utilizan se pueden mencionar: el torneado de piezas cilíndricas macizas o huecas, el acabado superficial mediante un proceso de fresado lineal o circular, corte de partes y piezas, entre otros.

Considerando lo anterior, la aplicación del proceso de corte para la fabricación de los perfiles de este elemento mecánico, sobre una superficie plana mediante sistemas C.N.C; correspondiente al perfil superficial de álabe direccional de una turbina de media potencia tipo Michell Banki; conociendo la simulación del contorno para dicha superficie plana, establecido principalmente por un sistema coordenado cartesiano estándar  $(x, y)$  (coordenadas globales), y dos sistemas coordenados cartesianos referenciales  $(u, v)$  y  $(\alpha, \beta)$  (coordenadas locales). De este modo que, al establecer a través de las ecuaciones de contorno superficial, ya existentes, para la determinación de funciones de posicionamiento para el corte  $S(\mathbf{p})$  y sus velocidades de corte  $V(\mathbf{p})$ , el cual, se cumple para un parámetro  $\mathbf{p}$ , donde  $\mathbf{p} > 0$





# Objetivos

La aplicación matemática, radica en la geometría del contorno del perfil a nivel superficial; en paralelo a dicha geometría, se podría de manera analítica determinar el momento de inercia, mediante la determinación del volumen total del álabe direccional, conociendo en su totalidad las condiciones geométricas del álabe direccional de la turbina de media potencia, Tipo Michell Banki.

## Objetivo general

Objetivo general

Determinar

## Objetivos específicos

1. Objetivo específico 1
2. Objetivo específico 2
3. Objetivo específico 3



# Capítulo 1

## Teoría Sobre Elementos Geométricos y Algebraicos

### 1.1. Descripción General.

En este capítulo, se dan elementos matemáticos en relación a las ramas de esta disciplina de forma más abstracta, sobre el álgebra y la geometría a utilizar, como base del estudio de la simulación de parámetros geométricos superficiales para un álabe direccional de una turbina de media potencia, tipo Michell Banki.

Estos elementos matemáticos, para este capítulo, se detallan de manera implícita, para la generación conceptos que se relacionan de manera abstracta, con respecto a las bases de esta simulación bidimensional.

Los aspectos de mayor relevancia, que se encuentran, en este capítulo necesario para este análisis, corresponden a: ***Los espacios vectoriales*** y ***Las transformaciones lineales***. Estos dos conceptos, relacionados netamente al álgebra lineal y la teoría de matrices, lo cual, cobran mayor importancia en la interpretación de la geometría superficial del perfil alar.

Junto con esto, se encuentra asociados elementos algebraicos como las ***leyes de composición***, siendo estas leyes, fundamentales los fundamentos algebraicos que definen cualquier tipo de estructura matemática, tanto algebraica como geométrica.

Dentro del concepto relacionado a las leyes de composición; además, este concepto exclusivamente algebraico, es fuertemente es un concepto elemental dentro de la **geometría proyectiva**. También, las leyes de composición son una conexión con el concepto de grupos algebraicos dentro de un espacio vectorial, siendo éste espacio, un conjunto no vacío.

## 1.2. Leyes de Composición.

Sea denominado un conjunto mediante  $\mathcal{E}^*$ , el cual, es formado **por una cantidad finita o infinita de elementos**. Cuyos elementos pertenecientes a este conjunto de forma genérica, los podemos representar mediante elementos alfabéticos. Por lo tanto, los elementos componentes a este conjunto  $\mathcal{E}^*$ , corresponden  $\{a^*.b^*, c^*, \dots\}$ . En el caso de, poder indicar que un elemento de este conjunto  $\mathcal{E}^*$ , siendo este elemento, denominado  $a^*$ ; Por lo cual, dicho elemento pertenece a este conjunto  $\mathcal{E}^*$ ; cuya afirmación, se puede denotar por medio de:  $a \in \mathcal{E}^*$ . También, si el conjunto  $\mathcal{E}^*$ , se encuentra compuesto por los elementos genéricos descrito de manera alfabética  $\{a^*.b^*, c^*, \dots\}$ , se puede denotar por medio de  $\mathcal{E}^* [a^*.b^*, c^*, \dots]$ . Además, el conjunto se encuentra compuesto por una variable representativa de estos elementos, siendo ésta denominada  $x_{(\mathcal{G}^*)}$ . Por lo tanto, ésta variable, una representación de cualquier elemento del conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

De acuerdo a lo mencionado, el conjunto, cuya variable representativa de los elemento componentes  $\mathcal{E} [x_{(\mathcal{G}^*)}]$ . Existe también, otro conjunto que denominaremos  $\mathcal{F}^*$ . En el caso de, que todos sus elementos pertenecen al conjunto  $\mathcal{E}^*$ , podemos afirmar que, este conjunto  $\mathcal{F}^*$  es un subconjunto del conjunto  $\mathcal{E}^*$ , y lo denotaremos por medio:  $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{E}^*$ .

Los elementos genéricos mencionados anteriormente  $a^*, b^*, c^*, \dots$ , se pueden representar de maneras distintas; Por lo tanto, estos elementos ser elementos numéricos, pertenecientes a distintos cuerpos numéricos:  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , etc. Además, estos elementos genéricos, pueden representar a elementos geométricos, tal como pueden expresar, los elementos tales: puntos, rectas, circunferencias, funciones, transformaciones, etc.

Supongamos que, existen dos conjuntos denominados mediante  $\mathcal{E}_{\alpha_\infty}^* [x_{(\mathcal{G}^*)}]$  y  $\mathcal{E}_{\alpha_\epsilon}^* [y_{(\mathcal{G}^*)}^*]$ ; se denomina como **producto cartesiano o producto vectorial**, a un conjunto de elementos generado mediante una operación denominada como producto cruz entre estos conjuntos  $\mathcal{E}_{\alpha_\infty}^* [x_{(\mathcal{G}^*)}] \times \mathcal{E}_{\alpha_\epsilon}^* [y_{(\mathcal{G}^*)}^*]$ . Cabe señalar que, los elementos de cada conjunto que compone al producto cartesiano, siendo este producto representado por medio de un par ordenado, lo cual, podemos denominar de forma

genérica, a través de  $\left\{x_{(\mathcal{G}^*)}^*, \left\{x_{(\mathcal{G}^*)}^*, y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right\}\right\}$ . Comunmente, estos pares, se pueden denotar mediante  $\left(x_{(\mathcal{G}^*)}^*, y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right)$ . Los elementos que componen a el primer conjunto denominado  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , corresponde a los elementos, cuya componente, equivale  $x_{(\mathcal{G}^*)}^*$ ; además, estos elemetos, corresponderían al primer elemento de este par ordenado Por otro lado, los elementos del conjunto denominado  $\mathcal{E}_{\alpha_2}^* \left[y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , corresponden a la segunda componente del par ordenado.

De manera natural, podemos afirmar que, el producto cartesiano para los conjunto señalados  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$  y  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , siendo expresado mediante la operación  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)}^*\right] \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , lo cual, es distinto a decir que, el producto cartesiano expresado mediante:  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right] \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , exceptuando que, cuando los valores de los conjuntos descritos son iguales; Por lo tanto, podemos decir:

$$\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)}^*\right] = \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right] .$$

En el caso de, cuando el conjunto  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , se encuentra compuesto mediante dos elementos, lo cual, los elementos de este conjunto, se encuentra descrito por medio de los elementos en forma genérica, tal que:  $\{a^*, b^*\}$ . De esta manera, el otro conjunto denominado  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[y_{(\mathcal{G}^*)}^*\right]$ , compuesto por los elementos genéricos  $\{c^*, d^*, e^*\}$ . Por lo tanto, el producto cartesiano resultante de estos conjuntos  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^*$ , nos arrojaría los pares ordenados equivalentes:  $\left\{\left(a^*, c^*\right); \left(a^*, d^*\right); \left(a^*, e^*\right); \left(b^*, c^*\right); \left(b^*, d^*\right); \left(b^*, e^*\right)\right\}$ . Mientras, el producto cartesiano, generado por la operación  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^*$ , se encuentra compuestos por los mismos pares, cuyo orden en sus elementos genéricos se encuentran invertidos.

Para el caso del conjunto denominado a través de  $\mathcal{E}_{\alpha_i}^*$ , compuesto por todos los números reales; por lo tanto, este conjunto resultante de la operación correspondiente a  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^*$ , para cada conjunto dado  $i = 1, 2$ . En cuyos pares ordenados, sus componentes corresponden a números reales, lo cual, se considera que el conjunto  $\mathcal{E}_{\alpha_i}^*$  tal que:  $i = 1$ , representados por puntos de una recta horizontal estandar, llamada también abscisa. El producto cartesiano entre estos conjuntos, cuya operación correspondiente  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^*$ , son equivalentes a los puntos de un plano real. Existe una notación particular para este producto cartesiano, la cual, corresponde  $\mathcal{R}^2$ .

Definiendo de manera análoga, el producto cartesiano para un número mayor de conjuntos, para poder definir un espacio dado, la podemos denotar mediante la operación equivalente al producto cruz de los conjuntos  $\mathcal{E}_{\alpha_i}^* \left[\zeta_i\right]$ , tal que  $i = 1, \dots, n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$ . En consecuencia, diremos que el producto cartesiano es equivalente al  $(n - 1)$ -ésimo producto cartesiano. Por lo tanto, denotando esta operación, diremos:  $\mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)_1}\right] \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)_2}\right] \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)_3}\right] \times \dots \times \mathcal{E}_{\alpha_{\infty}}^* \left[x_{(\mathcal{G}^*)_n}\right]$ .

Se le denomina ***apliación de un conjunto***, para un conjunto denominado  $\mathcal{E}^*$ , que corresponda

a un elemento de otro conjunto, el cual, es denominaremos  $\mathcal{H}^*$ ,. Debido a esto, se denomina, ***La ley de correspondencia***, a cada elemento del conjunto  $\mathcal{E}^*$ , tal que  $a_i \in \mathcal{E}^*$ , corresponda a otro elemento de llegada, siendo denotado dicho elemento mediante  $b_j \in \mathcal{H}$

### Definición:

Dado un conjunto de elemento, denominado por medio de  $\mathcal{E}^* [a^*, b^*, c^*, \dots]$  se dice que la Ley de composición se encuentra definida, cuando existe alguna ley, según el cual, a cada para ordenados de elementos del conjunto  $\mathcal{E}^*$ , le es correspondiente ***uno y solo uno elementos*** del mismo conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

Brevemente, la ley de composición para un conjunto  $\mathcal{E}^*$ , corresponde a una aplicación, correspondiente al producto cartesiando del mismo conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

Al representar la ley de compocición, por medio de la notación  $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}$ , podemos expresar:

$$c^* = b^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^* \quad (1.1)$$

De la expresión anterior, los términos correspondientes a  $a^*, b^*, c^*$ , equivalente a las componentes de los pares ordenados  $(a^*, b^*)$ , cuya resultante es equivalente al término  $c^*$ , de la composición de este par ordenado.

## 1.3. Propiedades de las Leyes de la Composición:

Las leyes de la composición, pueden satisfacer o no, las propiedades que se presentarán a continuación. Lo cual, presentaremos principalmente algunas de las propiedades de la Ley de composición mediante su definición.

### Definición: (Asociatividad)

Sea la ley de composición  $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}$ , entre los elementos de un conjunto denominado  $\mathcal{E}^*$ . Se dice que esta, ***es asociativa***, lo cual, podemos verificar:

$$c^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} (b^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^*) = (c^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} b^*) \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^* \quad (1.2)$$

Para cualquier elemento  $a^*, b^*, c^*$  perteneciente al conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

### Definición: (Conmutatividad)

Sea la ley de composición  $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}$ , se define entre los elementos del conjunto  $\mathcal{E}^*$ . Se dice que, ésta es *conmutativa*, lo cual se puede verificar mediante:

$$b^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^* = a^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} b^* \quad (1.3)$$

Para cualquier elemento  $a^*, b^*$ , perteneciente al conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

### Definición: ( Elemento Neutro).

*El elemento neutro*, correspondiente al conjunto  $\mathcal{E}^*$ , el cual, es denominado por medio de  $\mathfrak{e}^*$ . La ley de composición, respecto al *elemento neutro*  $\mathfrak{e}^*$ . Se puede verificar, por medio de la expresión:

$$\mathfrak{e}^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^* = a^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} \mathfrak{e}^* = a^* \quad (1.4)$$

Podemos afirmar que, el elemento neutro  $\mathfrak{e}^*$  *puede o no existir*, tal que, para todo elemento  $a$  perteneciente al conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

Podemos deducir, mediante esta definición, que *el elemento neutro existe*, y es *un elemento único*. En efecto, si al haber dos elementos de es ellos  $\mathfrak{e}^*$  y  $\mathfrak{e}_\alpha^*$ , el elemento correspondiente a la estructura  $\mathfrak{e}^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} \mathfrak{e}_\alpha^*$ ; en consecuencia a esta estructura, los elementos  $\mathfrak{e}^*$  y  $\mathfrak{e}_\alpha^*$ , deben ser equivalentes.

Al considerar la suma, como una de las propiedades de la composición  $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}$ . Podemos señalar que, la notación correspondiente a esta equivale  $+$ ; la notación para el elemento neutro, se denota mediante  $\{0\}$  para un conjunto dado. También, el producto, es denotado mediante la notación  $\cdot$ ; Además, para el caso del producto, el elemento neutro, se consider por medio de la unidad numérica, llamado también *elemento unitario*.

### Definición: (Elemento Simétrico).

Se define al *elemento simétrico* de un elemento  $a^*$  del conjunto  $\mathcal{E}^*$ . Sobre la ley de composición, la cual, se debe incluir en esta, el elemento neutro  $\mathfrak{e}^*$ . Además, existe otro elemento  $a_{\alpha}^*$  en el conjunto  $\mathcal{E}$ , tal que, se cumple:

$$a_{\alpha}^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^* = a^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a_{\alpha}^* = \mathfrak{e}^* \quad (1.5)$$

La simetría para un elemento dado, puede o no existir. Por otra parte, si la ley de composición se interpreta mediante una suma, el elemento simétrico para un elemento  $a^*$ , es equivalente al elemento  $(-1)a^*$ ; por lo tanto, este elemento se le denomina como *elemento opuesto*. En el caso del producto, el elemento simétrico, es denominado como *elemento inverso*, lo cual, generalmente es denotado  $\frac{1}{a^*}$ , o bien  $(a^*)^{(-1)}$ .

### Definición: (Elemento Central).

Para un conjunto denominado  $\mathcal{E}^*$ , *el elemento central*, respecto a la ley de composición  $\mathcal{T}^{\mathcal{G}}$ , corresponde a todos los elementos que conmutan dentro del conjunto  $\mathcal{E}^*$ . Según esto, podemos asignar un elemento equivalente al elemento centra, denominandolo por  $x_{\beta}^*$ , en el cual, podemos verificar mediante la expresión:

$$x_{\beta}^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} a^* = a^* \mathcal{T}^{\mathcal{G}} x_{\beta}^* \quad (1.6)$$



Para cualquier elemento  $a^*$ , perteneciente al conjunto  $\mathcal{E}^*$ .

Es necesario mencionar, la evidencia que ocurre cuando existe un elemento neutro  $\epsilon^*$ , y pertenece **al elemento central o centro**. Mediante la ley conmutativa, el elemento central coincide con el conjunto  $\mathcal{E}^*$ , en su totalidad.

## 1.4. Transformaciones y Producto entre Transformaciones.

Una transformación corresponde, a una **aplicación entre dos conjuntos**, los cuales, estos conjuntos serán denominados mediante  $\mathcal{S}^*$  y  $\mathcal{S}_\alpha^*$ . Indistintamente, en la mayoría de los casos son frecuentemente utilizadas ambos términos, por temas de costumbre o autoría, suele nombrarse; tanto, la denominación de: **Transformación o Aplicación**.

El modo de poder fijar un criterio, en nuestro caso denominaremos como una **Transformación** a las aplicaciones de un conjunto en si mismo.

Como caso particular de una **Aplicación**, corresponden las **Transformaciones**, lo cual, naturalmente, estas tienen las mismas denominaciones entre sí, con respecto a, las propiedades correspondiente a la **inyectividad** y la **biyectividad** de estas según el caso. Además, según en caso que esta **Aplicación** sea biyectiva, se utilizaría la definición de **Transformación Inversa**.

El producto entre las transformaciones, se le denomina **composición**, lo cual, se indicaría mediante la sustitución del signo correspondiente al cuerpo utilizado, sobre esta composición para una aplicación dada por un punto.

El producto entre transformaciones, se define del mismo modo que, la composición de una aplicaciones. En consecuencia, el producto de las transformaciones, siempre será **asociativa**.

A simple vista, podemos observar que, la composición de las aplicaciones, como el producto de las transformaciones, generalmente ambas son **conmutativas**.

### Definición: (Transformación Identidad o Idéntica).

Se dice que, la transformación para un conjunto  $\mathcal{S}^*$ , corresponde al mismo conjunto  $\mathcal{S}^*$ ; por lo tanto, esta transformación, es denominada como una transformación cíclica de orden  $n$ . En el caso de, si el productp para las transformaciones, cuyo orden  $n$ , corresponde a la  $(n - 1)$ -ésimo producto en si mismo de dicho conjunto  $\mathcal{S}^*$ . Además, al decir que, esta transformación sea una transformación identica, quiere decir que:

$$\text{Si:} \qquad \qquad \qquad \mathfrak{e}^* = x^*$$

$$\text{Se define como una transformación idéntica cíclica:} \qquad [\sigma^*]^n(x^*) = \mathfrak{e}^*(x^*)$$

Por lo tanto, el producto de la tranforación mencionada, corresponde:

$$[\sigma^*]^n(x^*) = \sigma^* \cdot \sigma^*(x^*) \cdots [\sigma^*]^n(x^*) = \mathfrak{e}^*(x^*) = x^* \qquad (1.7)$$

Para todo elemento  $x^*$ , perteneciente al conjunto  $\mathcal{S}^*$ . Además, lo descrito cuando  $n$  corresponde al *menor número*.

### Definición: (Transformaciones Cíclicas).

Una transformación cíclica, de orden dos, se denomina como una *transformación involutoria*. Esta transformación, se caracteriza mediante la expresión:

$$[\sigma^*]^2(x^*) = \mathfrak{e}(x^*) = x^* \qquad (1.8)$$

Para todo elemento  $x^*$ , perteneciente al conjunto  $\mathcal{S}^*$ .

De esta manera, podemos deducir que:

$$[\sigma^*]^2(x^*) = x^*$$

$$\sigma^*[\cdot\sigma^*(x^*)] = x^*$$

Por lo tanto, podemos decir que:

$$\sigma^*(x^*)^* = [\sigma^*]^{(-1)}(x^*) \quad (1.9)$$

Además, esta propiedad caracteriza a las transformaciones involutorias. Por otra parte, las transformaciones involutoria, tienen otra característica, la cual, correspondiente a tener *elementos homólogos*, estos elementos, también son denominados *elementos conjugados*.

## 1.5. Grupos.

Una de las estructuras algebraicas más importantes, corresponde a los grupos, lo cual, esta estructura requiere de una sola ley, siendo ésta la *ley de composición*.

### Definición: (Estructura de Grupos).

Se dice que, un *grupo*, es constituido mediante un conjunto no vacío, definiendo de esta forma, *la estructura de grupo* cuando los elementos se encuentran definidos dentro de la ley de composición. Para definir una estructura de grupo, se debe cumplir con las propiedades:

1. *Asociatividad*.

## 2. Elemento Neutro.

## 3. Elemento simétrico.

La ley de composición, para definir a un grupo, generalmente, se interpreta como un producto. Por lo tanto, su nomenclatura es representada mediante  $(\cdot)$ .

Podemos llamar al producto de dos elementos denominados  $a^*$  y  $b^*$ , como un elemento compuesto,. Por lo tanto, podemos decir  $a_\alpha^* \cdot b_\beta^*$ . También, existe una representación de un grupo mediante la ley de composición, denomianda  $c_\gamma^*$ , que equivale:  $c_\gamma^* = b_\beta^* \cdot a_\alpha^*$ . El elemento resultante correspondiente al producto de la igualdad descrita, indicaría que existe un producto entre  $b_\beta^*$  y  $a_\alpha^*$ , dicha resultante, puede ser distinta del producto equivalente:  $a_\alpha^* \cdot b_\beta^*$ ; lo cual, nos resulta que, **el producto no es conmutativo**.

Podemos señalar que, existe un elemento, llamado elemento unitario, cuya propiedad cumple la simetría algebraica. Además, el elemento denominado  $a_\alpha^*$ , por propiedad, tiene un elemento inverso, el cual, es denominado como  $(a_\alpha^*)^{(-1)}$ .

Mediante estas notaciones, las propiedades de grupo, se encuentran definidas, por medio:

- $(a_\alpha^* \cdot b_\beta^*) \cdot c_\gamma^* = a_\alpha^* \cdot (b_\beta^* \cdot c_\gamma^*)$  ; para toda terna, cuya componentes corresponden a:  $a_\alpha^*, b_\beta^*, c_\gamma^*$  pertenecen a  $\mathbb{R}$ .

- Existe un elemento neutro, denominado mediante  $\epsilon^*$ , que satisface la condición:  
$$a_\alpha^* \cdot \epsilon^* = \epsilon^* a_\alpha^* = a_\alpha^*, \text{ para todo } a_\alpha^* \text{ perteneciente a } \mathbb{R}.$$

- Existe un elemento inverso, denominado  $[a_\alpha^*]^{(-1)}$ , tal que , se cumple:  
$$a_\alpha^* \cdot [a_\alpha^*]^{(-1)} = [a_\alpha^*]^{(-1)} a_\alpha^* = \epsilon^*$$

la conmutatividad en un grupo, puede o no cumplirse, en el caso de cumplirse la conmutatividad, este grupo correspondería a ser un **Grupo Abelian**.

Podemos observar que, que cada elemento denominado  $a_\alpha^*$ , no debe tener más de un elemento inverso. Por lo tanto, en el caso de haber otro elemento, el cual, será denominado mediante  $x_\Omega^*$ ; tal que, se

cumple la condición:  $x_{\Omega}^* a_{\alpha}^* = \mathfrak{e}^*$ . Si al aplicar, en esta expresión el producto correspondiente al elemento inverso equivalente  $[a^*]^{(-1)}$ ; la resultante de esta operación, correspondería  $x_{\Omega}^* = [a_{\alpha}^*]^{(-1)}$ .

Lo mencionado, se puede deducir, mediante la definición de elemento inverso. Por ende, tendríamos:

$$\left[ (a_{\alpha}^*)^{(-1)} \right]^{(-1)} = a_{\alpha}^* \quad (1.10)$$

Al aplicar el producto inverso, sobre el producto entre los elementos  $a_{\alpha}^*$  y  $b_{\beta}^*$ . Diremos:

$$\left[ a_{\alpha}^* \cdot b_{\beta}^* \right]^{(-1)} = (a_{\alpha}^*)^{(-1)} \cdot (b_{\beta}^*)^{(-1)} \quad (1.11)$$

En efecto, al aplicar la propiedad asociativa, se puede verificar:

$$\begin{aligned} (b_{\beta}^*)^{(-1)} \cdot (a_{\alpha}^*)^{(-1)} &= (a_{\alpha}^*)^{(-1)} \cdot (b_{\beta}^*)^{(-1)} \\ (b_{\beta}^*)^{(-1)} \cdot (a_{\alpha}^*)^{(-1)} \cdot [a_{\alpha}^* \cdot b_{\beta}^*] &= (a_{\alpha}^*)^{(-1)} \cdot (b_{\beta}^*)^{(-1)} \cdot [a_{\alpha}^* \cdot b_{\beta}^*] \\ [a_{\alpha}^* \cdot (a_{\alpha}^*)^{(-1)}] \cdot [b_{\beta}^* \cdot (b_{\beta}^*)^{(-1)}] &= (b_{\beta}^*) \cdot \mathfrak{e}^* \cdot [(b_{\beta}^*)^{(-1)}] \\ \left[ (b_{\beta}^*)^{(-1)} \right] \cdot \mathfrak{e}^* \cdot (b_{\beta}^*) &= 1 \end{aligned}$$

De esta manera, podemos concluir:

$$\mathfrak{e}^* = (b_{\beta}^*) \cdot \left[ (b_{\beta}^*)^{(-1)} \right] \quad (1.12)$$

Sobre un grupo, podemos expresar las siguientes ecuaciones:

$$a_{\alpha}^* \cdot x_{\Omega}^* = b_{\beta}^* \quad x_{\Omega}^* \cdot a_{\alpha}^* = b_{\beta}^*$$

Siempre que, las ecuaciones descritas anteriormente, tengan una única solución. Para el caso de la ecuación izquierda, si al aplicar el producto, cuyo término sea:  $[a_{\alpha}^*]^{(-1)}$ , podemos decir:

$$[a_{\alpha}^* \cdot x_{\Omega}^*] \cdot [(a_{\alpha}^*)^{(-1)}] = b_{\beta}^* \cdot [(a_{\alpha}^*)^{(-1)}]$$

$$\left\{ (a_{\alpha}^*) \cdot [(a_{\alpha}^*)^{(-1)}] \right\} \cdot x_{\Omega}^* = b_{\beta}^* \cdot [(a_{\alpha}^*)^{(-1)}]$$

$$\mathfrak{e}^* \cdot x_{\Omega}^* = b_{\beta}^* \cdot [(a_{\alpha}^*)^{(-1)}]$$

De esta manera, afirmaremos:

$$x_{\Omega}^* = 6b_{\beta}^* \cdot (a_{\alpha}^*)^{(-1)} \quad (1.13)$$

### 1.5.1. Grupos de Transformaciones.

La importancia en la geometría sobre los **Grupos**, corresponde a cuyos elementos, los cuales, existen entre éstos **transformaciones dentro de un conjunto**. De esta manera el producto de la transformación debe coincidir con el producto entre los elementos del conjunto.

#### Definición: (Grupo de Transformaciones Biyectivas).

Un conjunto de transformaciones biyectivas, denominado mediante  $G$ , sobre un conjunto, denominado  $\mathcal{S}^*$ , sobre si mismo. Podemos decir que, **un grupo de transformaciones** en el conjunto  $\mathcal{S}^*$ , debe cumplir las siguientes condiciones:

1. El producto entre dos transformaciones dentro de un conjunto, es perteneciente al mismo conjunto; esto quiere decir: Sí,  $\sigma_{\alpha}^* \in G$  y  $\sigma_{\alpha}^* \in G$ . En consecuencia, podemos decir que:  $\sigma_{\alpha}^*, \sigma_{\alpha}^* \in G$ .

2. Si  $\sigma_\alpha^* \in G$ ; implica que:  $(\sigma_\alpha^*)^{(-1)} \in G$

Mediante estas condiciones, podemos deducir que, ***todo grupo contiene a la transformación identidad o idéntica***. En el caso de, una transformación dada, la cual, denominaremos mediante  $\sigma_\alpha^* \in G$ ; al aplicar la condición dos, mencionada anteriormente, podemos decir que:  $(\sigma_\alpha^*)^{(-1)} \in G$ . Además, considerando la propiedad de un elemento neutro para una transformación, podemos decir:  $(\sigma_\alpha^*)^{(-1)} \cdot \sigma_\alpha^* = \mathbf{e} : \mathbf{e} \in G$ .

### Definición: (Transitividad en un Grupo).

Sea un grupo de transformaciones, denominada mediante  $G$ , dentro de un conjunto denominado  $\mathcal{S}^*$ . Podemos decir que, este grupo es transitivo, para todos los pares de elementos denominados  $(x_\beta^*, y_\beta^*) \in \mathcal{S}^*$ . Además, existe una transformación denominada  $\sigma_\beta^*$ ; tal que:  $\sigma_\beta^* \in G$ . Por otra parte, podemos decir que:  $y_\beta^* = \sigma_\beta^*(x_\beta^*)$ .

Si ***la transformación es única***, este grupo es denominado como ***Grupo Transitivo Simple***.

## 1.6. Transformaciones Geométricas.

Generalmente, las transformaciones geométricas, las podemos observar de modo ejemplificado mediante, a través de: Al tener dos planos, tales que, sean dos planos denominados:  $\wp(x^*, y^*)$  y  $\wp(x^*, y^*)^*$  distintos entre sí. Se puede decir que, una transformación puntual para los planos  $\wp$  y  $\wp^*$ , o existir una correspondencia entre ambos planos; esto significaría que existiría una ley que permitiría que, al asignar un punto que denominaremos mediante  $\mathcal{P}^*$  sobre el plano  $\wp$ : Existe un punto denominado  $\wp^*$ . Al aplicar una transformación geométrica tal, siendo este punto  $\wp^*$  perteneciente al plano  $\wp^*$ , un punto homólogo del punto  $\mathcal{P}$  correspondiente al plano  $\wp^*$ .

Podemos representar, una transformación geométrica, mediante la denominación de  $\mathcal{T}$ , representando de esta forma una transformación geométrica. Según lo anterior, la transformación tal, la podemos expresar mediante:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{T}^* \mathcal{P} \quad (1.14)$$

Al estudiar este tipo de transformaciones, para un punto de un plano tal  $\wp(x^*, y^*)$ , siendo este, perteneciente a un espacio dado; este debe corresponder a otro espacio, de manera particular que, el espacio de llegada debe tener la misma dimensión de salida. Por lo tanto, esto quiere decir que, siempre el elemento del plano  $\wp(x^*, y^*) \subseteq \mathbb{R}^2$  de salida, debe existir un punto en el espacio de llegada  $\wp(x^*, y^*)^* \subseteq \mathbb{R}^2$ .

No consideraremos, el tipo de transformaciones no puntuales en este caso, ya que, se generaliza todo tipo de transformaciones entre dos espacios existentes.

## Transformaciones Puntuales.

Una transformación geométrica entre los planos  $\wp(x^*, y^*)$  y  $\wp(x^*, y^*)^* \subseteq \mathbb{R}^2$ , la cual, denominaremos mediante  $\mathcal{T}^*$ , y se encuentra representada a través de la expresión:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{T}^* \mathcal{P}$$

Se debe considerar, si un punto dentro del plano  $\wp^*$ , denominado  $\mathcal{P}^*$ , al aplicar la transformación dada, lo cual, la resultante de esta equivaldría a un punto denominado  $\mathcal{P}$ , sobre el plano  $wp$ . La transformación del plano  $\wp^*$  en el plano  $\wp$ , en el cual, exista una correspondencia entre el punto de salida  $\mathcal{P}^*$ , y el punto de llegada  $\mathcal{P}$ , es denominado como ***transformación geométrica inversa***, siendo esta denominada como  $\mathcal{T}^{*(-1)}$ . Por lo tanto, podemos decir que:



Transformación Geométrica entre los planos

$$\wp(x^*, y^*) \text{ y } \wp(x^*, y^*)^* \qquad \mathcal{P}^* = \mathcal{T}^* \mathcal{P}$$

Transformación Geométrica Inversa entre los planos

$$\wp(x^*, y^*)^* \text{ y } \wp(x^*, y^*) \qquad \mathcal{P} = \mathcal{T}^{*(-1)} \mathcal{P}$$

Puede existir el caso que, un mismo punto  $\mathcal{P}^*$  del plano  $\wp(x^*, y^*)^*$ , sea correspondiente a varios puntos del plano  $\wp(x^*, y^*)$ . Entonces, podemos decir que, la transformación geométrica inversa  $\mathcal{T}^{*(-1)}$ , no existe. Este tipo de transformaciones, son conocidas como ***transformaciones geométricas no univocas***; dónde, para cada punto  $\mathcal{P}^*$  del plano  $\wp(x^*, y^*)^*$ , correspondería  $\mathcal{P}_i$ , tal que:  $i = 1, 2$  puntos del plano  $\wp(x^*, y^*)$ .

## Elementos Unidos Mediante una Transformación Geométrica.

Al suponer que existen dos espacios de dimensión dos, representados mediante los planos  $\wp(x^*, y^*)$  y  $\wp(x^*, y^*)^*$ , si estos planos son coincidentes, lo cual, esto quiere decir que, son ***planos idénticos***. Se puede denominar como, ***puntos unidos para la transformación  $\mathcal{T}$*** , aquellos puntos que, sean coincidentes con los puntos transformados de estas. Por lo tanto, podemos decir que, esto se puede aplicar para los puntos que se encuentran dentro de la relación correspondiente a una transformación geométrica, la cual, se representa  $\mathcal{P}^* = \mathcal{T}^* \mathcal{P}$ .

## Transformaciones Geométricas Identidad o Idénticas.

Existe el caso, cuando todos los elementos resultantes de una transformación geométrica  $\mathcal{T}^*$ , corresponden a elementos unidos. Por lo tanto, o transformación geométrica idéntica, también denominada ***transformación geométrica afín***. No indagaremos en esta sección más allá sobre este tipo de transformaciones geométricas.

## Producto Entre Transformaciones Geométricas.

Si tener varios espacios de dimensión dos cada espacio, siendo estos representados mediante los planos  $\wp(x^*, y^*)_i$ ; tal que:  $i=1, \dots, n$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Lo cual, éstos planos deben ser coincidentes o superpuestos entre sí. Se le denomina al **producto entre transformaciones geométricas**, cuyas representaciones de las transformaciones para este caso, la denominaremos como  $\mathcal{T}_{(\alpha)^*}^*$  y  $\mathcal{T}_{(\beta)^*}^*$ ; siendo estas transformaciones geométricas, aplicables de manera sucesiva, una tras la otra, para los espacios de los planos mencionados.

Por lo tanto, en el caso de la primera transformación geométrica, podemos decir que: Si la primera transformación geométrica, corresponde en este caso:  $\mathcal{P}^* = \mathcal{T}_{(\alpha)^*}^* \mathcal{P}$ ; en consecuencia, una segunda transformación geométrica, se describe mediante:  $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{T}_{(\beta)^*}^* \mathcal{P}^*$ . Entonces, **el producto entre transformaciones geométricas**, corresponde:

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{T}_{(\alpha)^*}^* \mathcal{P} \quad \wedge \quad \mathcal{P}^{**} = \mathcal{T}_{(\beta)^*}^* \mathcal{P}^*$$

Entonces:

$$\mathcal{P}^{**} = \mathcal{T}_{(\alpha)^*}^* \left[ \mathcal{T}_{(\beta)^*}^* \mathcal{P} \right]$$

Por lo tanto, diremos que:

$$\mathcal{P}^{**} = \mathcal{T}_{(\alpha)^*}^* \mathcal{T}_{(\beta)^*}^* \mathcal{P} \tag{1.15}$$

Esto nos hace pensar que, existe una **relación de transitividad**, de modo algebraico, en la cual, se encuentra definida el producto entre las transformaciones geométricas tales.

El producto entre transformaciones geométricas, en general, no son conmutativas.

Al observar que, la notación del producto entre las transformaciones geométricas  $\mathcal{T}_{(\alpha)}^* \cdot \mathcal{T}_{(\beta)}^*$ , primeramente, indica que, se debe aplicar la transformación  $\mathcal{T}_{(\alpha)}^*$ ; posteriormente, se aplica la transformación  $\mathcal{T}_{(\beta)}^*$ .

De la definición correspondiente al producto entre las transformaciones geométricas; éstas **son coincidentes** a las transformaciones geométricas inversas; a su vez, son coincidentes a las transformaciones geométricas idénticas. En efecto, al transformar un punto entre dos espacios de dimensión dos, siendo este punto denominado  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ . Al aplicar sobre este punto, una transformación geométrica  $\mathcal{T}^*$ , se obtendría un punto correspondiente a otro espacio, cuya dimensión es equivalente; por lo tanto, al denominar al punto transformado  $\mathcal{P}_{(\alpha^*)}^*$ .

En el caso de, si se aplica sobre el punto  $\mathcal{P}_{(\alpha^*)}^*$ , una transformación geométrica inversa  $\mathcal{T}^{*(-1)}$ ; la resultante de este punto correspondería  $\mathcal{P}_{(\alpha)}$ .

Consecuentemente, podemos decir según lo mencionado, que el producto entre la transformación geométrica  $\mathcal{T}^*$ , y la transformación geométrica inversa  $\mathcal{T}^{*(-1)}$ , es equivalente a la **transformación geométrica identidad o transformación geométrica idénticas**.

## 1.7. Sistemas de Coordenadas Cartesianas en el Plano.

El conjunto de todos los pares ordenados de forma estandar, se denominan mediante  $\wp(X, Y)$ . Lo cual, de esta manera, es denominado plano numérico, y cuya denotación corresponde  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, sobre el plano numérico  $\mathbb{R}^2$ , correspondería:

$$\mathbb{R}^2 \quad : \quad \{\forall \wp(X, Y) : X \in \mathbb{R} \wedge Y \in \mathbb{R}\} \quad (1.16)$$

Tratando ahora de poder identificar cada par ordenado en este espacio real, con puntos en este plano geométrico. De tal manera, como al realizarse en el conjunto de los números reales y puntos de la recta. Utilizaremos para este fin, **El Método de Descartes**:

Al tomar una recta horizontal, en este plano geométrico, lo cual, llamemos mediante el término **eje X**. Además, una recta vertical, denominandose mediante **eje Y**. La intersección entre los ejes, es

denominada por medio de **origen**, lo cual, es denominado por medio de  $O$ . Escogiendo una unidad de medida; y en lo consiguiente, se establece, para cada recta a un sistema coordenado, cuando el **cero** de ambas rectas coincidan con el origen del sistema. Por otra parte, podemos fijar, de modo adicional, la dirección positiva en el **eje**  $X$ , hacia la derecha del origen, y la dirección positiva en el **eje**  $Y$  arriba del origen.

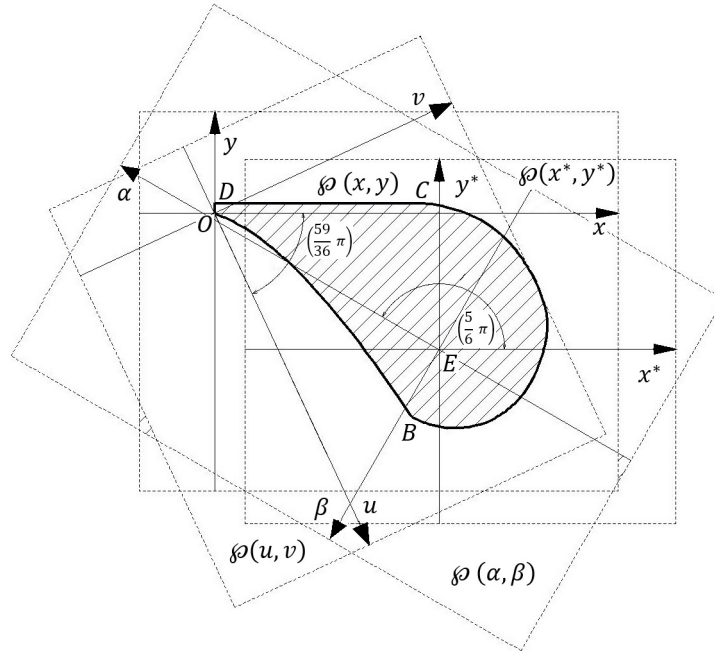


Figura 1.1: Plano Geométrico  $\varphi(X, Y)$ .

Para cada punto  $\mathcal{P}^*$  del plano geométrico, consideremos las rectas denominadas:  $\mathcal{L}_1^*$  y  $\mathcal{L}_2^*$ , siendo estas rectas perpendiculares a los ejes  $X$  e  $Y$ , respectivamente, trazadas desde  $P$ . La componente que corresponde a la intersección de  $\mathcal{L}_1^*$  con el eje  $X$ , es denominada por medio de: **Abscisa del punto**  $\mathcal{P}^*$ ; o bien, con el nombre de coordenada  $x$ ; y se denota por medio de  $x$ , mientras que el número que corresponde a la intersección de  $\mathcal{L}_2^*$  con el eje  $Y$  y es denominada por medio de: ordenada del punto  $\mathcal{P}^*$ ; o bien, como coordenada  $y$ , y es denotada por medio de  $y$ .

Por el método descrito, siempre es posible asignarle a cada punto  $\mathcal{P}^*$  del plano geométrico  $\varphi(X, Y)$ , un único par ordenado, denominado  $(X, Y)$ ; el cual, es formado por su abscisa y ordenada. Recíprocamente, a cada par ordenado  $(U, V)$  del espacio  $\mathbb{R}^2$ , es posible asignar un único punto  $\mathcal{Q}^*$  en el plano

geométrico  $\wp(X, Y)$ . Para el cual, es posible conseguir ubicando el elemento  $U$  sobre el eje  $X$ , y el elemento  $V$  en el eje  $Y$ . Luego, es necesario, trazar las rectas  $\mathcal{L}_1^*$  y  $\mathcal{L}_2^*$ , de manera perpendicular a los ejes  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Esto corresponde, sobre los puntos:  $u^*$  y  $v^*$ . La intersección de las rectas  $\mathcal{L}_1^*$  y  $\mathcal{L}_2^*$ , se realiza, con el propósito para determinar el punto  $Q^*$ .

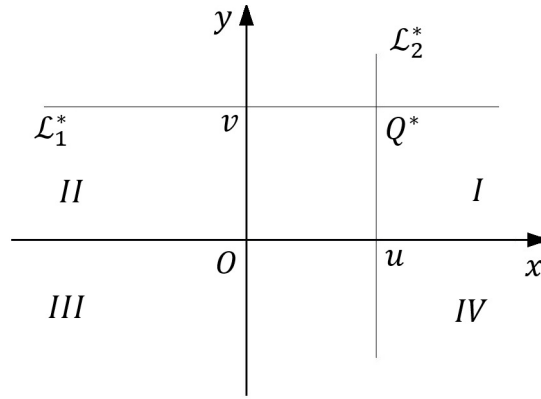


Figura 1.2: *Plano Geométrico Representativo del Método de Descartes.*

Se ha establecido una **correspondencia biunívoca**, entre cada punto  $\mathcal{P}^*$  del plano geométrico  $\wp(X, Y)$ ; y a cada par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , en el siguiente sentido:

**Para cada punto  $\mathcal{P}^*$  le corresponde un único par  $(x, y)$ ; y recíprocamente, a cada par  $(x, y)$  corresponde un único punto  $\mathcal{P}^*$ .**

La correspondencia biunívoca, se le denomina como un sistema o dominio de coordenadas rectangulares cartesianas.

Los ejes  $X$  e  $Y$ , son denominados ejes coordenados, y dividen al plano en 4 regiones, cada una de las cuales son denominadas **cuadrantes**. Se debe considerar como el primer cuadrante, aquel cuadrante en donde: **la abscisa y ordenada son positivas**; los otros se enumeran siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj. esto se logra, mediante el recorrido angular de la evoluta sobre el plano mencionado  $\wp(X, Y)$ .

En virtud de la correspondencia establecida, queda identificado que el espacio denominado como  $\mathbb{R}^2$  con el plano geométrico  $\wp(X, Y)$ , de este modo podemos llamar a cada par ordenado  $(X, Y)$  con la

palabra punto en el plano. En adelante si el punto  $\mathcal{P}^*$  tiene coordenadas , descritas de modo genérico  $(x, y)$ , lo cual, expresaremos a dicho punto mediante  $\mathcal{P}^* = (x, y)$ , o simplemente  $\mathcal{P}^*(X, Y)$ .

## Distancia Entre dos Puntos.

Al obtener una formula, la cual, nos permita determinar la distancia entre dos puntos en un plano cartesiano  $\wp(X, Y)$ ; Siendo estos:  $\mathcal{P}^*(X_1, Y_2)$  Y  $\mathcal{Q}^*(X_2, Y_2)$ . Por la correspondencia biunívoca establecida entre los planos numéricos y geométricos, podernos identificar la idea de distancia entre dos puntos, bajo el concepto geométrico correspondiente a la **longitud de un segmento**. Si al denotar esta distancia mediante  $\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$ , correspondiente a la distancia entre los puntos  $\mathcal{P}^*$  y  $\mathcal{Q}^*$ ; o también, por  $\overline{\mathcal{P}^*\mathcal{Q}^*}$ , al segmento que une a ambos puntos. Por lo tanto, podemos decir que:  $\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*) = |\overline{\mathcal{P}^*\mathcal{Q}^*}|$ . Para lo cual, la distancia corresponde a la norma lineal de los puntos involucrados  $\mathcal{P}^*$  y  $\mathcal{Q}^*$ .

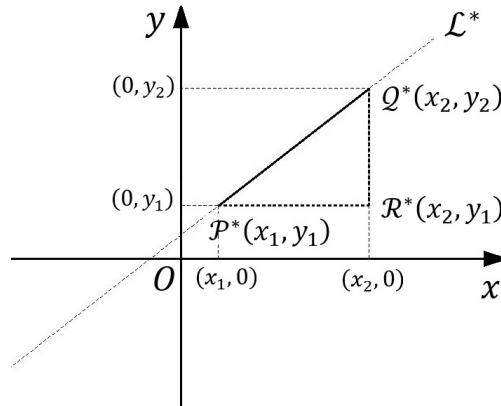


Figura 1.3: *Represntación Cartesiana correspondiente a la distancia entre dos puntos.*

Trazando el triángulo rectángulo sobre los puntos  $\mathcal{P}^*$  y  $\mathcal{Q}^*$  de la figura .3; cuyo rectángulo en  $\Delta \mathcal{P}^*\mathcal{R}^*\mathcal{Q}^*$ . Las coordenadas sobre el punto  $\mathcal{R}^*$  son  $(x_2, y_1)$ . Por encontrarse los puntos  $\mathcal{P}^*$  y  $\mathcal{R}^*$ , sobre una recta paralela al eje de abscisas. Entonces, la distancia entre dos puntos, corresponde:  $\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{R}^*) = |\overline{\mathcal{P}^*\mathcal{R}^*}| = |x_2 - x_1|$ . Por encontrarselos puntos  $\mathcal{Q}^*$  y  $\mathcal{R}^*$  sobre una recta paralela al eje de ordenadas. Entonces la distancia entre dos puntos, corresponde en este caso:  $\mathfrak{d}(\mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*) = |\overline{\mathcal{Q}^*\mathcal{R}^*}| = |y_2 - y_1|$ . Luego, mediante el Teorema de Pitágoras, podemos obtener:

$$\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*) = \mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{R}^*) + \mathfrak{d}(\mathcal{R}^*, \mathcal{Q}^*)$$

$$\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*) = \sqrt{[\mathfrak{d}^2(\mathcal{P}^*, \mathcal{R}^*) + \mathfrak{d}^2(\mathcal{R}^*, \mathcal{Q}^*)]}$$

$$\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*) = \sqrt{[|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2]}$$

De esta forma, logramos obtener:

$$\mathfrak{d}(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.17)$$

## 1.8. Sistema de Coordenadas Polares.

Consideraremos una recta en el plano geométrico  $\wp(X, Y)$ , que denominaremos como eje polar y un punto fijo en esta recta que llamaremos polo. Fijamos la dirección positiva del eje polar a la derecha del polo. Para cada punto  $\mathcal{P}^*$  del plano consideremos el segmento  $\overline{\mathcal{OP}^*}$ , uniendo al polo  $\mathcal{O}$  con el punto  $\mathcal{P}^*$  y el ángulo  $\theta_\mu$ , logra hacer que este segmento  $\overline{\mathcal{OP}^*}$  con la parte positiva del eje polar. La longitud correspondiente al segmento  $\overline{\mathcal{OP}^*}$ , es equivalente al radio vector, el cual, denotaremos por medio de  $R_{\mathcal{P}^*}^*$ ; además, el ángulo  $\theta_{\mathcal{P}^*}$ , es equivalente al ángulo polar o vectorial.

Los valores de  $R_{\mathcal{P}^*}^*$  y  $\theta_{\mathcal{P}^*}$ , son denominadas coordenadas polares del punto  $\mathcal{P}^*$ , y se encuentran denotadas por medio de  $\mathcal{P}^*(R_{\mathcal{P}^*}^*, \theta_{\mathcal{P}^*})$ .

Existen diversas convenciones acerca de los signos que se pueden asignar, en este caso, se denotarán las coordenadas polares mediante: a  $R_{\mathcal{P}^*}^*$  y  $\theta_{\mathcal{P}^*}$ .

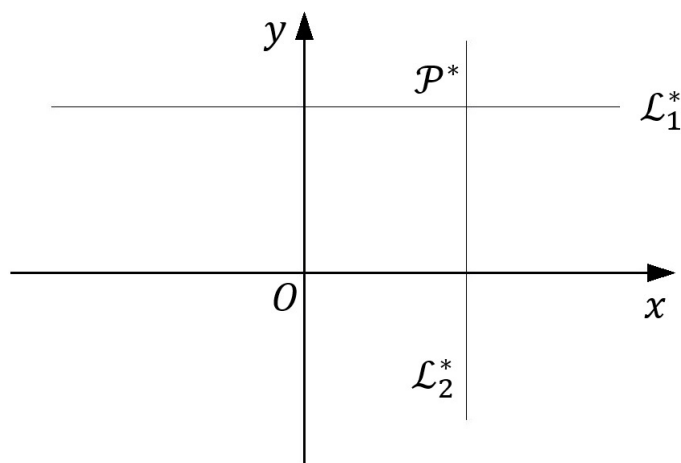


Figura 1.4: *Representación de las Coordenadas Polares.*

## Cambio de Coordenadas Polares.

Frecuentemente, se hace necesario transformar una ecuación cartesiana de un lugar geométrico en la respectivamente a una ecuación polar y viceversa.

Esta metododlogía de transformación, nos permiten estas transformaciones que pueden determina, de manera sencilla; al consideramos un sistema cartesiano rectangular, y un sistema polar de manera que el origen; el eje de abscisas del primero coincidan con el polo y el eje polar del segundo, respectivamente, como se muestra en la figura .5.

Entonces, para un punto  $\mathcal{P}^*$  en el plano  $\wp(X, Y)$  cualquiera, las coordenadas polares  $(R_{\mathcal{P}^*}, \theta_{\mathcal{P}^*})$ , se pueden establecer mediante:

$$\Delta x = R^* \cos(\theta_{\mathcal{P}^*}) \quad \Delta y = R_{\mathcal{P}^*} \cos(\theta_{\mathcal{P}^*}) \quad (1.18)$$

Esto nos permite, obtener las coordenadas cartesianas de un punto conocido sus coordenadas polares.



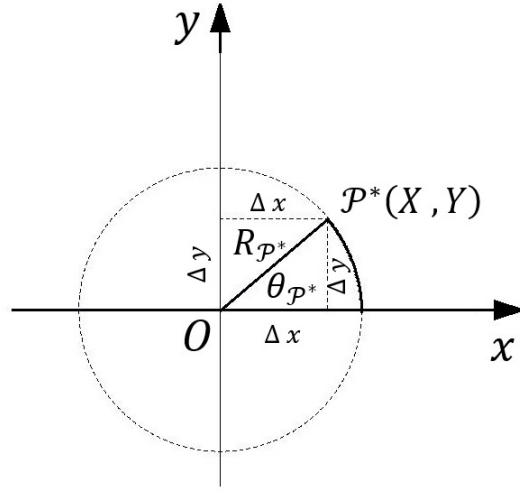


Figura 1.5: *Geometría Representativa de la Transformación de Coordenadas Polares.*

Por lo tanto:

$$R_{\mathcal{P}^*} = \frac{\Delta x}{\cos(\theta_{\mathcal{P}^*})} \quad \wedge \quad R_{\mathcal{P}^*} = \frac{\Delta y}{\sin(\theta_{\mathcal{P}^*})}$$

$$\frac{\Delta x}{\cos(\theta_{\mathcal{P}^*})} = \frac{\Delta y}{\sin(\theta_{\mathcal{P}^*})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(\theta_{\mathcal{P}^*})}{\cos(\theta_{\mathcal{P}^*})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\theta_{\mathcal{P}^*})$$

De este modo, obtenemos:

$$\theta_{\mathcal{P}^*} = \arctan \left[ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] \quad (1.19)$$

Para el caso, correspondiente a la determinación del radio vector  $R_{\mathcal{P}^*}$ , utilizaremos las distancias métricas para aquel fin. Por lo tanto, podemos inferir lo siguiente:

Utilizando la desigualdad triangular, equivalente a la métrica euclídea para las distancias correspondientes:

$$\mathfrak{d} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) & = & |\Delta x - \Delta y| = R_{\mathcal{P}^*}^2 \\ \mathfrak{d}(\Delta x, \Delta z) & = & |\Delta x - \Delta z| \\ \mathfrak{d}(\Delta z, \Delta y) & = & |\Delta z - \Delta y| \end{array} \right.$$

Por lo tanto, la desigualdad triangular, queda expresada mediante:

$$\mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) = \mathfrak{d}(\Delta x, \Delta z) + \mathfrak{d}(\Delta z, \Delta y) \quad (1.20)$$

Cuya determinación, corresponde al desarrollo de lo expresado; tal que:

$$\mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) = \mathfrak{d}(\Delta x, \Delta z) + \mathfrak{d}(\Delta z, \Delta y)$$

$$\mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) = |\Delta x - \Delta z| + |\Delta z - \Delta y|$$

$$\mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) = |\Delta x| + |\Delta z| + |\Delta y| + (-1)|\Delta z|$$

$$\mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) = |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$\mathfrak{d}(\Delta x, \Delta y) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

$$R_{\mathcal{P}^*}^2 = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

$$R_{\mathcal{P}^*}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

$$R_{\mathcal{P}^*} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (1.21)$$

### 1.8.1. Gráficas Definidas por Ecuaciones en Coordenadas Polares.

De acuerdo a la definición correspondiente sobre las gráficas para ecuaciones, la gráfica de una ecuación en polares es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a dicha ecuación.

Según esto, el método general para trazar una gráfica consiste en dar valores a una de las variables en la ecuación y encontrar el valor correspondiente a la otra variable, determinándose de esta manera, los pares ordenados respectivos  $(R_{\mathcal{P}^*}, \theta_{\mathcal{P}^*})$ , que satisfacen a la ecuación.

En la práctica, el trazado de las gráficas puede simplificarse, al efectuarse previamente un estudio de intersecciones, simetría y extensión.

La determinación de las asíntotas, en coordenadas polares, sin la utilización del cálculo diferencial, es bastante tedioso, y se prefiere omitirlo.

- **Intersecciones:** En las intersecciones, se acostumbra a determinarse por medio de la componente al eje polar  $X$ ; y a un eje perpendicular a este eje polar, ubicándose en el polo.

Las primeras intersecciones, se encuentran de los valores, equivalentes al ángulo azimutal  $\theta_{\mathcal{P}^*}$ . Por ende, diremos que estos valores equivalen :  $\theta_{\mathcal{P}^*} = 0, \theta_{\mathcal{P}^*} = \pm\pi, \theta_{\mathcal{P}^*} = \pm 2 \cdot \pi, \theta_{\mathcal{P}^*} = \pm 3 \cdot \pi, \dots$ , etc. En general, para los valores de  $n \in \mathbb{Z}$ , quedan determinadas las ecuaciones para los correspondientes valores de  $R_{\mathcal{P}^*}$ .

Existen algunas intersecciones con el eje , cuyo ángulo equivale a  $\theta_{\mathcal{P}^*}$ . Estas intersecciones, se obtienen igualando este ángulo a la expresión:  $\theta_{\mathcal{P}^*} = \frac{n}{2}$ ; tal que:  $n = 2k - 1 \vee n = 2k \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ ; o también:

$$\theta_{\mathcal{P}^*} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \quad : \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.22)$$

## 1.9. Espacios Vectoriales Lineales

En resumen; un espacio vectorial lineal es un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera sobre el que pueden realizarse ciertas operaciones llamadas adición y multiplicación por números. Al definir un espacio vectorial lineal no especificamos la naturaleza de los elementos ni decimos cómo se realizan las operaciones entre ellos. En cambio, exigimos que las operaciones tengan ciertas propiedades que tomamos como axiomas de un espacio lineal.

### Definición:(Espacio Vectorial Lineal).

Sea  $\vec{V}$  un conjunto no vacío de objetos, llamados elementos, cuyo conjunto  $\vec{V}$  se le llama espacio vectorial lineal, si satisface los diez axiomas que muestran a continuación; los cuales, se agrupan en tres.

1. **Axiomas de clausura:**

2. **Axioma 1;** Axioma de clausura con respecto a la adición: A todo par de elementos denominados como  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  del conjunto  $\vec{V}$  corresponde un elemento único de  $\vec{V}$ ; lo cual, le llamamos suma de  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , designándolo por  $\vec{x} + \vec{y}$ .

3. **Axioma 2;** Clausura con respecto de la multiplicación por números reales:

A todo  $\vec{x}$  perteneciente al conjunto  $\vec{V}$ ; además, todo número real  $\alpha_\beta^*$  corresponde a un elemento de  $\vec{V}$ , denominado producto de  $\alpha_\beta^*$  por  $\vec{x}$ , y se le designa por  $\alpha_\beta^* \cdot \vec{x}$ .

1. **Axiomas para la adición:**

2. **Axioma 3;** Ley conmutativa: Para todo elemento  $\vec{x}$ , y todo elemento  $\vec{y}$  perteneciente al conjunto  $\vec{V}$ , se tiene que la conmutatividad equivale:  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .

3. **Axioma 4;** Ley asociativa: Cualesquiera que sean los elementos denominados  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , y  $\vec{z}$ ; pertenecientes al conjunto  $\vec{V}$ , se tiene que la asociatividad corresponde:  $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ .

4. **Axioma 5**; Existencia del elemento cero: Existe un elemento en el conjunto  $\vec{V}$ , denominado con el número cero vectorial  $\vec{0}$ ; tal que, la operación por este número equivale:

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \vec{V} \quad (1.23)$$

1. **Axiomas para la multiplicación por números:**

2. **Axioma 7; Ley asociativa:** Para todo elemento  $\vec{x}$  perteneciente al conjunto  $\vec{V}$ ; se tiene que, todo par de números reales denominados  $\alpha_\beta^*$  y  $\beta_\alpha^*$ , la ley asociativa se expresa mediante:

$$\alpha_\beta^* \cdot (\beta_\alpha^* \cdot \vec{x}) = (\alpha_\beta^* \cdot \beta_\alpha^*) \cdot \vec{x} \quad (1.24)$$

3. **Axioma 8; Ley distributiva para la adición en un conjunto  $\vec{V}$ :** corresponde, Para todos los elemento  $\vec{x}, \vec{y}$ , que perteneciente al conjunto  $\vec{V}$ ; además, todo número real  $\alpha_\beta^*$ , la expresión equivalente a la distributividad para la adición corresponde:

$$\alpha_\beta^* \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha_\beta^* \cdot \vec{x} + \alpha_\beta^* \cdot \vec{y} \quad (1.25)$$

4. **Axioma 9; Ley distributiva para la adición de números reales distintos:** Para todo elemento  $\vec{x}$  perteneciente al conjunto  $\vec{V}$ , y todo par de números reales  $\alpha_\beta^*$  y  $\beta_\alpha^*$ , la distributividad para la adición de números reales distintos corresponde:

$$(\alpha_\beta^* + \beta_\alpha^*) \cdot \vec{x} = \alpha_\beta^* \cdot \vec{x} + \beta_\alpha^* \cdot \vec{x} \quad (1.26)$$

5. **Axioma 10; Existencia de un elemento idéntico:** Para todo elemento  $\vec{x}$  perteneciente al conjunto  $\vec{V}$ , se expresa la existencia de un elemento idéntico, por medio de:

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \vec{V} \quad (1.27)$$

Los espacios vectoriales lineales como se definen, a veces se les denominan espacios vectoriales lineales reales, esto para resaltar el hecho de que se multiplican los elementos de un conjunto  $\vec{V}$  por números reales, denominados por  $\alpha_\beta^*$  y  $\beta_\alpha^*$ . Si en los axiomas para los espacios vectoriales lineales 2, 7, 8 y 9, al reemplazar número real por número complejos, la estructura resultante se le denomina espacio vectorial lineal complejo. Algunas veces, un espacio vectorial lineal se le denomina también espacio vectorial; y los números utilizados como multiplicadores se denominan escalares. Un espacio vectorial lineal real, tiene números reales como escalares; un espacio vectorial lineal complejo tiene como escalares números complejos. Si se considera, principalmente los ejemplos de espacios lineales reales, todos los teoremas son válidos para los espacios vectorial lineales complejos. Cuando se dice que un espacio vectorial lineal, se tiende a sobre entender que dicho espacio vectorial lineal, puede ser real o complejo.

## Consecuencias Fundamentales de los Axiomas.

Los siguientes teoremas, se deducen con facilidad de los axiomas para un espacio vectorial lineal:

### Teorema: (Unicidad del elemento cero).

En cualquier espacio vectorial lineal, existe un elemento cero, y solamente uno.

### Demostración:

Según el axioma 5 para un espacio vectorial lineal, este nos asegura que existe por lo menos un elemento cero. Suponiendo que estos sean dos hipotéticamente; por lo cual, estos elementos denominados  $\vec{x}_1 = \vec{0}_1$  y  $\vec{0} = \vec{0}_2$ . Igualando estos elementos por variables denominadas  $\vec{x}_1 = 0$  y  $\vec{0} = \vec{0}_2$ . Del

axioma 5 para un espacio vectorial lineal, se obtiene la relación equivalente:  $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_1$ , Análogamente, igualando sustitutivamente los elementos por variables equivalentes:  $\vec{x} = \vec{0}_2$  y  $\vec{0} = \vec{0}_1$ , de esta manera se encuentra que:  $\vec{0}_2 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2$ . Pero a su vez, según la igualdad que se expresa a través de la ley conmutativa equivalente:  $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1$ ; por lo tanto,  $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$ .

### Teorema; (Unicidad de los elementos opuestos):

En cualquier espacio vectorial lineal, todo elemento tiene exactamente un elemento opuesto. Esto quiere decir, para todo elemento denominado  $\vec{x}$  existe un elemento  $\vec{y}$ . Además, solamente uno tal que este equivalga  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ .

### Demostración:

Según el axioma 6, este indica la existencia de opuestos; lo cual, que cada elemento  $\vec{x}$  tiene por lo menos un opuesto; a saber esto, que el elemento opuesto para este caso corresponde  $(-1)\vec{x}$ . Suponiendo que el elemento  $\vec{x}$  tenga dos opuestos; además, sean  $\vec{y}_1$  e  $\vec{y}_2$ . Por lo tanto, al igualar los elementos descrito según el axioma para un espacio vectorial lineal, se tiene:  $\vec{x} + \vec{y}_1 = \vec{0}$  y  $\vec{x} + \vec{y}_2 = \vec{0}$ ; lo cual, sumando  $\vec{y}_2$  a los dos miembros de la primera igualdad y aplicando los axiomas 5, 4 y 3 de un espacio vectorial lineal, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 + (\vec{x} + \vec{y}_1) &= \vec{y}_2 + \vec{0} = \vec{y}_2 \\ \vec{y}_2 + (\vec{x} + \vec{y}_1) &= (\vec{y}_2 + \vec{x}) + \vec{y}_1 = \vec{0} + \vec{y}_1 \\ &= \vec{y}_1 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Por lo consiguiente, se tiene que  $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$ ; con lo cual, el elemento  $\vec{x}$  tiene un opuesto, el elemento  $(-1)\vec{x}$ .

## Notación:

El opuesto del elemento  $\vec{x}$  se designa por el opuesto al elemento  $-\vec{x}$ . La diferencia entre los elementos  $\vec{y} - \vec{x}$ , se define mediante la suma equivalente entre  $\vec{y} + (-\vec{x})$ .

A continuación el siguiente teorema muestra un conjunto de propiedades que rigen para los cálculos algebraicos elementales en un espacio vectorial lineal.

## Teorema:

En un espacio vectorial lineal, designando los elementos involucrados con  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , para dos elementos cualesquiera; además, denominando a  $\alpha_\beta^*$  y  $\beta_\alpha^*$  dos escalares cualesquiera. Para esto, se tienen las siguientes propiedades:

$$1. \quad \vec{0} = \vec{0}$$

$$2. \quad \alpha_\beta^* \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$3. \quad (-\alpha_\beta^*) \cdot \vec{x} = -(\alpha_\beta^* \cdot \vec{x}) = \alpha_\beta^* \cdot (-\vec{x})$$

$$4. \text{ Si: } \alpha_\beta^* \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ ; implica que: } \alpha_\beta^* = 0 \quad \vee \quad \vec{x} = \vec{0}$$

$$5. \text{ Si; } \alpha_\beta^* \vec{x} = \alpha_{\beta^*} \vec{y} \text{ , además } \alpha_\beta^* \text{, entonces } \vec{x} = \vec{y} \text{ .}$$

$$6. \text{ Si } \alpha_\beta^* \vec{x} = \beta_\alpha^* \vec{x} \text{ , y } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ , entonces } \alpha_\beta^* = \beta_\alpha^* \text{ .}$$

$$7. \quad (-1)(\vec{x} + \vec{y}) = (-\vec{x}) + (-\vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}.$$

$$8. \text{ Si; } \vec{x} + \vec{x} = 2 \cdot \vec{x} \text{ , } \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} = 3 \cdot \vec{x} \text{ ; Esto en general, se traduce en:}$$



$$\sum_{i=1}^n \vec{x}_i = n \cdot \vec{x} \quad (1.29)$$

### Subespacios de un Espacio Vectorial Lineal.

En un espacio vectorial lineal  $\vec{V}$ , siendo  $\vec{S}$  un subconjunto no vacío del espacio vectorial lineal  $\vec{V}$ . Si  $\vec{S}$  es un subconjunto de  $\vec{V}$ , es también este es un espacio vectorial lineal; por lo tanto,  $\vec{S}$  se llama subespacio de  $V$ . El próximo teorema indica un sencillo criterio para determinar si un subconjunto de un espacio vectorial lineal, si este es o no un subespacio vectorial:

#### Teorema:

Sea  $\vec{S}$ , un subconjunto no vacío de un espacio vectorial lineal  $\vec{V}$ . Tal que, el subconjunto  $\vec{S}$  es un subespacio vectorial; si y sólo si, satisface los axiomas de clausura.



## Capítulo 2

# Descripción Experimental Para Modelo del Perfil del Álabes.

### 2.1. Descripción General.

### 2.2. Generalidades del Álabes Direccional.

La *Génesis* correspondiente a: **Simulación de Parámetros Superficiales y Volumétricos Para un álabes Direccional de una Turbina de Media Potencia, Tipo Michell Banki**, siendo éste procesos descrito mediante herramientas geométrica euclideas y algebraicas. Lo cual, mediante este procesos para la determinación de valores relacionados a este elemento; puedan reflejar un alto grado de taxatividad sobre dos aristas de estudio de forma principal. Dichas aristas de estudio analítico matemático corresponden a: geométricas euclideas y algebraicas,

a los análisis que se involucran sobre: *La simulación superficial del perfil del álabes direccional y sus parámetros asociados*, existe un estudio preliminar, publicado en el año 2015, denominado *Modelación de Parámetros Geométricos para un álabes deireccional de turbina de media potencia*<sup>1</sup>, que fue realizado como un trabajo de título de pregrado de *Ingeniería Mecánica*, en la *Universidad de La Frontera*. Basandose en este estudio de forma preliminar, se propone realizar un

---

<sup>1</sup>Trabajo realizado por: *Gonzalo Moya Navarrete*, y dirigido por el Profesor: *René Cifuentes Bobadilla*. Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de La Frontera, Temuco - Chile

nuevo estudio, en la cual, éste tiene dos aristas, cuya esencia es la geometría euclídea:

- **Simulación de los Parámetros Superficiales Para el Perfil del Álabé Direccional.**
- **Determinación de Parámetros Volumétricos Para el Álabé Direccional.**

Sobre el primer punto mencionado anteriormente, se intenta de un modo matemático determinar, volores analíticos asociados a la superficie, tomando como referencia cualquiera de los perfiles del álabé direccional, ya que, este elemento tiene simetría. El contorno superficial del perfil izquierdo en el álabé direccional, mediante ecuaciones y descripciones geométricas, las cuales, corresponden a representaciones equivalentes a dominios en sistemas coordenados cartesianos, lo cual, los trazos que componen el contorno superficial del álabé del perfil izquierdo del álabé direccional, cuya descripción geométrica, corresponde a trazos rectos y curvos. Estos trazos, cuya geometría debe encontrarse en concordancia a las formas que se describen según la superficie de este perfil.

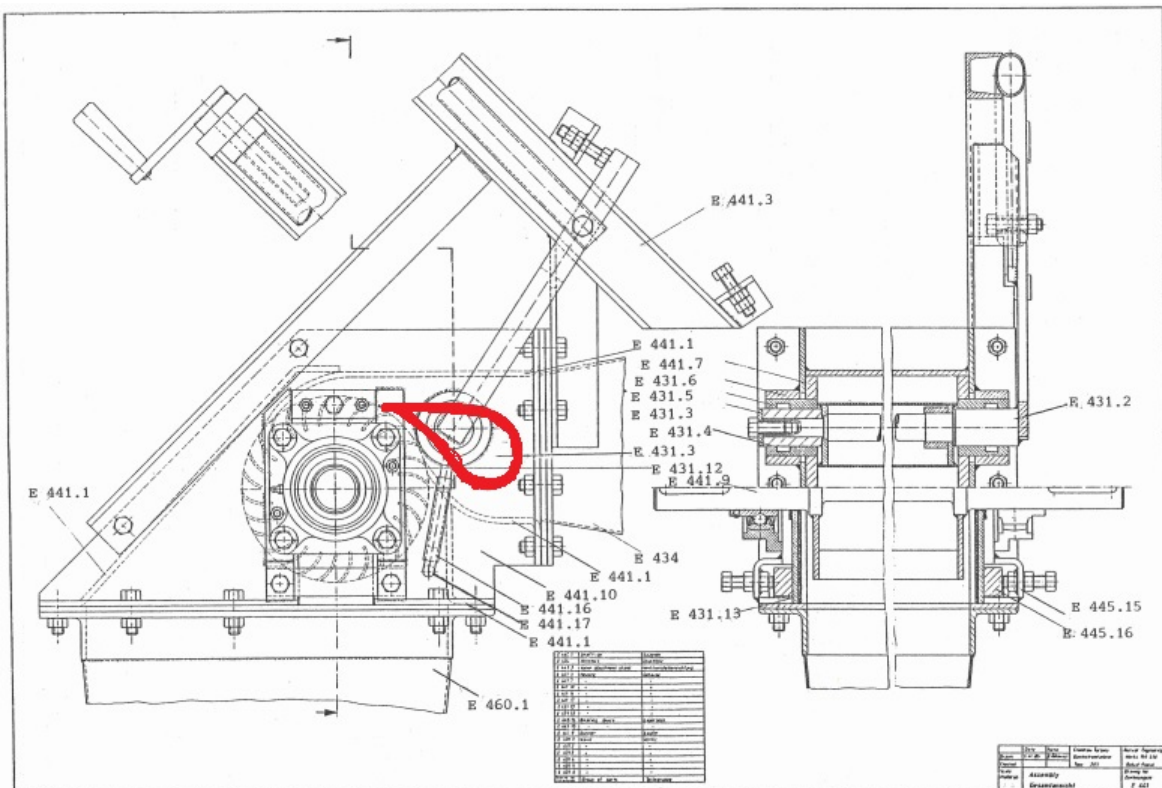


Figura 2.1: Plano de ingeniería en vista general de la turbina de media potencia, Tipo Michell Banki  
En Rojo: Álabe Direccional

Fuente: German Appropriate Technology Exchange  
Deutsches Zentrum Für Entwicklungstechnologien

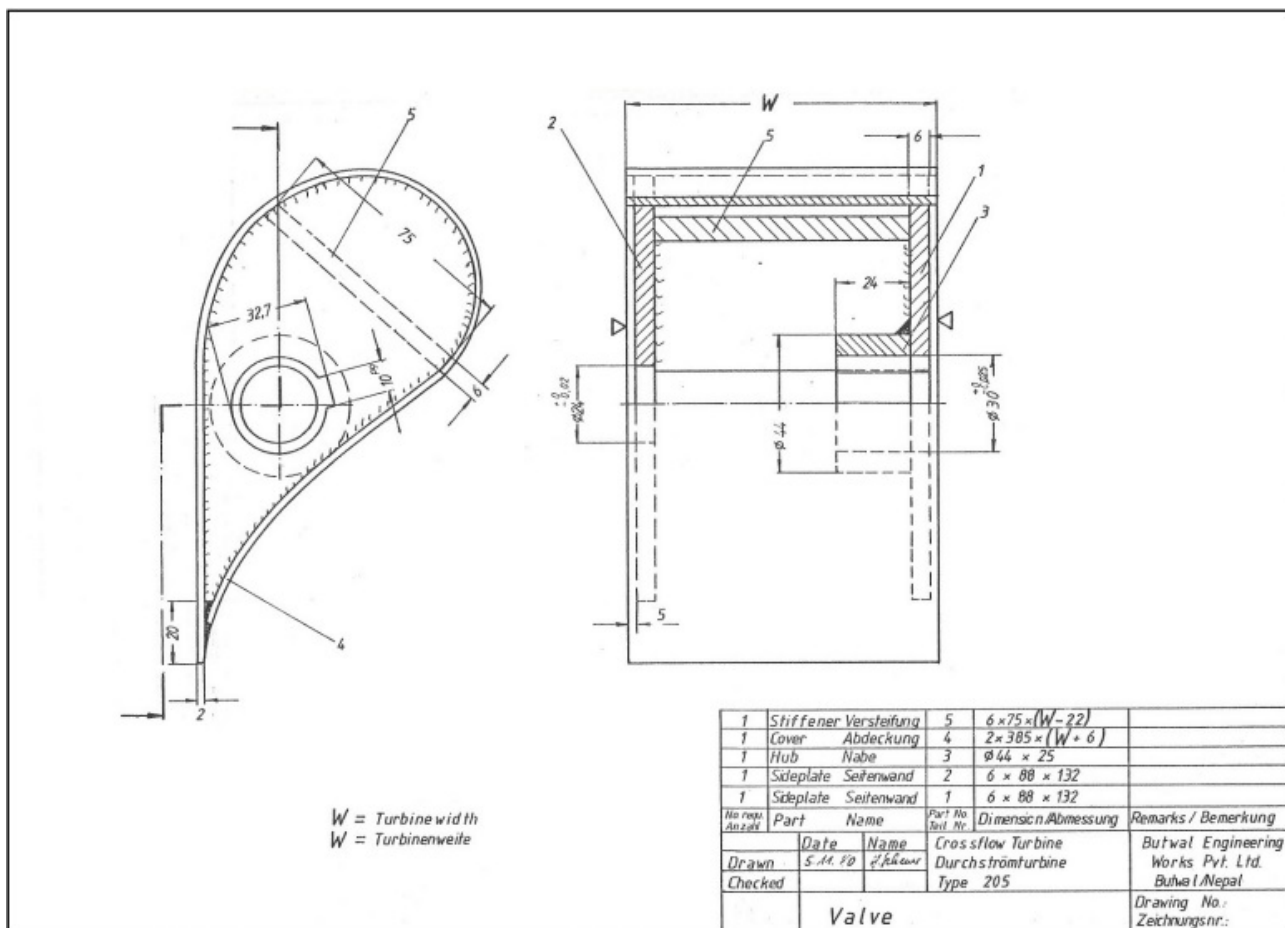


Figura 2.2: Plano de ingeniería en vista general del **Álabe Direccional** de la turbina de media potencia, **Tipo Michell Banki**

Fuente: German Appropriate Technology Exchange  
 Deutsches Zentrum Für Entwicklungstechnologien.

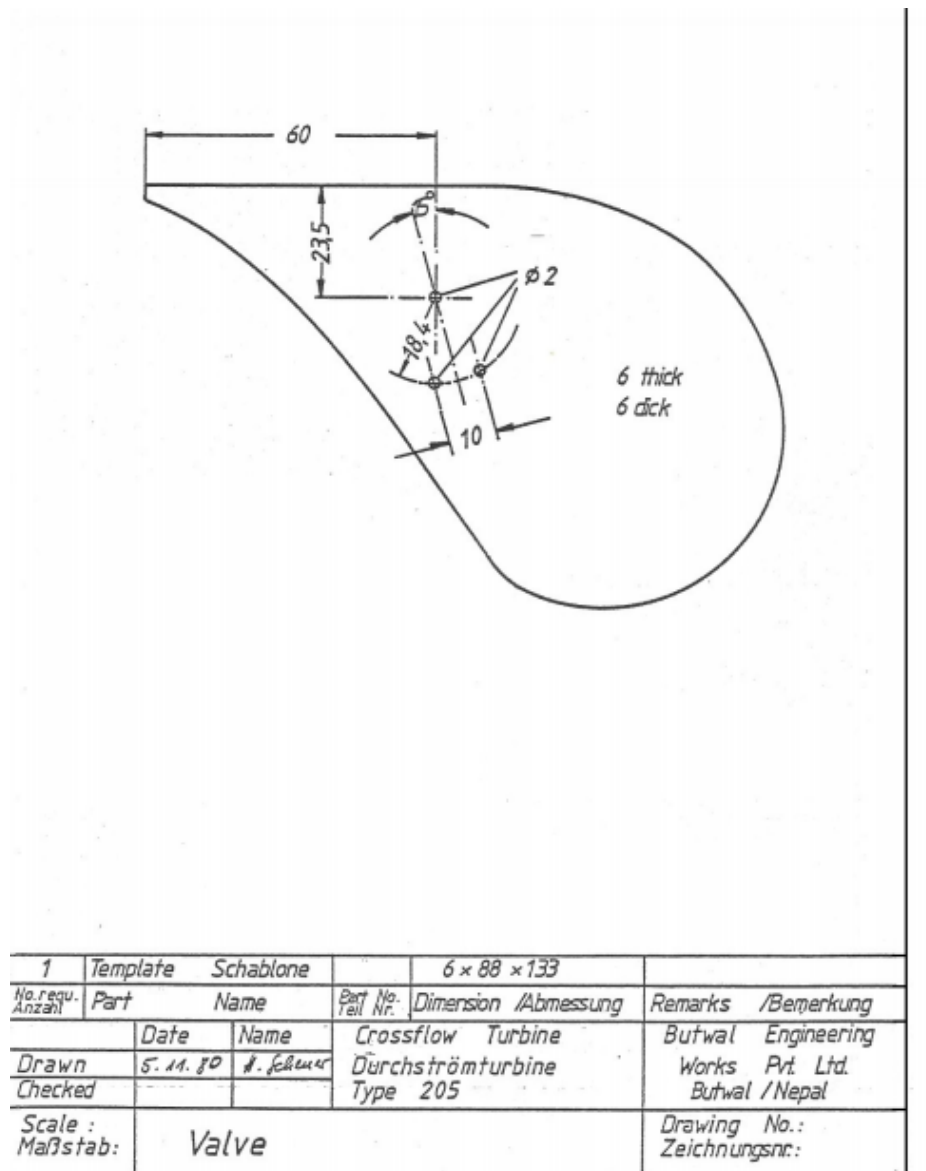


Figura 2.3: Plano de ingeniería en vista de perfil izquierdo del *Álabe Direccional de la turbina de media potencia, Tipo Michell Banki*

Fuente: *German Appropriate Technology Exchange*  
*Deutsches Zentrum Für Entwicklungstechnologien*

Al mencionar al contorno superficial del perfil del álabe direccional, cuyo contorno se muestra en la figura .3; los segmentos inferior izquierdo y derechos, por condición hidrodinámica, para la construcción de este elemento sólido, es necesario que éstos segmentos sean geoméricamente suaves. Esto se encuentra en relación a las pérdidas hidráulicas que se generan en el flujo circundante dentro de esta turbomáquina.

Se debe tener presente que, las pérdidas que se generan dentro de una turbina generadora de potencia eléctrica, se dividen en tres, siendo éstas pérdidas:

- **Pérdidas Mecánicas  $\eta_m$ :** *Este tipo de pérdidas, se encuentran relacionadas principalmente a fricciones que se generan entre los elementos componente de una turbina generadora, estando esta en funcionamiento.*
- **Pérdidas Volumétricas  $\eta_v$ :** *Con respecto a estas pérdidas, podemos decir que, éstas se encuentran relacionadas con fisuras que se pueden generar en la compuerta de la turbina generadora; o bien, en la carcasa comunicante de fluido hidráulico hacia el rotor. Además, existen pérdidas volumétricas relacionadas a un caudal de retorno que se produce en el interior de la turbina generadora.*
- **Pérdidas Hidráulicas  $\eta_h$ :** *Sobre estas pérdidas, se debe mencionar que, son generadas principalmente por turbulencias en el fluido circundante, y rompimiento de capa límites en este. Además, sobre este tipo de pérdidas, se debe mencionar que, implícitamente, estas pérdidas se encuentran relacionadas con la velocidad del fluido circundante, y la presión generada dentro del volumen de control, que para este caso, puede ser: compuerta , carcasa comunicante o inyector.*

También, se debe mencionar que, para poder expresar una resultante total de manera matemática sobre las pérdidas totales dentro de la turbina  $\eta_t$ , se debe considerar que dicha expresión resulta ser el producto de estas tres pérdidas en la turbina generadora. Por lo tanto, la ecuación que representa a la totalidad de las pérdidas que se generan en la turbomáquina corresponde:

$$\eta_t = \eta_m \eta_v \eta_h \quad (2.1)$$

El perfil superficial del álabe direccional de una turbina de media potencia, se puede describir de manera geométrica, de dos formas distintas. Estas formas, corresponden y de forma gráfica; podemos



representar a dicho elemento, a través de: Una descripción geométrico cartesiana, y utilizando técnicas de geometría descriptiva

Basandose en la información técnica ingenieril de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki; cuyos estudios técnicos y ensayos de ingeniería, que previamente fueron realizados en Nepal.

Las condiciones geográficas que presenta Nepal. También es necesario mencionar que, la situación de tención geopolitica que se vivía en aquella época, siendo un país que se encuentra en continente asiatico, situado entre China e India; genera una gran dificultad de poder implementar este tipo de tecnologías.

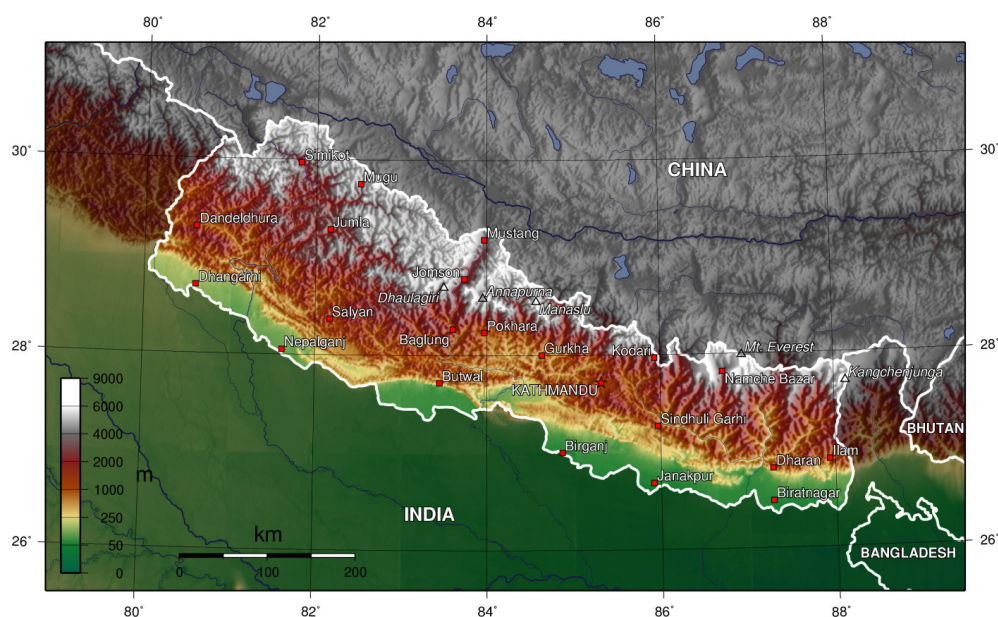


Figura 2.4: *Situación Físico Geográfica de Nepal*

*Fuente: Instituto Geográfico Militar*

*Gobierno de Chile.*

Además, el país de Nepal siendo un país el cual, en aquella época, pertenecía al grupo de países del *Tercer mundo*. Teniendo presente, que este concepto geopolítico, nbo radica en el hecho relacionado a su subdesarrollo del todo; sino que, corresponde al hecho de no aliarse a ninguna de las potencias militares de aquella época, siendo estas: La Unión de Repúblicas Socialistas Sovieticas (*U.R.S.S.*) y los

Estados Unidos de América (*U.S.A.*). También Nepal, en la situación geográfica mediterranea, cuyos países colindantes, aliados a las distintas potencias militares de la época; Por el Norte: *La República Popular China*, aliado de la *U.R.S.S.* Por el sur: *India*, aliado militar de los *Estados Unidos*.

Respecto a la demografía en el territorio de este país, mayoritariamente, en casi un 60 % del total de sus habitantes en aquella época, era población rural. Lo cual, por parte de distintos organismos y empresas de Europa y Estados Unidos, implementan y financian, para poder llevar a cabo un plan de energización eléctrica en Nepal, mediante la tecnología de generación eléctrica, utilizando el recurso hídrico; para lo cual, fue necesario según el recurso hídrico disponible para los distintos, en los sectores mayormente residenciales de la población rural de Nepal.

La situación geográfica de Nepal, como lo muestra la figura .1; existe un cordón montañoso, que cruza de manera transversal el territorio comprendido, este cordón montañoso es llamado *Las Montañas de Los Hymalayas*. En honor a la situación geográfica del territorio de este país, éste país, oficialmente es llamado *Reino de Los Hymalayas de Nepal*. De manera anecdótica, la bandera que representa casi todos los países del mundo, hasta esa época, son de forma rectangular, exceptuando la de Nepal, cuya forma es triangular horizontal; ésto representa, de alguna manera, a su soberanía territorial montañosa.



Figura 2.5: Bandera de Nepal

En las faldas de las colinas montañosas de *Los Hymalayas*, existen numerosos ríos y esteros que nacen de los deshielos de este cordón montaño en las colinas anexas del cordón cuyo interés se centra

en el álabe direccional. Este elemento mecánico, como todo elemento componente, bajo el concepto técnico de partes y piezas constitutiva de un conjunto total, lo cual, en este caso, dicho conjunto corresponde al total de partes y piezas de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki.

En la figura .1; y .2. Se muestran dos maneras gráficas que describe la geometría, correspondiente a la representación del álabe direccional de esta turbina de media potencia, tipo Michell Banki. Siendo la primera figura (figura .1.), la representación gráfica, la cual, describe a este elemento sólido de la turbina, mediante un dominio de coordenadas cartesianas, en un espacio de dimensión tres.

En cuanto, a la nomenclatura correspondiente a el espacio superficial, siendo de dimensión dos; éste espacio, un plano estandar que describe, en general a todas las condiciones geométricas superficiales, siendo denominado mediante la simbología  $\varphi(X,Y)$ . Más adelante, conoceremos a otro plano, cuyas características son similares al plano  $\varphi(X,Y)$ , dicho plano corresponde al dominio coordenado cartesiano estandar  $(x,y)$ , siendo representado por medio de la simbología  $\varphi(x,y)$ . La característica principal matemática, correspondiente a este plano denominado  $\varphi(x,y)$  que describe al dominio coordenado cartesiano estandar  $(x,y)$ , se encuentra directamente relacionado con la referenciación e interacción con otras dominios coordenados cartesianos referenciales  $(u,v)$  y  $(\alpha,\beta)$ , dichos planos, se describen mediante la nomenclatura equivalente  $\varphi(u,v)$  y  $\varphi(\alpha,\beta)$ . Cuya característica de estos planos referenciales denominados:  $\varphi(u,v)$  y  $\varphi(\alpha,\beta)$ , con respecto al plano estandar denominado  $\varphi(x,y)$ , estos procesos corresponden a la rotación y traslación de ejes coordenados cuyos ángulos quedan establecidos de manera experimental.

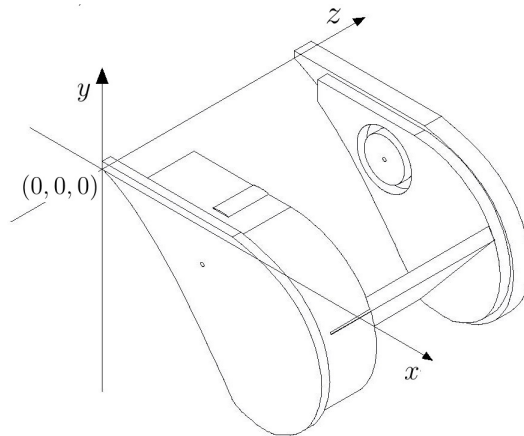


Figura 2.6: Representación espacial tridimensional cartesiana del álabe direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki.

La segunda figura que se muestra anteriormente (figura .2.), corresponde a la descripción gráfica del elemento sólido, equivalente al álabe direccional, expresado espacialmente en un plano. Mediante una técnica que describe de manera geométrica, esta técnica es denominada plano abatido. Gracias a esta técnica correspondiente a la geometría descriptiva, es posible representar todo cuerpo sólido, considerando una referencia, la cual, en este caso, se tiene un perfil superficial simétrico, unido por una placa rectangular, cuya función es unir ambas piezas representadas mediante los perfiles característicos.

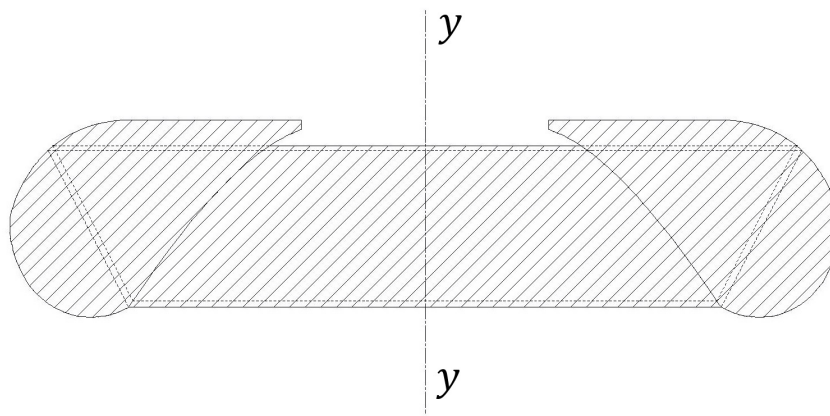


Figura 2.7: Representación espacial del álabe direccional de la turbina de media potencia, mediante un plano abatido.

Teniendo presente que: la naturaleza presente en la geometría de este elemento sólido; también, como se puede observar en la figura 2 vista anteriormente; para este elemento, utilizando geometría descriptiva elemental, puede ser visto como un elemento simétrico. Por lo tanto, bajo esta condición, se puede establecer como base para este estudio; tanto, geométrico como algebraico, centrar primeramente estas bases matemáticas en cualquiera de los perfiles superficiales laterales del álabe direccional de la turbina de media potencia. Por norma y conveniencia para este estudio, la cual, se divide en dos líneas paralelas, las cuales, corresponden a: La Simulación superficial de Parámetros y Valores Geométricos para el perfil superficial del álabe direccional.

El propósito de esta simulación, se enfoca en: determinar con precisión modelos matemáticos para el contorno superficial para el perfil del álabe. Estos modelos matemáticos, nos guiarán a una aplicación

relacionada a la teoría de fabricación de partes y piezas sólidas, a través de algoritmos y comandos computacionales para los Sistemas de Control Numérico (C.N.C).

2

En cambio, la otra línea a tratar dentro de este estudio, correspondiente a la Simulación Volumétrica de Parámetros y Valores Geométricos para el sólido del álabe direccional, visto como un cuerpo geométrico. Teniendo como una condición inicial única, sobre la ruta para desarrollar este análisis, un análisis de área superficial para el perfil de este cuerpo geométrico correspondiente al álabe direccional.

Luego, como se mencionó anteriormente que el álabe direccional de la turbina de media potencia, se encuentra compuesto por dos láminas de grosor uniforme ambas y de perfil idéntico, unidas ambas por una placa rectangular, en sentido normal al perfil interior de ambas láminas, con una pendiente relacionada con un ángulo desconocido formado por una horizontal estandar. De esta manera, al mirar la figura 1; que representa al álabe direccional, esta línea horizontal estandar, que determina dicha pendiente a través de un ángulo desconocido generado por esta línea, observamos que ésta se encuentra en sentido paralelo al eje cartesiano  $x$ , que pertenece al dominio coordenado cartesiano rectangular  $(x, y, z) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Lo cual, este dominio coordenado cartesiano, representa de forma espacial al álabe direccional en su conjunto.

El propósito correspondiente a la determinación de Valores sobre una Simulación Volumétrica de Parámetros Geométrica para el álabe direccional, visto a este elemento como un sólido. Se centra en: la determinación del punto equivalente en el espacio cuya dimensión es tres; por lo tanto, dicho punto es equivalente al centro de inercia en éste elemento.

Por medio de este valor, cuya expresión puede ser de manera analítica, o de forma numérica. Dónde, este valor, es la resultante del producto de un análisis previo que comienza primeramente por la determinación del área superficial del perfil de este álabe.

Luego, para determinar el valor correspondiente al volumen del elemento, considerando que, dicho valor, debe expresarse de manera analítica. Posteriormente, una vez obtenido el valor total del área superficial del perfil del álabe direccional, es necesario realizar el producto por un factor escalar equivalente a dies. Este factor de ponderación, que se menciona corresponde al largo de la obstrucción del

---

<sup>2</sup>Los sistemas a la industria y fabricación de partes y piezas para elementos sólidos, que comunmente son utilizados en la producción, a través de, siendo estos, los sistemas de control numérico computacional C.N.C. (Computational Numerical Control. Estos sistemas son aplicados a dos tipos de proceso de mecanizado; tanto simple como complejo, los cuales son:  $\mathcal{C.A.V.}$ , que corresponden a procesos con arranque de viruta, y  $\mathcal{S.A.V.}$  procesos sin arranque de viruta.

área del perfil superficial del álabe, cuyo largo corresponde a 5 (*mm*), y esta magnitud multiplicada por dos, ya que, son dos elementos similares. Además, como se ha mencionado, existe una placa que une a estos dos elementos sólidos similares, lo cual, se puede de este modo formular un modelo elemental que permite determinar esta magnitud físico geométrica:

$$\mathcal{V}_{AD} = 10 \cdot \mathcal{A}_T + \mathcal{V}_{PT} \quad (2.2)$$

tanto para la simulación de este análisis superficial, y la determinación de valores volumétricos, cuya descripción, teniendo presente sobre este elemento que, la geometría modo algebraico y geométrico del perfil izquierdo del álabe direccional de la turbina de media potencia.

La representación cartesiana del contorno superficial del perfil del álabe direccional, visto de modo estandarizado, a través de un plano universal estandar, el cual, podemos denominar, para este caso  $\wp(x, y)$ . También, podemos observar en esta figura, en dónde se muestra la estandarización correspondiente a la superficie del perfil del álabe direccional, en su cornorno, distintos puntos, los cuales, dichos puntos son denominados vértices.

Los vértices, bajo el concepto experimental sobre el perfil superficial del álabe direccional.

De manera experimental, podemos mencionar que, por la geometría correspondiente al perfil superficial del álabe direccional, se establecieron dentro del contorno respectivo

## 2.3. Relaciones Matriciales Entre los Sistemas Coordenados Cartesianos.

Los sistemas o dominios scoordenados cartesianos, que intentan simular el contorno superficial del álabe direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki. Como lo muestra la imagen 2.13; entre estos dominio coordenados cartesianos existen rotación (entre los dominios de los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ ); también existe traslación y rotación ( entre los dominios coordenados cartesianos de los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(\alpha, \beta)$ ).

Cabe señalar que, al referenciar al dominio coordenado cartesiano referencial  $\wp(\alpha, \beta)$ ; primero, se

<i>Realación de Rotación entre los dominios Coordenados entre los Dominios Coordenados Cartesianos</i>	<i>Valores angulares de rotación</i>
$\wp(u, v)$ y $\wp(x, y)$	$\mu = \frac{59}{36} \cdot \pi$
$\wp(\alpha, \beta)$ y $\wp(x^*, y^*)$	$\lambda = \frac{5}{6} \cdot \pi$

Tabla 2.1: *Referenciación angular para la rotación de los dominios coordenados cartesianos existentes en la simulación del perfil superficial del álabe direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki.*

debe rotar según ángulo se indica, con respecto a un dominio coordenado cartesiano auxiliar, que se denomina mediante  $\wp(x^*, y^*)$ ; siendo este dominio coordenado cartesiano, referenciado experimentalmente mediante traslación del dominio coordenado cartesiano estandar del plano  $\wp(x, y)$ .

A continuación, en las tablas 2.1; y 2.2; se dan a conocer las condiciones de rotación y rotación y traslación de los dominios coordenados cartesianos referenciales  $\wp(u, v)$  y  $\wp(\alpha, \beta)$ , con respecto al dominio coordenado cartesiano estandar  $\wp(x, y)$ .

De esta forma, conociendo los valores de los ángulos de rotación entre los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ ; y los planos  $\wp(\alpha, \beta)$  y  $\wp(x^*, y^*)$ , se pueden establecer las ecuaciones de rotación de manera genérica y algebraica para la rotación de ejes coordenados:

<i>Traslación de ejes coordenados con respecto al dominio coordenado cartesiano estandar <math>\wp(x, y)</math>.</i>	<i>Valor del vector de traslación.</i>
$\wp(x, y)$ y $\wp(x^*, y^*)$	$\begin{bmatrix} \vec{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \\ -54 \end{bmatrix}^T$

Tabla 2.2: Referenciación para la traslación de ejes coordenados para los dominios coordenados cartesianos estandar  $\wp(x, y)$  y auxiliar  $\wp(x^*, y^*)$ .

<i>Representación de la Ecuación</i>	<i>Ecuación de Rotación</i>
<i>Ecuación genérica:</i>	$[X] = [\mathcal{M}_\mu] \cdot [U] \quad (2.3)$
<i>Ecuación algebraica:</i>	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4)$

Tabla 2.3: Ecuación de rotación entre los planos estandar  $\wp(x, y)$  y referencial  $\wp(u, v)$ .

<i>Representación de la Ecuación</i>	<i>Ecuación de Rotación</i>
<i>Ecuación genérica:</i>	$[X^*] = [\mathcal{M}_\lambda] \cdot [\Lambda] \quad (2.5)$
<i>Ecuación algebraica:</i>	$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.6)$

Tabla 2.4: Ecuación de rotación entre los planos auxiliar  $\wp(x^*, y^*)$  y referencial  $\wp(\alpha, \beta)$ .



<i>Representación de la Ecuación.</i>	<i>Ecuación de Traslación.</i>
<i>Ecuación Genérica:</i>	$[X] - [X^*] = [\vec{X}] \quad (2.7)$
<i>Ecuación algebraica:</i>	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ -54 \end{pmatrix} \quad (2.8)$

Tabla 2.5: *Ecuación de traslación de los planos para el dominio coordenado cartesiano estandar  $\wp(x, y)$ , y auxiliar  $\wp(x^*, y^*)$*

A continuación, se muestra mediante una tabla la relación de traslación, que existe entre el plano del dominio coordenado cartesiano estandar  $\wp(x, y)$  y el plano del dominio coordenado cartesian auxiliar  $\wp(x^*, y^*)$ . Mediante este último plano, el plano del dominio coordenados cartesiano referencial  $\wp(\alpha, \beta)$  se encuentra rotado.

## 2.4. Sistema Coordenado Cartesiano Estandar $(x, y)$ .

Debido a que, existe para cada punto de una recta orientada, se encuentra determinada por una línea horizontal estandar, denominada como abscisa. En esta recta horizontal estandar, representativa geoméricamente a los números reales, dónde, existe un punto neutro, lo cual, es equivalente al neutro aditivo para el cuerpo de los números reales  $(+, \mathbb{R})$ .

Sobre este punto, en esta recta horizontal estandar, existe una recta en dirección normal, la cual, es denominada mediante el concepto de ordenada.

Según lo mencionado, existe un producto que describe a dichas rectas en un punto, lo cual, visto de manera vista vectorial, este operador es denominado producto cruz o producto vectorial. Mediante este operador matemático, se puede describir un sistema coordenado cartesiano, o dominio coordenado cartesiano, lo cual, geoméricamente describe de manera espacial a un plano dentro de un espacio; Por ende, un plano euclideo, para casos generales denotaremos a un plano cuyas coordenadas son  $x$  e  $y$ , mediante  $\wp(x, y)$ . Como característica principal, un plano euclideo  $\wp(x, y)$ , siempre debe tener una magnitud dimensional equivalente a dos. Por lo tanto, podemos señalar que un dominio coordenado cartesiano, corresponde:

$$\wp(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall(x, y) \Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \vee \\ \mathbb{R}^2 : \{\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+\} \times \{\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+\} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Se debe considerar que, existen tres dominios coordenados establecidos para la descripción del contorno superficial del álabe direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell banki; dicho dominios coordenados establecidos para el análisis, que primeramente se enmarca la parte superficial; para luego, dar conformidad la realización de la determinación de elementos volumétricos componentes del este elemento.

Los dominios coordenados cartesianos, corresponden:

- ***Dominio Coordenado Cartesiano Estandar***  $\wp(x, y)$ .

■ *Dominio Coordinado Cartesiano Referencial*  $\wp(u, v)$ .

■ *Dominio Coordinado Cartesiano Referencial*  $\wp(\alpha, \beta)$ .

La representación gráfica del contorno superficial, para los distintos dominios coordenados cartesianos descritos anteriormente, se muestran en las siguientes figuras:

Los tramos que describe el contorno superficial del álabe direccional, de las figura 2.8, 2.9, 2.10. Como se describe en estas figuras, cada tramo se encuentra demarcado por por vértices, los cuales, se encuentran demarcados por medio de pares ordenados cartesianos de manera experimental, determinados mediante la experimentación medida. Esta experimentación medible, dejó determinado los pares ordenados cartesianos especialmente para el dominio coordenado cartesiano estandar, denominado como plano estandar  $\wp(x, y)$ .

Además, para dichos tramos geométricos, se determinaron tres dominios coordenados cartesianos rectangulares, en los cuales, se deja un dominio coordenado estandar, el cual, es denominado  $\wp(x, y)$ . También, existen dos dominios coordenados cartesianos referenciales, los cuales, son denominados mediante  $\wp(u, v)$  y  $\wp(\alpha, \beta)$ . Este último dominio coordenado cartesiano, se encuentre rotado en torno a un dominio coordenado cartesiano auxiliar  $\wp(x^*, y^*)$ , siendo este dominio coordenado cartesiano, encontrando se en traslación del dominio coordenados cartesianos estandar  $\wp(x, y)$ .

De este modo, se determinaron los valores de los vértices, sobre el dominio coordenado cartesiano experimental  $(x, y)$ , los cuales se encuentra descritos en la siguiente table, y además se muestran en la figura 2.11.

A continuación, se dará a conocer mediante una tabla, los vértices experimentales determinados para el contorno superficial sobre el dominio coordenado cartesiano estandar  $\wp(x, y)$ :

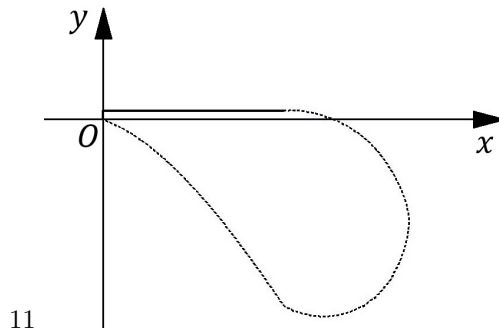


Figura 2.8: *Representación del Dominio Coordinado Cartesiano Referencial  $\wp(x, y)$ .*

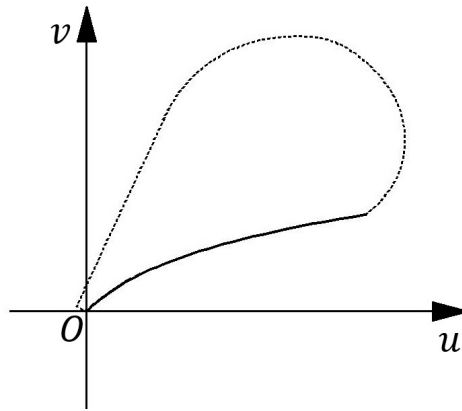


Figura 2.9: *Representación del Dominio Coordinado Cartesiano Referencial  $\wp(u, v)$ .*

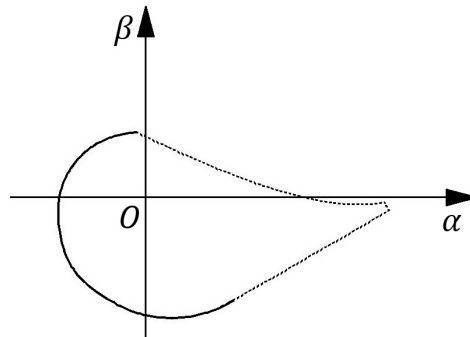


Figura 2.10: *Representación del Dominio Coordinado Cartesiano Referencial  $\wp(\alpha, \beta)$ .*

Figura 2.11: *Representación Cartesiana de los Tramos Superficiales del Perfil del Álabes direccional de la Turbina Banki.*

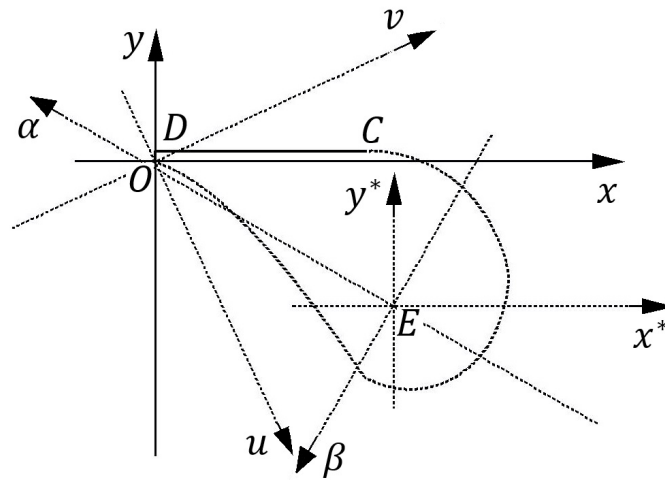


Figura 2.12: Representación Gráfica del Contorno Superficial del Perfil del Álabes Direccional; Dónde se incluyen los vértices Experimentales en Dominio Coordenado Cartesiano  $\varphi(x, y)$ .

Vértice Experimental	Par ordenado
$O$	$(0, 0)$
$E$	$(89, -54)$
$C$	$(78, 4)$
$D$	$(0, 4)$

Tabla 2.6: Vértices experimentales para el dominio coordenado cartesiano estandar  $\varphi(x, y)$ .

Las ecuaciones experimentales, correspondientes al dominio coordenado cartesiano estandar  $\wp(x, y)$ , que simulan los sermentos geométricos rectos del contorno superficial del perfil del álabe direccional; tras distintas mediciones milimétricas, estas correspondieron:

$$\forall \exists \wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} y = 4 & \forall x \in [0, 78] \\ x = 0 & \forall y \in [0, 4] \end{array} \right. \quad (2.10)$$

A continuación, se da a conocer la gráfica correspondiente a las ecuaciones de contorno superficial para el dominnio coordenado cartesiano del plano  $\wp(x, y)$ . Siendo estas ecuaciones correspondiente a los segmentos geométricos del contorno superficial  $\overline{CD}$  y  $\overline{DO}$ .

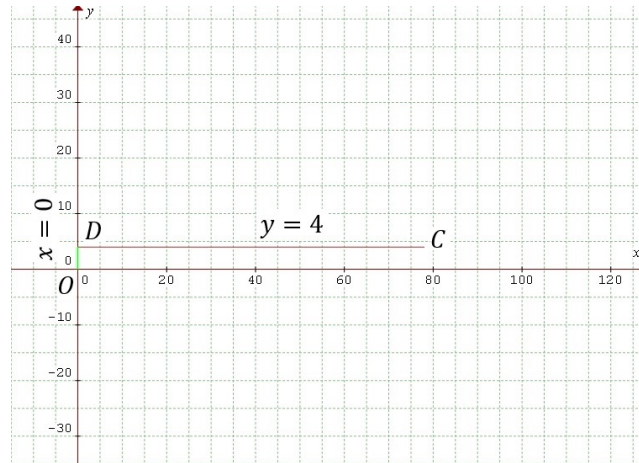


Figura 2.13: Simulación Gráfica del contorno superficial para el perfil del álabe de los segmentos  $\overline{CD}$  y  $\overline{DO}$

## 2.5. Sistema Coordenado Cartesiano $(u, v)$ .

El sistema o dominio coordenado cartesiano  $(u, v)$ , es un dominio coordenado experimental, en el cual, bajo su experimentación, se determinó que éste se encuentra bajo rotación de ejes coordenados,

cuyo ángulo corresponde a  $\mu = \frac{59}{36} \cdot \pi$ .

La idea de esta experimentación, consiste en tratar de cuadrar el contorno superficial del álabe direccional entre los vértices  $O$  y  $B$ . Cuya ecuación experimental, en el caso del arco geométrico del dominio coordenado cartesiano del plano  $\wp(u, v)$  corresponde:

$$v = \ln(u + 1) \quad (2.11)$$

En esta ecuación, el miembro derecho se encuentra gobernada por una función logarítmica, y cuyo argumento de dicha función logarítmica, corresponde a un desfase, el cual, genera del arco geométrico que describe a dicha ecuación cuadre e intersecte en el origen para el plano del dominio coordenado cartesiano estandar  $\wp(x, y)$ . Por lo tanto, ambos dominios coordenados cartesianos experimental  $\wp(x, y)$ , y referencial  $\wp(u, v)$ , tienen el mismo origen.

La gráfica de la ecuación natural experimental, que intenta simular el segmento  $\widehat{OB}$ , de la ecuación 1.5; corresponde:

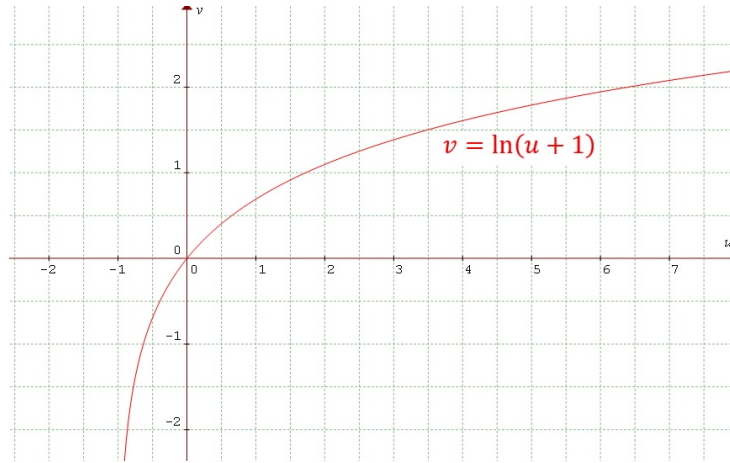


Figura 2.14: Ecuación experimental sobre el plano  $\wp(u, v)$ . De modo natural, intenta simular al contorno superficial del álabe direccional para el contorno entre los vértices  $O$  y  $B$ .

En la expresión de la ecuación 2.11; de manera natural, el contorno del perfil superficial del álabe

direccional para el segmento geométrico  $\widehat{OB}$ . Al introducir el factor de escala, siendo este factor, un factor experimental de medición, en el cual, según esta expresión logarítmica, resulta:

$$\left. \begin{aligned} v &= \ln(u + 1) \\ \left(\frac{v}{20}\right) &= \ln\left(\left(\frac{u}{20}\right) + 1\right) \\ v &= 20 \cdot \ln\left(\frac{u+20}{20}\right) \\ v &= 20 \cdot \ln(u + 20) - 20 \cdot \ln(20) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Abscisa ( $u$ )	Ordenada $v(u)$
10	8,1093
30	18,3258
50	25,0552
70	30,0815
90	34,09496
106	36,8109

Tabla 2.7: *Tabla de valores para los puntos del contorno del gemento geométrico  $\widehat{OB}$ , expresados de modo experimental.*

A continuación, se dan a conocer las gráficas resultantes en comparación de la ecuación inicial y la ecuación; donde, se aplica el factor de escala geométrica resultante:

Mediante, los puntos extremales del intervalo definido para la función en el segmento geométrico  $\widehat{OB}$ . Estos puntos, se encuentra evaluados en la función para el punto  $B$ , siendo el valor aproximado 36,8109; cuyo valor, equivalente evaluado en el punto extremal de la función  $v(106) = \ln\left[\left(\frac{63}{10}\right)^{20}\right]$



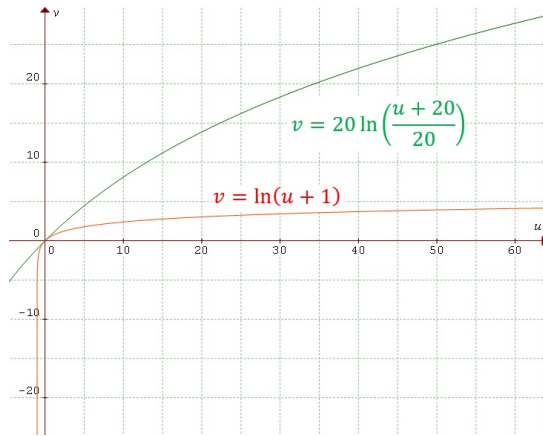


Figura 2.15: Gráficas de la ecuación de contorno para el segmento  $\widehat{OB}$ , sin y con factor de escala geométrica.

### Estandarización del de la Ecuación del Plano $\wp(u, v)$ Para el Dominio $(x, y)$ .

La ecuación del contorno geométrico  $\widehat{OB}$ , que se encuentra referenciada para el plano  $\wp(u, v)$ , se hace necesario, referenciar la ecuación de contorno para el segmento geométrico entre los puntos  $O$  y  $B$ , siendo esta expresada:

$$v = 20 \cdot \ln\left(\frac{u+20}{20}\right)$$

Al desacoplar la ecuación matricial que describe la rotación de ejes coordenados, de la expresión'



## Capítulo 3

# Continuidad Aplicada al Perfil Superficial

### 3.1. Descripción General:

### 3.2. Teoría sobre Continuidad.

El estudio sobre la continuidad existente para las ecuaciones de contorno para los tramos que describen el contorno superficial del perfil del álabe direccional, deben cumplir las condiciones de continuidad en el modelo de la proposición planteada. Por lo tanto, se menciona mediante una definición la continuidad en un punto.

#### 3.2.1. Definición: (Continuidad en un Punto)

Sea una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que esta función es continua en un punto  $t \in A$ , para cada valor de  $\epsilon > 0$ , se puede determinar un valor equivalente para  $\delta > 0$ , tal que,  $\forall w \in \mathbb{R}$ , con la condición  $|w - t| < \delta$ , podemos verificar:

$$|f(w) - f(t)| < \epsilon \quad (3.1)$$

Esta definición, puede expresar la continuidad en un punto, abusando un poco del formalismo lógico a través de la expresión:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \left. \begin{array}{c} |w - t| < \delta \\ w \in A \end{array} \right\} \Rightarrow |f(w) - f(t)| < \epsilon \quad (3.2)$$

En esta definición del conjunto  $A$ , consideraremos de modo protagonico, ya que, considerando para la función  $f$ , cuyos valores pertenecen a dicho conjunto  $A$ .

Podemos ilustrar esto, mediante un ejemplo:

Sea una función real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la función de Dirichlet, dada por una constante unitaria  $f(w) = 1$ , si  $w \in \mathbb{Q}$ ; en el caso de  $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . En los puntos racionales toma valores distintos que en los puntos irracionales para la función  $f$ . Según esta definición, la función  $f$ , no cumple la condición de continuidad. La razón radica en que, todo intervalo abierto siempre existe un conjunto racional  $\mathbb{Q}$  y otro subconjunto irracional  $\mathbb{I}$ . En consecuencia, la función  $f$  es oscilante a los valores equivalente al valor absoluto de 1.

Se hace necesario, para la aplicación del criterio de continuidad en un punto, la función  $f$ , debe estar definida para dicho punto, como condición primordial.

Según esta definición de continuidad, la imagen en un punto, perteneciente al conjunto donde se encuentra definida la función  $f$ , cuyo valor se expresa de forma  $f(w)$ ; al no conocer el valor equivalente, no podemos comprobar la condición de continuidad. Por ende, no tiene sentido hablar de continuidad en un punto, si este no existe.

### 3.2.2. Definición: (Continuidad en un Conjunto)

SE dice que una función  $f$ , es continua en un conjunto  $C$ , tal que,  $C \in A$ . Si la función  $f$  es continua en todo punto del conjunto  $C$ .

Según esta definición, se dificulta probar la continuidad de la función  $f$ , en el conjunto  $A$ . Regularmente, se utiliza la descomposición de funciones, en funciones mas elementales; lo cual, se evidencia a través de estas últimas funciones la continuidad de estas. En consecuencia, se prueba la continuidad.

### 3.2.3. Teorema: (Condición Básica de Continuidad)

Sean dos funciones continuas, denominadas  $f$  y  $g$ , definidas en el conjunto  $A$ . Verificaremos que cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de las funciones  $f + g$ , y el producto de estas  $f \cdot g$ , son continuas en todo punto correspondiente al conjunto  $A$ .
- Si la función  $g(w) \neq 0$ , para todo  $w \in A$ , y la función  $\frac{1}{g}$ , continua en todo punto del conjunto  $A$ , teniendo en cuenta que  $g$  es una función continua. En consecuencia, la función generada por el cociente de dos funciones continuas, donde el denominador es no nulo, la función generada es continua.

La demostración del primer inciso de este teorema, corresponde:

- Sea el punto  $t \in A$ , donde existen las funciones  $f$  y  $g$  continuas en  $A$ ; se debe demostrar que, la suma y el producto de las funciones  $f$  y  $g$ , deben ser continuas en dicho punto  $t$ .

Para esto, plantearemos una hipótesis:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \epsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow \\ |f(w) - f(t)| < \epsilon_1 \end{array} : \begin{array}{l} w \in A \wedge |w - t| < \delta_1 \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \\ |g(w) - g(t)| < \epsilon_2 \end{array} : \begin{array}{l} w \in A \wedge |w - t| < \delta_2 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

De manera natural, se tiene que  $\delta_1(\epsilon_1)$  y  $\delta_2(\epsilon_2)$ , valores dependientes de  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . Relacionando estos valores, podemos expresar:

$$\left. \begin{aligned} |(f+g)(w) &- (f+g)(t)| \\ |(f \cdot g)(w) &- (f \cdot g)(t)| \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

En conjunto con la expresión:

$$|f(w) - f(t)| \wedge |g(w) - g(t)| \quad (3.6)$$

Según esto, tenemos:

$$\begin{aligned} |(f+g)(w) &- (f+g)(t)| \\ &= \\ |(f(w) + f(t)) &- (g(w) - g(t))| \\ &= \\ |f(w) - f(t)| &+ |g(w) - g(t)| \end{aligned}$$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} |(f+g)(w) &- (f+g)(t)| \\ &\leq \\ |f(w) - f(t)| &+ |g(w) - g(t)| \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

En consecuencia, el valor  $\epsilon > 0$ , podemos plantear dos relaciones de equivalencia, las cuales corresponden:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\epsilon}{2} \\ &\wedge \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mediante las relaciones expresadas, se indica:

$$\left. \begin{aligned} |f(w) - f(t)| &< \epsilon_1 \\ &\wedge \\ |g(w) - g(t)| &< \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

Ambos misembres de las desigualdades de la expresión anterior, son parte componente de la desigualdad (2.7). Por lo tanto, reemplazando los valores correspondiente a esta desigualdad (2.7), se cumple:

$$\left. \begin{aligned} |(f+g)(w) - (f+g)(t)| & \\ & \leq \\ |f(w) - f(t)| &= |g(w) - g(t)| \\ &= \\ |(f+g)(w) - (f+g)(t)| & \\ & \leq \\ \frac{\epsilon}{2} &+ \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \right\}$$

Por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} |(f+g)(w) - (f+g)(t)| &\leq \epsilon \\ \forall \quad t \in A \quad \wedge \quad |w - t| \leq \delta \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Para la condición correspondiente al producto de las funciones continuas en  $A$  en este producto de las funciones  $f \cdot g$ , se tiene:

$$|(f \cdot g)(w) - (f \cdot g)(t)| \quad (3.11)$$

En consecuencia:



$$\left. \begin{aligned}
& |[f(w) \cdot g(t)] - [f(t) \cdot g(t)]| \\
& \left| \begin{aligned}
& f(w) \cdot g(w) \quad - \quad f(t) \cdot g(t) \\
& \qquad \qquad \qquad + \\
& f(w) \cdot g(t) \quad - \quad f(w) \cdot g(t) \\
& \qquad \qquad \qquad =
\end{aligned} \right| \\
& \left| \begin{aligned}
& f(w) \quad = \quad g(w) \quad - \quad f(w) \cdot g(t) \\
& \qquad \qquad \qquad + \\
& f(w) \quad = \quad \cdot g(t) \quad - \quad f(t) \cdot g(t) \\
& \qquad \qquad \qquad =
\end{aligned} \right| \\
& \left| \begin{aligned}
& f(w) \quad = \quad [g(w) \quad - \quad g(t)] \\
& \qquad \qquad \qquad + \\
& g(t) \quad = \quad [f(w) \quad - \quad f(t)]
\end{aligned} \right| \\
& |f(w)| \quad = \quad |g(w) \quad - \quad g(t)| \\
& \qquad \qquad \qquad + \\
& |g(t)| \quad = \quad |f(w) \quad - \quad f(t)|
\end{aligned} \right\}$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{c} |(f \cdot g)(w) - (f \cdot g)(t)| \\ \\ \leq \\ \\ |f(w)||g(w) - g(t)| \\ \\ + \\ \\ |g(w)||f(w) - f(t)| \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

Como condición única, se establece que  $\epsilon > 0$ , como lo expresa (2.3) . Entonces, se hace necesario una relación de equivalencia:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2(|g(t)|+1)} \quad \forall g(t) \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Además, se tiene la expresión  $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1)$ . Esto implica:

$$\left. \begin{array}{c} w \in A \wedge |w - t| < \delta_1 \\ \\ |g(t)||f(w) - f(t)| \\ \\ < \\ \\ |g(t)| \left[ \frac{\epsilon}{2[|g(t)|+1]} \right] < \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Por otro lado, tenemos:

$$w \in A \wedge |w - t| < \delta_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(w)| &= |f(t) + F8w - f(t)| \\ &= |f(t)| |f(w) - f(t)| \\ &= |f(t)| + \epsilon_1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Supongamos que:

$$\mathcal{M} = |f(t)| + \epsilon_1 \tag{3.16}$$

Considerando que, las siguientes relaciones de equivalencia para  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \Leftrightarrow \epsilon_2 = \delta_2(\epsilon_2) \\ \Rightarrow \delta_2 &= \delta_2 \left[ \frac{\epsilon}{2\mathcal{M}} \right] \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \epsilon = \frac{\epsilon \delta_2}{2\mathcal{M}}$$

Definiendo la variable  $\delta$ :

$$\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \} \tag{3.18}$$

Nuevamente, consideraremos las igualdades (2,16) y (2,17), deduciendo:

$$w \in A \wedge |w - t| > \delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(w)||g(w) - g(t)| < [\mathcal{M}(\frac{\epsilon}{2\mathcal{M}}) = \frac{\epsilon}{2}] \\ |g(t)||f(w) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

Finalmente:

$$\left. \begin{array}{l} |f(w)||g(w) - g(t)| \\ |g(t)||f(w) - f(t)| \end{array} \right\} < \epsilon$$

Por lo tanto, según esto:

$$|(f \cdot g)(w) - (f \cdot g)(t)| < \epsilon \quad (3.19)$$

### 3.2.4. Corolario:

- Si la suma de dos funciones  $f + g$  son continuas, y una de estas funciones es continua, en consecuencia, la otra también.
- Si una función  $f$  es continua, y la otra función  $g$ , es discontinua la suma de dichas funciones es discontinua.
- Si el producto de dos funciones  $f$  y  $g$  son continua, una de las funciones  $f$ ; la otra función  $g$ , también lo será. En el caso de que, alguna de estas funciones sea discontinua, la suma indistintamente de las funciones  $f$  y  $g$ , serán discontinuas.

Sin mayor demostración, podemos señalar utilizando la función de Dirichlet para la función  $f$ , teniendo conocimiento que esta función es discontinua en todo punto, y la función  $g$  es continua en todo

punto de su dominio. Ejemplo de esto, utilizaremos la función identidad para la función  $g : g(w) = w$ , tal que  $w \in \mathbb{R}$ .

Utilizando el cuerpo de la suma, para definir  $g + f$  y  $g - f$ , ambas funciones generadas son discontinuas en todo punto del dominio. Ambas funciones resultantes bajo la aplicación de este cuerpo, generaría en la suma resultante por la equivalente a  $2 \cdot g$ ; en cambio, la función generada por la diferencia equivale a cero. Esto según, la definición de la función de Dirichlet.

En el caso, para el cuadrado de la función  $f$ , tenemos una función, denominada  $h : [f(w)]^2 = 1$ , esto nos lleva a concluir que la función es continua.

Considerando a las funciones polinómicas, correspondiente al producto de las funciones constantes por potencias de la función identidad. Según este concepto, se definirá el siguiente corolario:

### 3.2.5. Corolario:

Toda función racional es continua en su dominio naturalmente definido.

Considerando que todas las funciones elementales que se conocen son continuas en sus dominios por su definición. Utilizando, como un hecho tautológico de manera temporal.

Además, de la aplicación del cuerpo de la suma para las funciones como la composición de estas, ante último se tiene un teorema que demuestra el comportamiento de la composición de funciones.

### 3.2.6. Teorema: (Continuidad de una función compuesta)

Sean las funciones definidas  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que,  $f(A) \subset B$ . Supongamos que la función  $f$  es continua en un punto  $w \in A$ , y también es continua en un punto  $f(t)$ . Entonces, entonces la composición de las funciones  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en un punto  $t$ . En el caso particular, si la función  $g$  es continua en el punto  $f(A)$ , se concluye en que la función compuesta en todos los puntos de  $A$ , en que la función  $f$  es continua. Particularmente, la composición de funciones regular como una función continua.

### 3.2.7. Demostración:

Sea  $\epsilon > 0$ , para demostrar la continuidad de la función compuesta por la función  $f$  en  $t$ , diremos que existe un  $\rho > 0$ , tal que, para todo  $y \in B$ , con la condición:

$$|y - f(t)| < \rho \quad (3.20)$$

Consecuentemente a esto, se dice:

$$|g(y) - g(f(t))| < \epsilon \quad (3.21)$$

Según lo dicho anteriormente, la función en el punto  $t$   $f(t)$  es continua, existe un  $\delta > 0$ , para todo  $w \in A$  con la condición:

$$|w - t| < \delta \quad (3.22)$$

Tenemos que:

$$|f(w) - f(t)| < \rho$$

Deduciendo, de esta manera:

$$\begin{aligned} |g(f(w)) - g(f(t))| &< \epsilon \\ \forall w \in A : |w - t| &< \delta \end{aligned} \quad (3.23)$$

De esta forma, se demuestra dicha continuidad

### 3.3. Propiedades de Localidad:

La función, tiene continuidad de manera intuitiva, dependiendo del comportamiento de esta por la proximidad en un punto dado. Diciendo que, la expresión para la continuidad debe ser una propiedad local.

#### 3.3.1. Definición:

Dada una función definido  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , y un conjunto no vacío  $C \subset A$ , definido mediante una nueva función  $k$ , denominada  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos representar esta función mediante  $|k|_c$ , correspondiente a una función que está definida en el conjunto  $C$ . Dicha función, viene dada mediante  $|k|_c(w) = k(w)$ , para todo  $w \in C$ .

Sea una función definida una función definida  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que existe una función  $g$  definida  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo esta una extensión de la función  $f$ . Si  $B \supset A$ , corresponde que la función  $f$  sería la restricción de la función  $g$  al conjunto  $A$ ; esto quiere decir,  $f(w) = g(w)$ , para todo  $w \in A$ .

Considerando que los conceptos de extensión y restricción de una función, en esencia son equivalentes dependiendo de como se observe.

La importancia de distinguir entre una función y una restricción de esta para un conjunto dado, es de gran relevancia aconsiderar.

#### 3.3.2. Proposición:

- Cualquier restricción para una función continua, esta resulta ser una función continua.
- Cualquier extensión para una función continua en un intervalo abierto, resulta ser una función continua para dicho intervalo.

Un ejemplo de continuidad, para el segundo caso corresponde a la función de Heaviside, o también llamada función parte entera. Poniendo de manifiesto que, una extensión de una función continua en un intervalo semiabierto, no tiene continuidad.

Según las afirmaciones anteriores, consideraremos el siguiente teorema:

### 3.3.3. Teorema: (Teorema de la Localización)

Una función, que denominaremos  $f$ , es continua en intervalo  $I$ , si y solo si, la restricción de  $f$  ( $f|_I$ ) es continua en todo punto, perteneciente a dicho intervalo  $I$ .

Con el propósito de estudiar la continuidad de la función de Heaviside, que también es denominada función parte entera; tal que, dicha función es constante para los intervalos, cuya forma tiene:

$$I : ]n, n + 1[ \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.24)$$

Según esto, dicha función es continua en los intervalos mencionados, quedando por estudiar en los enteros  $\mathbb{N}$ .

La continuidad de esta función en un punto fijo, nos permite obtener información de tal comportamiento de la función en los puntos cercanos a este.

### 3.3.4. Teorema: (Conservación local del signo)

Sea una función  $f$ , definida  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua en un punto  $t \in A$ , con la condición de que  $f(t) \neq 0$ , existiendo un número  $n > 0$ ; tal que, para todo  $w \in A$ , cuya condición corresponde:

$$|w - t| < r \quad (3.25)$$

Se cumple, que el producto de las funciones  $f(w) \cdot f(t) > 0$ ; lo cual, la función  $f(w) > 0$ , si  $f(t) > 0$ ; por otra parte,  $f(t) < 0$  la función  $f(w) < 0$ , si la función  $f(t) < 0$ , para todo  $w \in ]t - r, t + r[ \cap A$ .



### 3.3.5. Demostración:

Supongamos que el punto  $f(t) > 0$ , pudiendo asumir un valor para  $\epsilon = f(t)/2$ .

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ :$$

$$\left. \begin{array}{l} |w - t| < r \\ \wedge \\ w \in A \end{array} \right\} \Rightarrow |f(w) - f(t)| < \epsilon \quad (3.26)$$

Para poder obtener en virtud de la continuidad para la función  $f$  en el punto  $t$ , consideraremos el valor  $r > 0$ , tal que, para todo  $w \in A$ , y que cumple con la condición:

$$|w - t| < r$$

Lo cual, cumple la condición:

$$|f(w) - f(t)| < \frac{f(t)}{2}$$

Esto implica:

$$\frac{f(t)}{2} < f(w) - f(t) < \frac{f(t)}{2} \quad | + f(t)$$

$$\frac{f(t)}{2} < f(w) > \left(\frac{3}{2}\right) f(t)$$

Según la función, los valores corresponderían:

$$f(w) > \frac{f(t)}{2} > 0 \quad (3.27)$$

En el caso que, el valor de la función, evaluada en  $t$  sea negativa  $f(t) < 0$ , se reduce a lo anterior, reemplazando la función  $f$  por  $(-1)f$ .

### 3.3.6. Proposición: (Acotación Local)

Sea  $f$ , una función definida mediante  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua en un punto fijo  $t \in A$ . Por ende, existen valores  $\mathcal{M}_t > 0$  y  $r_t > 0$ ; tales que, para todo  $w \in A$

$$|w - t| < r_t \quad (3.28)$$

Lo que verifica:

$$|f(w)| \leq \mathcal{M}_t \quad (3.29)$$

### 3.3.7. Demostración:

Considerando, un valor para  $\epsilon = 1$ , según el criterio de continuidad, en virtud de obtenerla a partir de la función  $f$ , en el punto  $t$ , existiendo un valor  $r_t > 0$ , tal que, para todo  $w \in A$ , que cumpla la condición:

$$|w - t| < r_t$$

Lo que verifica:

$$|f(w) - f(t)| < 1$$

Suponiendo que:

$$\mathcal{M}_t = 1 + |f(t)|$$

$$\forall w \in ]t - r_t, t + r_t[ \cap A$$

De esta manera, obtenemos:

$$\begin{aligned} |f(w)| &= |f(w) + f(t) - f(t)| \\ &= |f(t) + (f(w) - f(t))| \\ &= |f(t)| + \underbrace{|f(w) - f(t)|} \\ &= < \\ &= |f(t)| + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$|f(w)| = \mathcal{M}_t \tag{3.30}$$



## Capítulo 4

# Longitud Infinitesimal Para la Curvatura del Arco.

### 4.1. Descripción General.

En este capítulo, se da a conocer la metodología para poder determinar la longitud de curvatura de una cuerda en un plano estandar, el cual, la nomenclatura para describir dicho plano de forma estandar, corresponde  $\wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Partiendo por la descripción analítica para la derivada de la longitud de curvatura, en la cual, existe una variación infinitesimal de puntos dentro de un intervalo continuo, de manera geométrica corresponde a la gráfica de una función  $f$ , la cual, la geometría correspondiente a esta función describe un arco para una cuerda.

Dentro de este concepto, podemos decir que, el arco de la cuerda sobre el plano  $\wp(x, y)$ , corresponde a un lugar geométrico; en otras palabras, su descripción corresponde a un conjunto de puntos *no-colineales*. Por lo tanto, la variación de puntos generada en el arco de la cuerda del plano estandar  $\wp(x, y)$ , numéricamente se ajusta a una primera derivada, mediante el Teorema de Lagrange.

También, mediante la expresión diferencial para la longitud de curvatura de un arco en un plano estandar  $\wp(x, y)$ , es posible determinar el índice de curvatura para dicho arco.

De modo paralelo, al análisis correspondiente a la diferenciabilidad que describe a una longitud de

curvatura para el arco de una cuerda en un plano estandar  $\wp(x, y)$ . Existe el caso, para determinar la longitud total del arco de la curvatura del arco de la cuerda en el plano cartesiano estandar  $\wp(x, y)$ . La manera de determinar el largo total de la cuerda, corresponde a través de todos los elemento constitutivos dentro del intervalo definido continuo del arco de la cuerda, denomianda  $\mathcal{S}^*$ .

Se debe considerar también, la existencia de manera paramétrica para la deteminación de la longitud de curvatura del arco de la cuerda  $\mathcal{S}^*$ , cuando existe asociado a dichas variables un parámetro denominado  $\mathfrak{P} \geq 0$ .

## 4.2. Derivada Para la Longitud de la Curvatura.

Al decir que, si al supener en una curva, descrita en sus extremos  $\widehat{\mathcal{EH}}$ . Además, la gráfica de la función de una variable sobre el plano descrito mediante un sistema de coordenadas cartesianas  $\wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; por lo tanto, dicha función  $y = f(x)$ , se encuentra definida para un intervalo abierto  $\mathcal{I}^* : (m, n)$ , el cual, se definiría la longitud de la curvatura sobre la gráfica generada por la función. Por otra parte, al tomar sobre la curva generada, un segmento de arco  $\widehat{\mathcal{EH}}$ ; Donde, cuyos puntos  $\mathcal{E} = \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_i, \dots, \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{G}_n = \mathcal{H}$  se encuentran unidos a los segmento de la recta de los puntos elejidos. En consecuencia, podemos obtener una linea poligonal descrita mediante:  $\overline{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_i, \dots, \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{G}_n}$ , encontrandose esta, inscrita dentro del arco en el plano generado por la función:  $\widehat{\mathcal{EH}}$ . En consecuencia, designaremos mediante  $\mathfrak{A}_n$ , la serie de puntos que describe a dicha esta linea poligonal.

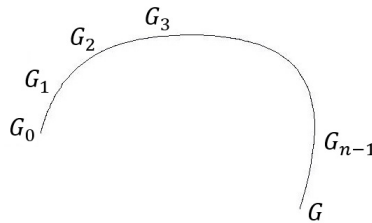


Figura 4.1: Polígono curvo compuesto por puntos que se describen mediante una colección de puntos finitos  $\{\mathcal{G}_i\}_{i=0}^n$

En este caso, se debe considerar el valor del límite, en una partición finita de puntos dentro de la longitud del arco de la cuerda  $\mathcal{L}$ . Según esto, podemos describir la gráfica que genera la función  $y = f(x)$ . Por lo tanto, el límite de la función  $\mathcal{L}$ , es equivalente a un valor finito. Por lo tanto, en consecuencia, dicho límite debe ser convergente. Además, existe una partición denominada  $\mathbf{n}$ , cuya cantidad de elementos tienden al infinito. Por lo tanto, es posible describir a la longitud de curvatura poligonal del arco  $\mathcal{L}$ , representada por la cuerda, mediante la norma lineal para la partición de elementos existente dentro del intervalo que define al arco de la cuerda  $\mathbf{n}$ . Además, esta norma, se representa por medio de la diferencia entre los valores para los puntos finitos de cada segmento de la partición que define al intervalo del arco de la cuerda sobre la superficie.

También, es necesario señalar que, siempre que la norma de la partición de elemento contituyentes del intervalo que define al arco de la cuerda para la superficie, son valores que deben tiender a cero. Por otro lado, al denominar la longitud del segmento mayor, para el intevalo de puntos de la cuerda  $\mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_i$ ; De esta manera, se denomina a la longitud de curvatura del arco de la cuerda en la superficie del plano  $\mathcal{EH}$ . La condición necesaria, debe ser que exista un valor convergente, y en cuya convergencia debe existir un límite  $\mathfrak{L}$ . Además, este límite no solamente debe depender de la elección de la cantidad de puntos que se encuentran dentro del intervalo donde se definen el arco de la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , que son descritos mediante vértices en la linea poligonal dentro de la superficie del plano  $\overline{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_i, \dots, \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{G}_n}$ . Por otro lado, al observar que, según la definición de la longitud de curvatura del arco para la cuerda  $\mathcal{L}$  superficial dentro del plano; ésta debe ser arbitraria y análoga a la de la longitud de curvatura del arco de la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , lo cual, describe para la circunferencia, cuyo radio se expresa como  $R$ ; Dónde:  $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Por lo tanto, se puede denominar al perimetro de la circunferencia, mediante este principio.

Al estudiar el problema, que se encuentra en relación al arco de curvarura para un segmento de cuerda en el plano,  $\wp(x, y)$ , siendo descrito mediante coordenadas cartesianas, lo cual, según esto, podemos señalar lo siguiente:

- Sea una función  $f$ , definida:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , lo cual, que se encuentra descrita por medio de la ecuación  $y = f(x)$ ; lo cual, dicha función genera una curva en el plano descrito en coordenadas cartesianas, cuya denominación la definiremos por medio de:  $\wp(x, y)$ . Además, dentro de la curva, existen puntos en los extremos de esta, cuya referencia corresponde al al sistema de coordenadas cartesianas; por ende, el punto extremo izquierdo, denominado  $\mathcal{G}_0(x_0, y_0)$ , es un punto fijo dentro de esta curva. Además, existe un punto variable que recorre el arco de la curva en el plano  $\wp(x, y)$ , denominadose  $\mathcal{M}(x, y)$ . Al designar mediante  $\mathcal{L}$ , la longitud de curvatura sobre el arco que se

describe en el plano  $\wp(x, y)$ , dicho arco, que se describen para los puntos extremos de la cuerda tal:  $\widehat{\mathcal{G}_0\mathcal{G}_n}$ .

- Existe un incremento sobre la abscisa  $x$ , que es definida a través de la variación para los valores de esta variable, lo cual, podemos denominar por medio de  $\Delta x$ . En consecuencia, el arco de la cuerda que se describe en el plano  $\wp(x, y)$ ; denominandose *longitud de curvatura del arco*  $\mathcal{S}$ , equivale a un valor es variable. Esto se debe a, la variación del incremento en la variable independiente denominada  $\Delta x$ .

Supongamos que, en la variación equivalente del arco de la curvatura sobre la cuerda que se describe sobre el plano  $\wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; Según esto, se generaría una variación sobre la variable equivalente para la longitud del arco de la cuerda en el plano  $\Delta\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{G}\mathcal{G}_\infty}$ . Además, el segmento  $\overline{\mathcal{G}\mathcal{G}_\infty}$ , cuyo valor correspondiente para este arco  $\overline{\mathcal{G}\mathcal{G}_\infty}$  equivalente a la cuerda de dicho arco. Por lo tanto, podemos decir que para determinar la razón de cambio generada sobre el arco y su longitud lineal equivalente. Entonces:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta\mathcal{S}}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathcal{S}(x+\Delta x) - \mathcal{S}(x)}{\Delta x} \right] \quad (4.1)$$

Esta razón de cambio, descrita anteriormente, es posible establecer a través de una forma geométrica, en la cual, se puede observar mediante dicha figura, en la cual, ésta es descrita para un triángulo adyacente para la variación en el arco  $\Delta\mathcal{S}$ ; describiendose de esta manera, la diferencia correspondiente:  $\Delta\mathcal{G}\mathcal{G}_\infty$ .



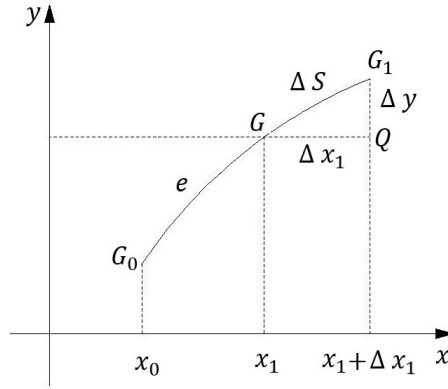


Figura 4.2: •

Si al emplear la ecuación, correspondiente a su forma particular del teorema de Pitagoras, cuya forma es aplicable para todo triángulo que tenga dentro de sus ángulos interiores, un ángulo recto;; por lo tanto, para el triángulo que se describe del plano  $\wp(x, y)$ , siendo esta:  $\Delta \mathcal{G} \mathcal{Q} \mathcal{G}_\infty$ . Entonces, según este principio, podemos señalar:

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{G} \mathcal{G}_\infty})^2 &= (\overline{\mathcal{G} \mathcal{Q}})^2 + (\overline{\mathcal{Q} \mathcal{G}_\infty})^2 & | \left( \frac{\Delta S}{\Delta S} \right)^2 \\ \left( \frac{\overline{\mathcal{G} \mathcal{G}_1}}{\Delta S} \right)^2 (\Delta S)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 & | \left( \frac{1}{\Delta x} \right)^2 \end{aligned}$$

De esta manera, podemos obtener una ecuación equivalente; dónde, la estructura del miembro derecho queda definida. Entonces:

$$\left( \frac{\overline{\mathcal{G} \mathcal{G}_\infty}}{\Delta S} \right)^2 \left( \frac{\Delta S}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \quad (4.2)$$

Se debe considerar, que las variaciones, tanto para  $x$  como para  $y$ , son variaciones infinitesimales. Por lo tanto, la resultante para los términos involucrados, se debe identificar la existencia de límites, cuando estos corresponden  $\Delta x \rightarrow 0$ . Según esto, tenemos:

$$\lim_{GG_1 \rightarrow 0} \left[ \frac{GG_1}{\Delta \mathcal{S}} \right] = 1 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] = \frac{dy}{dx} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta \mathcal{S}}{\Delta x} \right] = \frac{d\mathcal{S}}{dx}$$

Según la expresión anterior, al reemplazar las igualdades descritas en la expresión(6.2), diremos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{GG_1}{\Delta \mathcal{S}} \right)^2 \left( \frac{\Delta \mathcal{S}}{\Delta x} \right)^2 &= 1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \\ \left[ \lim_{GG_1 \rightarrow 0} \left( \frac{GG_1}{\Delta \mathcal{S}} \right)^2 \right] \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathcal{S}}{\Delta x} \right)^2 \right] &= 1 + \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right] \\ \left[ \lim_{GG_1 \rightarrow 0} \left( \frac{GG_1}{\Delta \mathcal{S}} \right)^2 \right] \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathcal{S}}{\Delta x} \right)^2 \right] &= 1 + \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right] \\ \left( \frac{d\mathcal{S}}{dx} \right)^2 &= 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{S}}{dx} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (4.3)$$

Expresando la ecuación de la expresión anterior, mediante una expresión diferencial; siendo ésta, equivalente:

$$d\mathcal{S} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (4.4)$$

Lo cual, expresremos de manera análoga, mediante una ecuación, Dónde, existe un parámetro denominado  $\mathbf{p} > 0$ . Por lo tanto, diremos que, esta ecuación la podemos expresar:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} \quad (4.5)$$

De esta forma, se puede describir la ecuación paramétrica, correspondiente a la longitud del arco de una cuerda sobre una superficie del plano  $\wp(x, y)$ . Se debe tener presente que, la ecuación equivalente a la función  $f$ , se encuentra dicho parámetro  $\mathbf{p} > 0$ .

De manera implícita, existen dos ecuaciones para  $x$  e  $y$ ; siendo dichas ecuaciones de forma paramétrica la curva que describe al arco de la cuerda, sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ . Por lo tanto:

Al considerando las ecuaciones tales, podemos decir que estas se expresan:

$$x = \phi(\mathbf{p}) \quad y = \omega(\mathbf{p}) \quad (4.6)$$

La expresión diferencial de estas ecuaciones, corresponden:

$$dx = \phi'(\mathbf{p}) dt \quad dy = \omega'(\mathbf{p}) dt \quad (4.7)$$

Al reemplazar, de manera análoga las ecuaciones paramétrica de la expresión anterior en la ecuación diferencial que describe la longitud del arco de la curvatura sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , se obtiene:

$$\frac{dS}{d\mathbf{p}} = \sqrt{[\phi'(\mathbf{p})]^2 + [\omega'(\mathbf{p})]^2} \quad (4.8)$$

La expresión diferencial, considerando al parámetro  $\mathbf{p} : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , cuya base corresponde a la derivada de la longitud del arco para la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ . Según esto, dicha ecuación expresada mediante la notación Leibniz, lo cual, se considera como un cociente de dos magnitudes diferenciales infinitesimales; de esta manera, es posible escribir esta expresión como una ecuación diferencial de variables separables. Por lo tanto, diremos que, dicha ecuación corresponde:

$$dS = \sqrt{[\phi'(\mathbf{p})]^2 + [\omega'(\mathbf{p})]^2} d\mathbf{p} \quad (4.9)$$

### 4.3. Elementos de Curvatura.

Estos elementos, son caracterizados mediante la forma de una curvatura, teniendo en cuenta que, estos elemento generan dicha forma geométrica, a través de grado que los caracterizan. Al existir una curvatura para una gráfica generada mediante una ecuación característica, siendo esta continua; además, debe existir solamente una recta tangente en cualquiera de los elemento que la constituyen siendo estos expresado mediante puntos cartesianos.

Las rectas tangentes, correspondientes a lo descrito anteriormente, las podemos determinar de manera algebraica para dichos puntos; luego, establecer un ángulo, el cual, se encuentra comprendido sobre una recta estandar horizontal y la recta tangente determinada. De manera más general, podemos representarlo sobre un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

Este ángulo de contingencia, se denomina mediante  $\alpha^*$ , lo cual, es equivalente a un ángulo de giro para la recta tangente y una recta estandar horizontal. Existe una variante adicional, correspondiente a una característica particular de este ángulo, ya que,  $\alpha^*$  es un ángulo móvil, sujeto a la geometría de la curva generada por la ecuación característica sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , para los puntos comprendidos dentro del intervalo  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ , que la define la función  $f$ . Este ángulo, es denominado como ángulo de contingencia  $\alpha^*$ . Cabe señalar que, este ángulo, cuyos puntos extremales se encuentran dentro del intervalo comprendido para el arco de la cuerda  $\widehat{\mathcal{EH}}$ .

Para el caso, cuando existen dos cuerdas sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , se debe considerar que, la cuerda que tenga mayor variación con respecto a su razón de cambio, tendrá mayor grado de curvatura. Por lo tanto, si arco de la cuerda tiene un ángulo de contingencia mayor, este no necesariamente depende del grado de curvatura.

Por otro lado, sobre la determinación del grado de curvatura en las distintas cuerdas que se encuentran contenidas dentro de la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , sujeto al ángulo de contingencia  $\alpha^*$ . De forma distinta, son los valores característicos para sus longitudes de curvatura de los arcos de las cuerdas contenidas.

Por lo consiguiente, existe una razón proporcional que se describe para la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , entre el ángulo de contingencia  $\alpha^*$ , y su longitud de curvatura  $\mathcal{L}$ . :

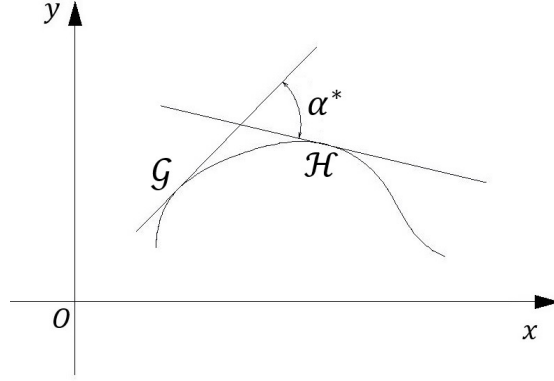


Figura 4.3: Representación gráfica de un ángulo de contingencia  $\alpha^*$ , generado por dos rectas tangentes en distintos puntos del arco de la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$

**Definición: (Razón de Proporcionalidad para Elementos Dentro de una Cuerda).**

El cociente que describe, la razón correspondiente entre el ángulo de contingencia  $\alpha^*$ , y la longitud de curvatura  $\mathcal{L}_{\varepsilon\mathcal{H}}$ , es denominado coeficiente de curvatura media  $\mathcal{K}_m$ , para el arco de la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ . Por lo tanto, algebraicamente podemos expresar esta razón:

$$\mathcal{K}_m = \frac{\alpha^*}{\mathcal{L}_{\varepsilon\mathcal{H}}} \quad (4.10)$$

Cuando se presenta el caso, cuando existen diferentes arcos de para distintas cuerdas, dentro de la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , la curvatura media  $\mathcal{K}_m$ , esta es distinta en cada caso.

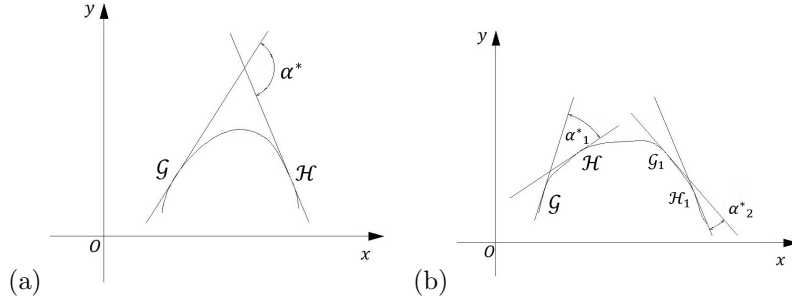


Figura 4.4: Gráficas que describen al ángulo de contingencia  $\alpha^*$ , que se forma por la intersección de dos rectas tangentes al arco de la cuerda en plano  $\wp(x, y)$ .

Ejemplificando a la curvatura media que se muestra en las gráficas anteriores, en la figura (6.4. (b)); dónde la longitud del del arco de la cuerda es equivalente a  $\widehat{\mathcal{GH}}$  y  $\widehat{\mathcal{G}_\infty \mathcal{H}_\infty}$ . Al suponer que, en ambos arcos mencionados tienen igual longitud de curvatura, pero cuya diferencia consiste que, el grado de curvatura de dicho de la cuerda en la gráfica es distinto. El grado de curvatura en la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , es posible caracterizarlo en torno al punto  $\mathcal{G}$ , en la figura representada. Además, es necesario conocer con mayor profundidad sobre la curvatura del arco de curvatura sobre la curda.

#### 4.3.1. Definición: (Límite de la Curvatura Media, Para el Arco de una Cuerda).

Sea la curvatura media, correspondiente al límite sobre el arco de la cuerda  $\widehat{\mathcal{GH}}$ ,; dónde la longitud de este arco de cuerda tiende a cero. Por lo tanto, en este caso, si el punto  $\mathcal{H}$  se dirige hacia el punto  $\mathcal{G}$ , diremos que, existe una curvatura denominada  $\mathcal{K}_\psi$ , en la cuerda del arco de la cuerda  $\widehat{\mathcal{GH}}$ , en el punto  $\mathcal{G}$ . Entonces:

$$\mathcal{K} = \lim_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}} \mathcal{K}_m = \lim_{\widehat{\mathcal{GH}} \rightarrow 0} \left[ \frac{\alpha^*}{\widehat{\mathcal{GH}}} \right] \quad (4.11)$$

#### 4.4. Determinación de los Valores de Curvatura Para el Arco.

La ecuación que determina el arco de una cuerda sobre una superficie en el plano  $\wp(x, y)$ , podemos deducir para uno de sus puntos, dlos cuales, se denomina a través de su forma cartesiana  $\mathcal{G}(x, y)$ . Al suponer que, el arco de la cuerda, se encuentra referenciada en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Por lo tanto, dicha ecuación de la curva, es equivalente a una función  $f$  para un plano real, cuya definición para dicha función corresponde  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Por lo tanto, de manera análoga la función en el plano  $\wp(x, y)$ , para la ecuación que genera el arco de la cuerda, se expresa:

$$y = f(x)$$

Además, esta función  $f$ , es una función continua para un intervalo definido  $\mathcal{I} : [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , sin importar la clase que esta función corresponda, para el intervalo en que se encuentra definido  $\mathcal{C}^n [a, b] : \forall n \in \mathbb{N}$

Al trazar dos tangentes, sobre el arco de curvatura, para los puntos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}_1$ , tomando como referencia los puntos de la abscisa, lo cual, designaremos por:  $x_0$  y  $\Delta x$ : La diferencia existente, expresada para los puntos  $\Delta x$ , es equivalente a la distancia sobre esta recta entre los puntos  $x_0$  y  $x_1$ . De esta manera, podemos designar mediante otras variables, a los ángulos generados entre la rectas tangentes en dichos puntos y la abscisa de manera estandar.

El primer ángulo, que describe a la recta tangente que pasa por los puntos  $\mathcal{G}$  en su forma cartesiana, y el par ordenado  $(x_0, 0)$ ; es designado, a través de  $\eta$ . De esta misma manera, la recta tangente que pasa por los puntos  $\mathcal{G}_1$ , también este punto es descrito en su forma cartesiana, y el punto de la abscisa  $(x + \Delta x)$ ; lo cual, se genera un ángulo denominado  $(\eta + \Delta\eta, 0)$ . Segun esto, el ángulo de contingencia  $\alpha^*$ , para este caso, es equivalente  $\Delta\eta$ .

En la figura (), se observan las condiciones geométricas descritas anteriormente. Por lo tanto, podemos observar:

Nuevamente, podemos designar al arco de la cuerda, cuya longitud de curvatura, se encuentra

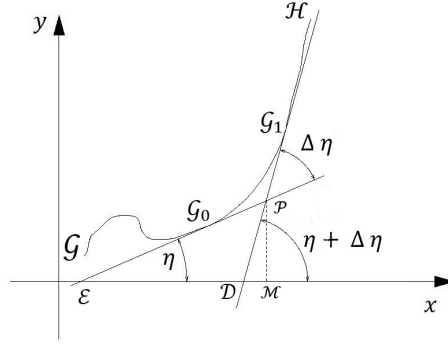


Figura 4.5: Descripción gráfica para el arco de la cuerda del plano  $\wp(x, y)$ , el cual, el ángulo de contingencia se encuentra determinado por la diferencia angular, que se genera por la intersección de las rectas tangentes para los puntos  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{G}_1$

comprendida entre los puntos  $\mathcal{G}_0$  y  $\mathcal{G}_1$ . Por lo tanto, el arco total de la cuerda para la superficie del plano  $\wp(x, y)$ , corresponde a los puntos extremales  $\mathcal{G}$  y  $\mathcal{H}$ . Como se observa en la figura (); por ende, para poder determinar el valor correspondiente al segmento del arco equivalente a los puntos comprendidos entre  $\mathcal{G}$  podemos denominar mediante  $\Delta\mathcal{S}$ ; cuyo valor, para este caso, corresponde:

$$\Delta\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{G}\mathcal{G}_\infty} - \widehat{\mathcal{G}\mathcal{G}}, \quad (4.12)$$

Como se observa en la figura (6.5); la longitud del arco de curvatura de la cuerda  $\Delta\mathcal{S}_{\widehat{\mathcal{G}, \mathcal{G}_\infty}}$ , que se encuentra comprendida entre los puntos  $\mathcal{G}_0$  y  $\mathcal{G}_1$  en el plano  $\wp(x, y)$ , corresponde a la longitud del arco de la cuerda para al el ángulo de contingencia  $\alpha^*$ . Además, es necesario mencionar que, esta longitud del arco mencionada, comprendido entre los puntos señalados, cuyo valor se encuentra definido a través de la norma lineal, equivalente al valor absoluto. Por lo tanto, podemos decir :

$$|\Delta\mathcal{S}| = \pm \left[ \widehat{\mathcal{G}\mathcal{G}_\infty} - \widehat{\mathcal{G}\mathcal{G}} \right] \quad (4.13)$$

Según se ha podido definir el valor de la curvatura media, para la curva que representa al arco



de la cuerda en la superficie del plano  $\wp(x, y)$ ; dónde, el segmento de cuerda correspondiente  $\widehat{\mathcal{G}, \mathcal{G}_\infty}$ , podemos expresar:

$$\mathcal{K}_m = \left| \frac{\Delta\eta}{\Delta\mathcal{S}} \right| \quad (4.14)$$

De manera instantanea, y especialmente en el punto  $\mathcal{G}_0$ , se hace indispensable la determinación de un valor finito, mediante el límite sobre la razón que se expresa anteriormente. De manera análoga, expresaremos nuevamente dicha expresión equivalente el coeficiente de curvatura instantaneo  $\mathcal{K}$ . Por lo tanto:

$$\mathcal{K} = \lim_{\Delta\mathcal{S} \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta\eta}{\Delta\mathcal{S}} \right] = \lim_{\Delta\mathcal{S}(x) \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta(\mathcal{S}(x) + \Delta\mathcal{S}(x)) - \eta(\mathcal{S}(x))}{\Delta\mathcal{S}(x)} \right] \quad (4.15)$$

Es evidente decir que, el índice instantaneo de curvatura  $\mathcal{K}$ , es equivalente a la derivada del ángulo que se forma para la recta tangente sobre el punto extremal del intervalo  $\mathcal{I}^* : [x, x + \Delta x]$ , expresando a dicho punto sobre el arco de cuerda  $\mathcal{G}_0$  y la abscisa; por ende, el ángulo formado se expresa mediante  $\eta$ . Por otro lado, el ángulo que se forma entre la recta tangente generada por la curva, para el punto  $\mathcal{G}_1$  y la abscisa, en cuyo punto extremal del intervalo mencionado, es equivalente a la expresión  $\eta + \Delta\eta$ .

De otra manera, el valor del índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , a través de la notación de Leibniz, podemos expresar la derivada correspondiente, a través de una derivada paramétrica, lo cual, diremos para este caso, se genera una expresión equivalente a una función compuesta. Entonces, diremos que, el índice de curvatura instantaneo  $\mathcal{K}$ , es equivalente:

$$\mathcal{K} = \frac{\left( \frac{d\eta}{dx} \right)}{\left( \frac{dx}{d\eta} \right)} \quad (4.16)$$

Según la gráfica de la figura 6.5; mediante la recta tangente generada que pasa por el punto  $\mathcal{G}_0$ , es posible realizar una relación trigonométrica, utilizando el ángulo descrito  $\eta$ . Según lo mencionado anteriormente, podemos realizar la siguiente relación trigonométrica, mediante una expresión algebraica:

$$\tan \eta = \frac{\overline{DP}}{\overline{DM}} \quad (4.17)$$

Análogamente, esta relación trigonométrica expresa a una derivada, cuya variable independiente corresponde a la abscisa del plano  $\wp(x, y)$ , precisamente para el punto  $x_0$ . Por ende, podemos decir:

$$\tan \eta = \frac{dy}{dx} \quad (4.18)$$

Luego, al aplicar la función inversa en la derivada que expresa la relación trigonométrica correspondiente a  $\tan \eta$ ; diremos que:

$$\eta = \arctan \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

De este modo, al derivar la función correspondiente al ángulo sobre el plano  $\wp(x, y)$ , dicho ángulo es denominado  $\eta$ . Por lo tanto, obtenemos:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (4.19)$$

Con respecto al índice de curvatura instantaneo  $\mathcal{K}$ , considerando que éste se expresa mediante un cociente entre dos derivadas. Según la expresión (6.16), esta función, es considerada como una derivada para una función compuesta, expresandose mediante una derivada paramétrica; lo cual, esta función correspondiente en este caso  $\eta(\mathcal{S}(x))$ . Entonces, podemos construir el valor equivalente para la expresión del cociente, a través de la expresión (6.19), que equivale al numerador para dicho cociente; y su denominador para este cociente es equivalente a la longitud de curvatura para el arco de la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y)$ . Según esto, el índice de curvatura instantaneo  $\mathcal{K}$ , corresponde:

$$\mathcal{K} = \frac{\left( \frac{\left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

De esta manera, obtenemos el índice de curvatura instantaneo  $\mathcal{K}$ , equivalente:

$$\mathcal{K} = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} \quad (4.20)$$

En consecuencia, para cualquier punto que compone el arco de la cuerda sobre la superficie del plano  $\wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ , siendo dicho arco de la cuerda, descrito de modo algebraico mediante una función continua, para un intervalo definido. Además, la función que describe el arco de la cuerda, debe ser de clase  $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ , tal que  $n \geq 2$ . Se hace necesario, expresar el valor del índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , a través de la norma lineal para dicho valor resultante, lo cual, podemos decir que, este índice corresponde:

$$|\mathcal{K}| = \frac{\left|\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)\right|}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} \quad (4.21)$$

De esta manera, se debe señalar que, es necesario que el valor correspondiente al índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , sea positivo.

## 4.5. Determinación de la Curvatura Para el Arco de la Cuerda de Manera Paramétrica.

Consideremos a las variables del plano en  $\mathbb{R}^2$ , que se describe de manera cartesiana mediante  $\wp(x, y)$ , cuyas variables se expresan:  $x$  e  $y$ , donde estas se encuentran en función de un parámetro  $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Por lo tanto, expresar dichas variables, de manera paramétrica, tal que:

$$x = \lambda(\mathbf{p}) \quad y = \mu(\mathbf{p}) \quad (4.22)$$

De esta manera, podemos determinar la detivada primera y segunda, mediante un breve análisis, lo cual, podemos establecer el valor analítico, correspondiente al índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , para variables cartesianas parametrizadas. Entonces:

$$\tan \eta = \frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \tan \eta = \left[ \frac{\left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)}{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)} \right] \quad (4.23)$$

Teniendo conocimiento del valor correspondiente del índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , como se expresa para las variables, correspondiente a funciones en el plano  $\wp(x, y)$ , siendo esta una derivada que podemos expresar, a través de  $\left(\frac{d\eta}{d\mathcal{S}}\right)$ . Según esto, diremos que el índice de curvatura paramétrico, para el parámetro  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , corresponde:

$$\eta = \arctan \left[ \frac{\left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)}{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)} \right]$$

$$\frac{d\eta}{d\mathbf{p}} = \left[ \frac{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)^2} \right] \left\{ \frac{\left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2x}{d\mathbf{p}^2}\right) - \left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2y}{d\mathbf{p}^2}\right)}{\left[\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right]^2} \right\}$$

$$\frac{d\eta}{d\mathbf{p}} = \frac{\left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2x}{d\mathbf{p}^2}\right) - \left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2y}{d\mathbf{p}^2}\right)}{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)^2} \quad (4.24)$$

Considerando a las variables  $x$  e  $y$ , descritas como se mencionan anteriormente; lo cual, estas varibales son variables cartesianas, lo cual, para este caso, estas toman un rol equivalente a ser funciones paramétricas. Según esto, la expresión correspondiente a la razón de cambio generada para el ángulo diferencial  $\eta$ ; donde este ángulo se encuentra formado entre el punto tangencial del arco de la cuerda  $\mathcal{S}$  y la abscisa del plano  $\wp(x, y)$ , y la expresión diferencial correspondiente al arco de la cuerda  $\mathcal{S}$ ; es equivalente:

$$\frac{d\eta}{d\mathbf{p}} = \frac{\left(\frac{d\mu}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{d\mathbf{p}^2}\right) - \left(\frac{d\lambda}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2\mu}{d\mathbf{p}^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{d\mathbf{p}}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{d\mathbf{p}}\right)^2} \quad (4.25)$$

El índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , en el caso de tener funciones, cuyas variables cartesianas representativas para el plano  $\wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Se debe considerar tanto para  $x$  como para  $y$ , que estas variables se encuentran en función del parámetro  $\mathbf{p}$ .

Según esto, podemos construir una expresión correspondiente para poder describir de modo algebraico el índice de curvatura, sujeto a las variables se encuentran en función del parámetro  $\mathbf{p}$ . Entonces:

$$\frac{d\eta}{dS} = \frac{\left(\frac{d\eta}{d\mathbf{p}}\right)}{\left(\frac{dS}{d\mathbf{p}}\right)} \quad (4.26)$$

Los términos que se involucran en la expresión correspondiente a una derivada paramétrica, al desglosar entre la derivada del numerador y la derivada del denominador para este cociente analítico. Por ende, los términos del numerador y el denominador, corresponde:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{d\mathbf{p}} &= \frac{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2y}{d\mathbf{p}^2}\right) - \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2x}{d\mathbf{p}^2}\right)}{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)^2} \\ \frac{dS}{d\mathbf{p}} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

De este modo, diremos que el índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , donde las variable, en este caso corresponden a variables cartesianas. Afirmaremos que, la expresión resultante para este índice de curvatura  $\mathcal{K}$ , es equivalente:

$$\mathcal{K} = \frac{\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2y}{d\mathbf{p}^2}\right) - \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)\left(\frac{d^2x}{d\mathbf{p}^2}\right)}{\left[\left(\frac{dx}{d\mathbf{p}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathbf{p}}\right)^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \quad (4.28)$$

## 4.6. Longitud de Curvatura.

**Definición: (Longitud del Arco de una Curva Para Cordenadas Rectangulares).**

Sea una función  $y = f(x)$  continua en un intervalo definido  $\mathcal{I}^\alpha : [x_\alpha, x_\omega]$ ; la ecuación que define la longitud de de una curvatura en coordenadas rectangulares genéricas estandar  $x$  e  $y$ . La expresión de longitud de curvatura  $\mathcal{S}_{[\alpha, \omega]}$ , para dicho arco en un corresponde:

$$\mathcal{S}_{[\alpha, \omega]}^* = \int_{\alpha}^{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \forall x \in [\alpha, \omega] \subset \mathbb{R} \quad (4.29)$$

### 4.6.1. Análisis Para la Determinación de la Ecuación.

Al determinar la longitud del arco de la curvatura, entre los puntos que denominaremos de modo genérico para este caso, mediante  $\mathcal{A}_{(\alpha, \beta)}$  y  $\mathcal{B}_{\psi, \omega}$ , cuyas rectas normales a la abscisa que definen al intervalo de la función  $y = f(x)$ , corresponden  $x_a = \alpha$  y  $x_z = \omega$ . De este modo, es posible determinar el intervalo que define a la integral correspondiente a la longitud de arco sobre una cuerda dada mediante una función; por ende, este intervalo corresponde :  $\mathcal{I}_* : [\alpha, \omega]$ .

Según la longitud del arco para una curvatura, como se menciona anteriormente. De este modo, podemos hacer nuevamente mención de aquello.

Tomando los puntos sobre un arco de cuerda en el plano estandar  $\wp(x, y)$ , los puntos denominados:  $\mathcal{A}, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_i, \dots, \mathcal{B}$ ; cuyas abscisas correspondientes, son equivalentes:  $x_0 = \alpha, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = \beta$ . Trazando las distintas divisiones de esta cuerda sobre los puntos  $\widehat{\mathcal{A}\mathcal{M}_1}, \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2, stackrel{\curvearrowright}{\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3}, \dots, stackrel{\curvearrowright}{\mathcal{M}_{n-1}\mathcal{B}}$ ; cuyas longitudes, serán denominadas por medio de  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ . De este modo, obtendremos, una linea poligonal inscrita bajo la cuerda del arco en en el plano estandar  $\wp(x, y)$ . Por lo tanto, el valor equivalente para la longitud de curvatura sobre el total de segmentos que compone el arco de la cuerda, el cual, es denominado mediante  $\mathcal{S}^*$ , siendo equivalente a la expresión:

$$\mathcal{S}^* = \sum_{i=1}^n \Delta \mathcal{S}_i \quad (4.30)$$

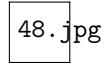


Figura 4.6: Representación geométrica para la longitud de arco poligonal sobre la cuerda en el plano estándar  $\varphi(x, y)$

Si la poligonal inscrita bajo el arco de la cuerda de la figura anterior. Sobre esto, al tener consideración sobre esta poligonal para su lado mayor, cuando su valor es muy cercano a cero. Según esto, podemos decir que, la expresión correspondiente es equivalente:

$$\mathcal{S}_* = \lim_{\max \Delta \mathcal{S}_{*i} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (4.31)$$

Ahora, al demostrar que la función que representa geoméricamente al arco de la cuerda, siendo esta expresada de modo genérico mediante  $y = f(x)$ , y la derivada de esta función, para un intervalo continuo definido, expresado mediante  $\mathcal{I}_* : [\alpha, \beta] \subset \mathcal{R}$ . Además, para calcular la longitud del arco sobre el arco de la cuerda, podemos decir:

$$\Delta y = f(x_i) - f(x_{i-1}) \quad (4.32)$$

Por otro lado, podemos decir:

$$\Delta \mathcal{S} = \sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2} \quad (4.33)$$

Expresando esta última ecuación, de otro modo:

$$\Delta \mathcal{S} = \sqrt{1 + [F'(\xi_i)]^2} \Delta x \quad (4.34)$$

Reemplazando el valor de  $\Delta y$ , en la última expresión, obtendríamos:

$$\Delta \mathcal{S} = \sqrt{1 + \left[ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \right]^2} \Delta x \quad (4.35)$$

El valor correspondiente de  $\Delta x$ , es equivalente:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \quad (4.36)$$

De este modo, la expresión infinitesimal numérica correspondiente al arco de la cuerda en el plano estandar  $\varphi(x, y)$ , corresponde:

$$\Delta \mathcal{S}^* = \sqrt{1 + \left[ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \right]^2} \Delta x \quad (4.37)$$

En el argumento de esta última expresión, el término cuadrático corresponde a una derivada numérica, en la cual, se puede ajustar a una primera derivada total para la función  $f'(x)$ , mediante el teorema de Lagrange. Por lo tanto, podemos decir:

Según la figura, el triángulo que s

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (4.38)$$



Esta expresión se encuentra definida, en un intervalo dado:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \quad (4.39)$$

Si al reemplazar, este valor en la última expresión resultante equivalente de  $\Delta \mathcal{S}^*$ . De esta manera, podemos obtener:

$$\Delta \mathcal{S}_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i \quad (4.40)$$

La línea poligonal, que describe al arco de la cuerda del plano estándar  $\varphi(x, y)$ . La longitud de curvatura sobre esta línea poligonal de la cuerda, corresponde a la suma de todos los segmentos poligonales, en la cual, se encuentra descrita mediante:

$$\Delta \mathcal{S}_i^* = \sum -i = 1^n \left[ \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} x_i \right] \quad (4.41)$$

Como se ha comentado, que la función  $f'(x)$ , debe ser continua en un intervalo dado. Además, por hipótesis, podemos decir que, las funciones  $f(x)$  y  $f(\xi_i)$ . Por lo tanto, podemos decir que:

$$f'(\xi_i) = f'(x) \quad (4.42)$$

De esta manera, podemos concluir:

$$\mathcal{S}^* = \sum_{i=1}^n \left[ \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \right] \Delta x_i = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (4.43)$$

## 4.7. Determinación de Longitud de la Longitud de Curvatura Paramétrica.

Para la determinación de la longitud de curvatura, a través de un parámetro  $t \geq 0$ . Considerando las variables  $x$  e  $y$ , en función de este parámetro, corresponde:

$$\left. \begin{array}{l} x = \mathfrak{g}(\mathfrak{p}) \\ y = \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) \\ \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}_\beta \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

Donde las funciones  $\mathfrak{g}(\mathfrak{p})$  y  $\mathfrak{m}(\mathfrak{p})$ , son funciones, cuyas derivadas son continuas. Donde, la función  $\mathfrak{m}'(\mathfrak{p})$  debe ser distinta de cero. Según esto, podemos señalar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{g}'(\mathfrak{p})}{\mathfrak{m}'(\mathfrak{p})} \quad \forall \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}) \neq 0 \quad (4.45)$$

Considerando que:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{g}^{-1}(\alpha) \\ \mathfrak{p}_\beta = \mathfrak{g}^{-1}(\beta) \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

Tambien, es necesario considerar, la condición correspondiente a la diferenciabilidad de la variable  $x$ . Por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} x = \mathfrak{g}(\mathfrak{p}) \\ dx = \mathfrak{g}'(\mathfrak{p}) \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Utilizando, la expresión que describe la longitud de curvatura de para coordenadas cartesianas, la expresión de la longitud de curvatura de forma paramétrica, cuyo parámetro  $t \geq 0$ . Entonces:

$$\mathcal{S}^* = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{\mathfrak{g}^{-1}(\alpha)}^{\mathfrak{g}^{-1}(\beta)} \sqrt{1 + \left[\frac{\mathfrak{g}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}\right]^2} \mathfrak{g}'(\mathfrak{p}) d\mathfrak{p} \quad (4.48)$$

De otra manera, podemos expresar la longitud de curvatura de modo paramétrico, mediante:

$$\mathcal{S}^* = \int_{\mathfrak{g}^{-1}(\alpha)}^{\mathfrak{g}^{-1}(\beta)} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{g}'(t)}{\mathfrak{m}'(t)}\right)^2} dt = \int_{\mathfrak{g}^{-1}(\alpha)}^{\mathfrak{g}^{-1}(\beta)} \sqrt{[\mathfrak{g}'(t)]^2 + [\mathfrak{m}'(t)]^2} dt \quad (4.49)$$



## Capítulo 5

# Determinación de la Longitud de Curvatura Para el Arco $\widehat{OB}$

### 5.1. Descripción General.

### 5.2. Determinación del Valor Correspondiente al Arco de la Cuerda

$\widehat{OB}$

Sobre el plano de referencia  $\wp(u, v)$ , que describe a la superficie euclídea plana, correspondiente al dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , la cual, es denominada por medio del plano euclídeo  $\wp(x, y)$ , siendo representado mediante el dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ . Este plano, se puede definir como un plano referencial  $\wp(u, v)$ . Además, se dice que en este plano referencial  $\wp(u, v)$ , se puede describir mediante el concepto de lugar geométrico para un conjunto dado. Entonces, este conjunto, toma el rol de conjunto universo  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 : \supseteq \wp(u, v)$ . Por lo tanto, dentro de este conjunto, que se ha definido como conjunto universo  $\mathcal{U}$ , se encuentra incluido un subconjunto, que corresponde al arco de la cuerda  $\widehat{OB}$ , al plano de referencia.

Según lo que se señala, mediante una descripción conjuntista elemental; es posible definir una estructura correspondiente a la descripción de una expresión abstracta para dicha definición. Por lo tanto, sobre esta definición, diremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \quad \widehat{\text{OB}} \in \wp(u,v) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \qquad \qquad \qquad : \\ \widehat{\text{OB}} \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \supset [0, 106] \times [0, 22,949] \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Para esta expresión abstracta, sobre la cuerda del arco denominada  $\widehat{\text{OB}}$ , que naturalmente corresponde de manera directa al plano referencial  $\wp(u, v)$ , como se muestra en la figura .1. En esta figura, de manera general, se muestran los cuatro planos que conforman de forma geométrica la interpretación de manera superficial para el perfil del álabe direccional.

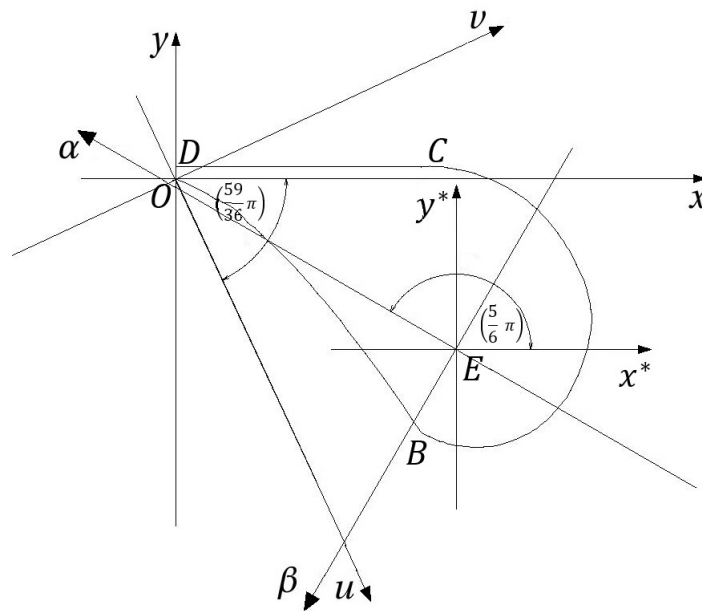


Figura 5.1: Conformación de planos sobre el perfil superficial del álabe direccional.

El dominio coordinado cartesiano referencial  $(u, v)$ , correspondiente, a la descripción de un plano referente. Por ende, este plano referente sobre el primer cuadrante:  $\wp(u, v) \subseteq \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ , se encuentra descrito el arco que conforma la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ .

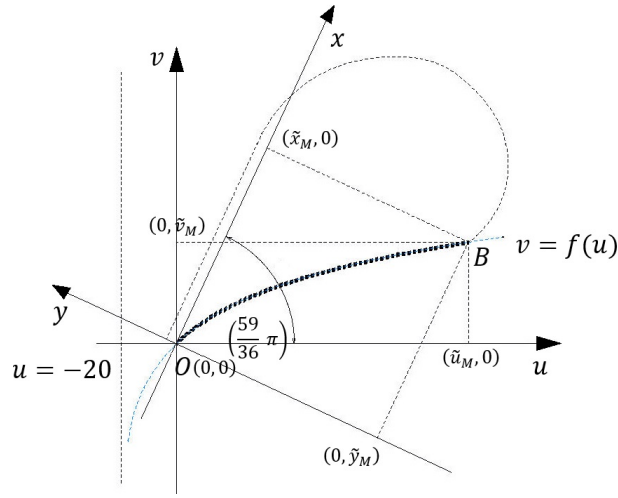


Figura 5.2: Representación de el arco de la cuerda sobre el plano referencial  $\wp(u, v)$

En la figura ; se da a conocer la estandarización del dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , en referencil al plano descrito  $\wp(u, v)$ :

El arco de la cuerda  $\widehat{OB}$ , comprende a la unión de los vértices  $O$  y  $B$ , respectivamente. En el punto  $O$ , podemos encontrarlo en la misma posición espacial para los planos referencial  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ .

La ecuación caracteristica  $v = f(u)$ , como lo muestra la figura .2; la cual, corresponde a un intervalo acotado de la representación geométrica en el plano  $\wp(u, v)$  de esta. :

$$\left. \begin{aligned} v &= 20 \cdot \ln \left( \frac{u+20}{20} \right) & : \quad \forall \widehat{OB} \in \wp(u, v) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ & & : \quad u \in [0, 106] \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

En consecuencia, la primera derivada para la ecuación caracteristica del arco de la cuerda  $\widehat{OB}$ , que se representa de manera experimental, mediante el plano  $\wp(u, v)$ , equivale:

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{20}{u+20} \quad : \quad \forall u \in (0, 106) \quad (5.3)$$

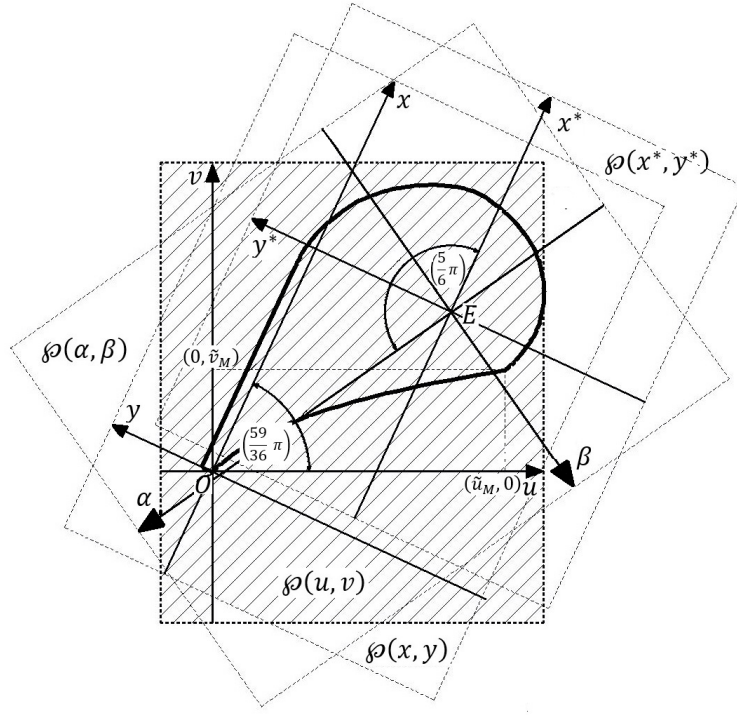


Figura 5.3: Estandarización del plano  $\wp(u, v)$

La expresión que determinaría el valor total analítico de la longitud del arco de curvatura de la cuerda  $\mathcal{S}_{\widehat{OB}}$ , para este caso, corresponde:

$$\mathcal{S}_{\widehat{OB}} = \int_O^B \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} du \quad (5.4)$$

Por lo tanto, la expresión que determinaría el valor de la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\mathcal{S}_{\widehat{OB}}$ , en cuyo intervalo, que define la variable  $u$ , en el plano  $\wp(u, v)$ . Considerando, la primera derivada de la función, que describe de manera analítica a este arco de la cuerda  $\widehat{OB}$ . Por lo tanto, esta expresión que determina el valor analítico para la longitud de curvatura para la cuerda  $\widehat{OB}$ , es equivalente:

$$\mathcal{S}_{\widehat{OB}} = \int_0^{106} \sqrt{1 + \left(\frac{20}{u+20}\right)^2} du \quad (5.5)$$



El desarrollo de manera detallada, que determina el valor expresado de manera analítica, para la longitud de curvatura sobre el arco de la cuerda  $\widehat{OB}$  en el plano  $\wp(u, v)$ . Cuyo desarrollo, se realiza de manera detallada es equivalente:

$$\begin{aligned}
 S_{\widehat{OB}} &= \int_0^{106} \sqrt{1 + \left(\frac{20}{u+20}\right)^2} du \\
 &= \int_0^{106} \sqrt{\frac{(u+20)^2 + (20)^2}{(u+20)^2}} du \\
 &= \int_0^{106} \frac{\sqrt{(u+20)^2 + (20)^2}}{u+20} du
 \end{aligned}$$

Para poder continuar, en la determinación del valor para la integral definida, cuyo valor analítico, corresponde al valor de la longitud de curvatura del arco de la cuerda  $\widehat{OB}$ . Es necesario, realizar un cambio de variable del tipo trigonométrico. Mediante este cambio de variable, debe considerar: La variable trigonométrica, correspondiente a un ángulo variable determinado, siendo éste denominado  $\phi^*$ . Según lo expuesto, este cambio de variable, implica los siguientes cambios en la estructura algebraica de la integral definida, lo cuales determina el valor equivalente a la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\widehat{OB}$ . Entonces, podemos expresar:

$$\tan(\phi^*) = \frac{u+20}{20}$$

$$\phi^* = \arctan\left(\frac{u+20}{20}\right)$$

$$u+20 = 20 \cdot \tan(\phi^*)$$

$$du = 20 \cdot \sec^2(\phi^*) d\phi^*$$

$$\sqrt{(u+20)^2 + (20)^2} = 20 \cdot \sec(\phi^*)$$

Por otro lado, los puntos extremales que definen al intervalo que define a la variable experimental, la cual, es perteneciente al dominio coordinado cartesiano  $(u, v)$ , representado por medio del plano

$$\text{si: } u = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^* = \arctan\left(\frac{0+20}{20}\right) \\ \phi^* = \arctan(1) \end{array} \right.$$

$$\text{Si: } u = 106 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^* = \arctan\left(\frac{106+20}{20}\right) \\ \phi^* = \arctan\left(\frac{63}{10}\right) \end{array} \right.$$

$\wp(u, v)$ . Una vez realizado este cambio de variable, dichos puntos extremales, asumirán valores según la estructura que define al ángulo trigonométrico variable  $\phi^*$ . Por lo tanto, podemos decir:

El valor correspondiente al otro punto extremal del arco de la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ , lo cual, esta se encuentra descrita referente al plano  $\wp(u, v)$ ; equivale:

Según este cambio de variable, sobre los puntos extremales, pertenecientes al intervalo que define a la función de integral definida que determina el valor analítico correspondiente, a la expresión del arco de curvatura correspondiente para la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ , sobre el plano  $\wp(u, v)$ , que equivale a la expresión:

$$S_{\widehat{\text{OB}}} = \int_0^{106} \sqrt{1 + \left(\frac{20}{u+20}\right)^2} du = 20 \int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\arctan\left(\frac{63}{10}\right)} \left[ \frac{\sec^3(\phi^*)}{\tan(\phi^*)} \right] d\phi^* \quad (5.6)$$

Continuando con la determinación de manera detallada; con el fin de, encontrar el valor de la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $S_{\widehat{\text{OB}}}$ . Según esto, podemos decir:

$$\mathcal{K}^* = \cos(\phi^*) \quad \Leftrightarrow \quad d\mathcal{K}^* = (-1) \sin(\phi^*) d\phi^*$$

$$\phi^* = \arccos(\mathcal{K}^*)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}} &= 20 \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\arctan\left(\frac{63}{10}\right)} \left[ \frac{\left(\frac{1}{\cos(\phi^*)}\right)^2}{\sin(\phi^*)} \right] d\phi^* \\ &= 20 \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\arctan\left(\frac{63}{10}\right)} \left[ \frac{1}{\cos^2(\phi^*) \cdot \sin(\phi^*)} \right] d\phi^* \\ &= 20 \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\arctan\left(\frac{63}{10}\right)} \left[ \frac{\sin(\phi^*)}{\cos^2(\phi^*) \cdot \sin^2(\phi^*)} \right] d\phi^* \\ \mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}} &= 20 \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\arctan\left(\frac{63}{10}\right)} \left[ \frac{\sin(\phi^*)}{\cos^2(\phi) [1 - \cos^2(\phi^*)]} \right] d\phi^* \end{aligned}$$

Se hace imprescindible, la realización de un nuevo cambio de variable para la integral definida resultante sobre la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}$ . El propósito para determinar el valor resultante, mediante esta metodología de desarrollo; es poder encontrar un valor analítico equivalente, que logre representar a dicha longitud lineal equivalente al arco de la cuerda. Este cambio de variable, consiste:

En este nuevo cambio de variables, señalado anteriormente. Se deben considerar los puntos extremos, ya definidos, para el cambio de variable trigonométrico anterior. Por lo tanto, según este cambio de variables, las nuevas expresiones para los puntos extremos, corresponden:

$$\text{Si: } \phi^* = \arctan\left(\frac{63}{10}\right) \quad \mathcal{K}^* = \cos\left[\arctan\left(\frac{63}{10}\right)\right]$$

Para los valores extremales, correspondiente al nuevo cambio de variables como se indica anteriormente; éstos manera análoga, al utilizar como argumento para un rango de valores  $\mathcal{D}^*$ , de forma general, obtendríamos el valor correspondiente:

$$\sin[\arctan(\mathcal{D}^*)]$$

$$\mathcal{E}^* = \arctan(\mathcal{D}^*) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}^* = \tan(\mathcal{E}^*)$$

Luego, para determinar el valor equivalente a esta identidad trigonométrica, como lo expresa uno de los elementos extremales de la integral definida, para este nuevo cambio de variables. Se puede utilizar, en este análisis de determinación de dicho valor, la identidad fundamental de la trigonometría, para dicho ángulo denominado  $\mathcal{E}^*$ . Por lo tanto, podemos decir:

$$\sin^2(\mathcal{E}^*) + \cos^2(\mathcal{E}^*) = 1 \quad (5.7)$$

Mediante esta identidad, podemos determinar una expresión equivalente, lo cual, diremos:

$$\left(\frac{1}{\cos(\mathcal{E}^*)}\right)^2 = 1 + (\mathcal{D}^*)^2$$

En consecuencia, podemos determinar:

$$\sin^2(\mathcal{E}^*) + \cos^2(\mathcal{E}^*) = 1 \quad : \quad \left(\frac{1}{\cos(\mathcal{E}^*)}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sin(\mathcal{E}^*)}{\cos(\mathcal{E}^*)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos(\mathcal{E}^*)}\right)^2$$

$$\tan^2(\mathcal{E}^*) + 1 = \sec^2(\mathcal{E}^*)$$

Como se planteó anteriormente, al reemplazar en la resultante, el valor  $\mathcal{D}^* = \tan(\mathcal{E}^*)$ . De este modo, expresaremos:

$$\sec^2(\mathcal{E}^*) = 1 + (\mathcal{D}^*)^2 : ()^{(-1)}$$

$$\cos^2(\mathcal{E}^*) = \frac{1}{1+(\mathcal{D}^*)^2}$$

$$\cos(\mathcal{E}^*) = \frac{1}{\sqrt{1+(\mathcal{D}^*)^2}}$$

De esta manera, podemos concluir una expresión para expresar los puntos extremales para el nuevo cambio de variables de la integral definida, que determina el valor analítico de la longitud de curvatura para el arco de curvatura  $\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}$ . Por lo tanto:

$$\cos(\mathcal{E}^*) = \frac{1}{\sqrt{1+(\mathcal{D}^*)^2}} \quad (5.8)$$

A través de esta expresión resultante, los puntos extremales que definen a la integral definida, corresponden:

$$\text{Si: } \phi^* = \arctan\left(\frac{63}{10}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}^* = \cos\left[\arctan\left(\frac{63}{10}\right)\right] \\ \\ = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{63}{10}\right)^2}} \\ \\ = \frac{10}{\sqrt{(10)^2+(63)^2}} \\ \\ \mathcal{K}^* = \frac{63}{\sqrt{4069}} \end{array} \right.$$

Sobre el otro valor extremal que define al intervalo de la integral definida, teniendo presente que,

existe un cambio de variable con respecto a la expresión original planteada. Podemos decir, al aplicar este nuevo cambio de variable:

$$\text{Si: } \phi^* = \arctan(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{K}^* & = & \cos[\arctan()] \\ & = & \frac{(1)}{\sqrt{1+(1)^2}} \\ & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathcal{K}^* & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

De esta manera, definiremos al intervalo  $\mathcal{I}(\mathcal{K}^*)$ , que define a la integral que determina el valor de la longitud de curvatura para el arco  $\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}$ , expresando este intervalo mediante:

$$\mathcal{I}(\mathcal{K}^*) : \left[ \frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}, \frac{63}{\sqrt{4069}} \right] \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

La expresión correspondiente, aplicando este nuevo cambio de variable; la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}$ , equivaldría:

$$\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}(u) = \int_0^{106} \sqrt{1 + \left(\frac{20}{u+20}\right)^2} du$$

$$\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}(\phi^*) = 20 \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\arctan\left(\frac{63}{10}\right)} \left[ \frac{1}{\cos^2(\phi^*) \cdot \sin(\phi^*)} \right] d\phi^*$$

$$\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}(\mathcal{K}^*) = \left\{ \begin{array}{l} (-20) \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \left[ \frac{1}{(\mathcal{K}^*) \cdot [1 - (\mathcal{K}^*)^2]} \right] d\mathcal{K}^* \\ \\ = \\ (-20) \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{(\mathcal{K}^*)^2} + (-20) \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{1 - (\mathcal{K}^*)^2} \\ \\ = \\ (20) \cdot \left[ \frac{1}{\mathcal{K}^*} \right]_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} + (-20) \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{1 - (\mathcal{K}^*)^2} \\ \\ = \\ (20) \cdot \left[ \frac{\sqrt{4069}}{63} - \frac{\sqrt{16+\pi^2}}{\pi} \right] + (-20) \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{1 - (\mathcal{K}^*)^2} \\ \\ = \\ \left(\frac{20}{63\pi}\right) \cdot [\pi \cdot \sqrt{4069} - 63 \cdot \sqrt{16+\pi^2}] + (-20) \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{1 - (\mathcal{K}^*)^2} \end{array} \right.$$

El valor correspondiente, al segundo término equivalente a la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}(\phi^*)$ . Dicho término, lo denominaremos mediante la nomenclatura respectiva  $\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}(\mathcal{K}^*)_2$ , lo cual, este se encuentra descrito mediante una integral definida equivalente:

$$\mathcal{S}_{\text{OB}}^{\frown}(\mathcal{K}^*)_2 = (-20) \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{1 - (\mathcal{K}^*)^2} \quad (5.10)$$

La integral definida, correspondiente al segundo término que define el valor de la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(\mathcal{K}^*)_2$ , su desarrollo comprende en realizar otra sustitución trigonométrica. En dicha sustitución, podemos realizar los cambio de variables que se involucran para esta integral definida:

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(\mathcal{K}^*)_2 = (-20) \cdot \int_{\left(\frac{\pi}{\sqrt{16+\pi^2}}\right)}^{\left(\frac{63}{\sqrt{4069}}\right)} \frac{d\mathcal{K}^*}{1 - (\mathcal{K}^*)^2} \quad (5.11)$$

Para el caso, correspondiente al desarrollo, para la determinación del valor analítico de la longitud de curvatura. Teniendo presente, que la expresión (5.11), corresponde al segundo término, dejando el primer término expresado, a través de, la regla de Barrow. Por lo tanto, el desarrollo de este término, es equivalente:

$$\begin{aligned} & (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2 + (10)^2}}\right)} \left[ \frac{1}{1 - (G^*)^2} \right] dG^* \\ & = \\ & (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2 + (10)^2}}\right)} \left[ \frac{1}{(1 - G^*)(1 + G^*)} \right] dG^* \\ & = \\ & (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2 + (10)^2}}\right)} \left[ \frac{2}{(1 - G^*)(1 + G^*)} \right] dG^* \end{aligned}$$

Sobre esta última forma de la integral indefinida, correspondiente al segundo término de la expresión resultante total de la longitud de curvatura para el segmento geométrico en el plano  $\wp(u, v)$ , siendo este denominado  $\widehat{\text{OB}}$ . Es necesario la aplicación sobre la función, en el argumento de dicha integral indefinida de fracciones parciales. Entonces:



$$\frac{2G^*}{(1-G^*)(1+G^*)} = \frac{A_{\rho^*}}{1-G^*} + \frac{B_{\rho^*}}{1+G^*}$$

$$2 = A_{\rho^*} (1 - G^*) + B_{\rho^*} (1 + G^*)$$

$$2 = (A_{\rho^*} + B_{\rho^*}) + G^* (A_{\rho^*} - B_{\rho^*})$$

Luego, se forma un sistema de ecuaciones, en el cual, debe ser generado por linealidad. Esto según, el grado de la variable que se encuentra en el polinomio que se encuentra mediante la ponderación de la variable  $G^*$ , es equivalente a al valor constante que pondera al numerador de la fracción total, en la cual, se pretende descomponer. Por ende, el sistema de ecuaciones, para este caso corresponde:

$$\left. \begin{aligned} A_{\rho^*} - B_{\rho^*} &= 0 \\ A_{\rho^*} + B_{\rho^*} &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Este sistema de ecuaciones, desarrollado mediante el método de la matriz ampliada, para determinar los valores de las constantes de  $A_{\rho^*}$  y  $B_{\rho^*}$ . Por lo tanto, obtenemos:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

De esta manera, a la derecha de matriz ampliada, se encuentra los valores de las constantes determinadas mediante este método. Entonces, los valores de las constantes  $A_{\rho^*}$  y  $B_{[\rho^*]}$ , se encuentra representados en el vector columna en la derecha de la matriz ampliada.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (5.13)$$

De otro modo, los valores de las constantes, de forma explicita corresponden:

$$\left. \begin{aligned} A_{\rho^*} &= 1 \\ B_{\rho^*} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

De esta manera, la descomposición de la fracción, que describe a la función del argumento de la integral definida para el segundo término resultante de la longitud total del arco para la cuerda del plano  $\wp(u, v)$ , es equivalente:

$$\frac{2}{1-(G^*)^2} = \frac{1}{1-G^*} + \frac{1}{1+G^*} \quad (5.15)$$

En consecuencia, la resultante equivalente de la integral definida, en este caso, corresponde:

$$(-10) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2+(10)^2}}\right)} \left[ \frac{2}{1-(G^*)^2} \right] dG^* = (-10) \left\{ \begin{aligned} &\int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2+(10)^2}}\right)} \frac{dG^*}{1-G^*} \\ &+ \\ &\int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2+(10)^2}}\right)} \frac{dG^*}{1+G^*} \end{aligned} \right. \quad (5.16)$$

$$(-10) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2+(10)^2}}\right)} \left[ \frac{2}{1-(G^*)^2} \right] dG^* = \ln \left| \left( \frac{1}{1-(G^*)^2} \right)^{10} \right|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2+(10)^2}}\right)} = \left\{ \ln \left| \left( \frac{1}{1-\left(\left(\frac{10}{\sqrt{(63)^2+(10)^2}}\right)^2\right)^{10}} \right) \right| \right. \quad (5.17)$$

### 5.3. Parametrización del Arco de Curvatura de la cuerda $\widehat{\text{OB}}$

consideremos que, existe un parámetro, denominado  $t^*$ . Por lo tanto, el arco de curvatura parametrizada para el arco de la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ , corresponde:

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) = \int_0^{t^*} \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} du \quad (5.18)$$

El desarrollo de esta integral definida según el parámetro  $t^*$ , como uno de los valores extremos del intervalo que define a la integral que describe al arco de la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ . Según el desarrollo de esta integral, podemos decir que:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) &= \int_0^{t^*} \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} du \\ &= \int_0^{t^*} \sqrt{1 + \left(\frac{20}{u+20}\right)^2} du \\ &= \int_0^{t^*} \sqrt{\frac{(u+20)^2 + (20)^2}{(u+20)^2}} du \\ \mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) &= \int_0^{t^*} \frac{\sqrt{(u+20)^2 + (20)^2}}{(u+20)} du \end{aligned}$$

Realizando un cambio de variables, en la cual, este cambio de variables es de naturaleza trigonométrica, cuyo ángulo es denominado  $\theta^*$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \tan(\theta^*) &= \frac{u+20}{20} \quad \Leftrightarrow \quad \theta^* = \arctan\left(\frac{u+20}{20}\right) \\ du &= 20 \sec^2(\theta^*) d\theta^* \quad \sqrt{(u+20)^2 + (20)^2} = 20 \sec(\theta^*) \end{aligned}$$

Según este cambio de variables, el valor de esta integral definida, la cual, corresponde al valor parametrizado de la longitud del arco de la curvatura de la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ , equivale:

$$\text{Si: } u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta^* = \arctan\left(\frac{0+20}{20}\right) \\ \theta^* = \arctan(1) \end{cases}$$

$$\text{Si: } u = t^* \Leftrightarrow \theta^* = \arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)$$

Reemplazando los valores extremales del intervalo acotado, según el cambio de variables, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) &= \int_0^{t^*} \frac{\sqrt{(u+20)^2 + (20)^2}}{(u+20)} du = 20 \int_{\arctan(1)}^{\arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)} \left[ \frac{\sec^3(\theta^*)}{\tan(\theta^*)} \right] d\theta^* \\ &= 20 \int_{\arctan(1)}^{\arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)} \left[ \frac{1}{\cos^2(\theta^*) \sin(\theta^*)} \right] d\theta^* \\ &= 20 \int_{\arctan(1)}^{\arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)} \left[ \frac{\sin(\theta^*)}{\cos^2(\theta^*) \sin^2(\theta^*)} \right] d\theta^* \\ &= 20 \int_{\arctan(1)}^{\arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)} \left[ \frac{\sin(\theta^*)}{\cos^2(\theta^*) [1 - \cos^2(\theta^*)]} \right] d\theta^* \end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión correspondiente a la longitud de curvatura para el arco para la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$ , se tiene:

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) = 20 \int_{\arctan(1)}^{\arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)} \left[ \frac{\sin(\theta^*)}{\cos^2(\theta^*) [1 - \cos^2(\theta^*)]} \right] d\theta^* \quad (5.19)$$

Realizando un nuevo cambio de variables, para la expresión de la ecuación anterior, donde esta corresponde:

$$\cos(\theta^*) = \mathcal{N}^* \Leftrightarrow \theta^* = \arccos[\mathcal{N}^*]$$

$$d\mathcal{N}^* = (-1) \sin(\theta^*) d\theta^*$$

Según este cambio de variable, los valores del intervalo que define a la integral definida, bajo el cambio de variable anterior (ecuación ), siendo estos puntos extremales del intervalo. Dichos valores, corresponden:

Se debe tener presente una identidad trigonométrica, la cual, la resultante equivalente, se deduce para casos generales. Lo cual, utilizaremos una variable arbitraria  $\kappa^*$ , la cual será el ángulo variable para la deducción de la resultante de la identidad trigonométrica tal. Entonces:

$$\cos [\arctan (\kappa^*)] \quad : \quad \text{Sí:} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \arctan (\kappa^*) & = & \omega^* \\ & \Leftrightarrow & \\ \tan (\omega^*) & = & \kappa^* \end{array} \right.$$

Utilizando la identidad fundamental de la trigonometría, podemos decir que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sin^2 (\omega^*) + \cos^2 (\omega^*) & = & 1 \quad \left| \left( \frac{1}{\cos(\omega^*)} \right)^2 \right. \\ \left( \frac{\sin(\omega^*)}{\cos(\omega^*)} \right)^1 + 1 & = & \left( \frac{1}{\cos(\omega^*)} \right)^2 \quad \left| \sqrt{\phantom{x}} \right. \\ \sqrt{\tan^2 (\omega^*) + 1} & = & \frac{1}{\cos(\omega^*)} \quad \left| ()^{-1} \right. \\ \frac{1}{\sqrt{\tan^2 (\omega^*) + 1}} & = & \cos (\omega^*) \end{array} \right.$$

Reescribiendo la resultante de este desarrollo, tenemos:

$$\cos (\omega^*) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\tan^2 (\omega^*) + 1}} \quad (5.20)$$

Según las relaciones que se describen anteriormente, tenemos el valor resultante equivalente de esta identidad trigonométrica, la cual corresponde:

$$\cos (\omega^*) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\tan^2 (\omega^*) + 1}} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \tan (\omega^*) & = & \kappa^* \\ & \Leftrightarrow & \\ \omega^* & = & \arctan (\kappa^*) \end{array} \right.$$

De esta manera, concluimos que:

$$\cos [\arctan (\kappa^*)] = \frac{1}{\sqrt{(\kappa^*)^2+1}} \quad (5.21)$$

Utilizando esta última expresión, para describir de manera analítica los valores extremales del intervalo que define a la integral definida bajo el nuevo cambio de variables. Dichos valores corresponderían:

$$\text{Si: } \theta^* = \arctan \left( \frac{t^*+20}{20} \right) \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{N}^* = \cos \left[ \arctan \left( \frac{t^*+20}{20} \right) \right] \\ \\ = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{t^*+20}{20} \right)^2+1}} \\ \\ \mathcal{N}^* = \frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}} \end{cases}$$

$$\text{Si: } \theta^* = \arctan(1) \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{N}^* = \cos [\arctan(1)] \\ \\ = \frac{1}{\sqrt{1+1}} \\ \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \mathcal{N}^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

En consecuencia a este cambio de variables que se describe anteriormente, la expresión parametrizada para la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\widehat{\text{OB}}$  en el plano  $\wp(u, v)$ , cuya expresión resultante corresponde:

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{t^*} \frac{\sqrt{(u+20)^2 + (20)^2}}{u+20} du \\ \\ = \\ 20 \int_{\arctan(1)}^{\arctan\left(\frac{t^*+20}{20}\right)} \left[ \frac{1}{\cos^2(\theta^* \sin(\theta^*))} \right] d\theta^* \\ \\ = \\ (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \left\{ \frac{1}{(\mathcal{N}^*)^2 [1 - (\mathcal{N}^*)^2]} \right\} d\mathcal{N}^* \end{array} \right. \quad (5.22)$$

La longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*)$ , cuya resultante es expresada mediante un segundo cambio de variables. Como se menciona, esta es equivalente:

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) = (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \left\{ \frac{1}{(\mathcal{N}^*)^2 [1 - (\mathcal{N}^*)^2]} \right\} d\mathcal{N}^* \quad (5.23)$$

En consecuencia, el desarrollo de esta integral definida, corresponde:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) &= (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \left\{ \frac{1}{(\mathcal{N}^*)^2 [1 - (\mathcal{N}^*)^2]} \right\} d\mathcal{N}^* \\ &= (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \left\{ \frac{1}{(\mathcal{N}^*)^2} + \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} \right\} d\mathcal{N}^* \\ &= (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \frac{1}{(\mathcal{N}^*)^2} d\mathcal{N}^* + (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} d\mathcal{N}^* \\ &= \left[ \frac{20}{\mathcal{N}^*} \right]_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} + (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2 + (20)^2}}\right)} \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} d\mathcal{N}^* \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}(t^*) = \left[ \sqrt{(t^* + 20)^2 + (20)^2} - 5\sqrt{2} \right] + (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^* + 20)^2 + (20)^2}}\right)} \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} d\mathcal{N}^* \quad (5.24)$$

Como se observa en la expresión anterior, el segundo término de esta, correspondiente a la parametrización de la longitud de curvatura para el arco de la cuerda  $\wp(u, v)$ . Este término, se puede desarollar de manera independiente, utilizando el hecho que, de poder facilitar el proceso de desarrollo para encontrar una resultante equivalente analítica, se hace posible, realizar el desarrollo mediante una integral indefinida. Lo cual, la resultante de esta integral indefinida, y aplicando la regla de Barrow; podemos encontrar el mismo valor resultante para dicho término

De modo que este término, se denomina mediante la simbología equivalente  $\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}^{**}$ . Por lo tanto, el desarrollo el desarrollo analítico para este término, como se describe anteriormente, la resultante analítica equivale:

$$\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}^{**}(t^*) = (-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^* + 20)^2 + (20)^2}}\right)} \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} d\mathcal{N}^* \quad (5.25)$$

Como lo mencionabamos anteriormente, la expresión resultante de  $\mathcal{S}_{\widehat{\text{OB}}}^{**}(t^*)$ , visto como una integral indefinida, equivale:

$$(-20) \int \left[ \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} \right] d\mathcal{N}^* \quad (5.26)$$

Cuya metodología de desarrollo se detalla a continuación. Es necesario, para determinar una resultante equivalente de modo analítico, mediante una sustitución trigonométrica. Por lo tanto, el ángulo trigonométrico en cuestión se denomina mediante  $\varphi^*$ .

Según esto, podemos señalar que, dicho cambio de variable, corresponderá en este caso:



$$\mathcal{N}^* = \sin(\varphi^*) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^* = \arcsin(\mathcal{N}^*)$$

$$d\mathcal{N}^* = \cos(\varphi^*) d\varphi^*$$

$$\sqrt{1 - (\mathcal{N}^*)^2} = \cos(\varphi^*) \quad \Rightarrow \quad 1 - (\mathcal{N}^*)^2 = \cos^2(\varphi^*)$$

Según las condicionantes descritas para el cambio de variables en la integral indefinida; esta integral, adquiere una estructura equivalente:

$$\begin{aligned} (-20) \int \left[ \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} \right] d\mathcal{N}^* &= (-20) \int \left[ \frac{\cos(\varphi^*)}{\cos^2(\varphi^*)} \right] d\varphi^* \\ &= (-20) \int \left[ \frac{1}{\cos(\varphi^*)} \right] d\varphi^* \\ &= (-20) \int \left[ \frac{1 - \sin(\varphi^*) + \sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \right] d\varphi^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-20) \int \left[ \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} \right] d\mathcal{N}^* &= (-20) \int \left[ \frac{1 - \sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \right] d\varphi^* + (-20) \int \left[ \frac{\sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \right] d\varphi^* \\
&= (-20) \int \left[ \frac{1 - \sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \right] d\varphi^* + [(20)] \ln |\cos(\varphi^*)| \\
&= (-20) \int \left[ \frac{[1 - \sin(\varphi^*)] [1 + \sin(\varphi^*)]}{\cos(\varphi^*) [1 + \sin(\varphi^*)]} \right] d\varphi^* + [(20)(-1)] \ln \left| \left( \frac{1}{\cos(\varphi^*)} \right) \right| \\
&= (-20) \int \left[ \frac{1 - \sin^2(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*) [1 + \sin(\varphi^*)]} \right] d\varphi^* + (-1) \ln \left| \left( \frac{1}{\cos(\varphi^*)} \right)^{(20)} \right| \\
&= (-20) \int \left[ \frac{\cos^2(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*) [1 + \sin(\varphi^*)]} \right] d\varphi^* + (-1) \ln \left| \left( \frac{1}{\cos(\varphi^*)} \right)^{(20)} \right| \\
&= [(-1)(20)] \int \left[ \frac{\cos(\varphi^*)}{1 + \sin(\varphi^*)} \right] d\varphi^* + (-1) \ln \left| \left( \frac{1}{\cos(\varphi^*)} \right)^{(20)} \right| \\
&= (-1) \ln \left| [1 + \sin(\varphi^*)]^{(20)} \right| + (-1) \ln \left| \left( \frac{1}{\cos(\varphi^*)} \right)^{(20)} \right| \\
(-20) \int \left[ \frac{1}{1 - (\mathcal{N}^*)^2} \right] d\mathcal{N}^* &= (-1) \ln \left| \left( \frac{1 + \sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \right)^{(20)} \right|
\end{aligned}$$

Finalmente, el valor de la resultante para el ségundo término de la resultante de la longitud de curvatura del arco de la cuerda, la cual, ha sido denominado en esta ocasión mediante  $\mathcal{S}_{\text{OB}}^{**}(t^*)$ . Aplicando la regla de Barrow, podemos decir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{OB}}^{**}(t^*) &= \left\{ \begin{aligned}
&(-20) \int_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}}\right)} \left[ \frac{1}{1-(\mathcal{N}^*)^2} \right] d\mathcal{N}^* \\
&= \\
&(-1) \left\{ \ln \left| \left( \frac{1+\sin(\varphi^*)}{\cos(\varphi^*)} \right)^{(20)} \right| \right\} \Big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}}\right)} \\
&= \\
&(-1) \left\{ \ln \left| \left( \frac{1+\mathcal{N}^*}{\sqrt{1-(\mathcal{N}^*)^2}} \right)^{(20)} \right| \right\} \Big|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}^{\left(\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}}\right)} \\
&= \\
&(-1) \left\{ \ln \left| \left( \frac{1+\left[\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}}\right]}{\sqrt{1-\left[\frac{20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}}\right]^2}} \right)^{(20)} \right| \right\} - \left\{ \ln \left| \left( \frac{1+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}{\sqrt{1-\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}} \right)^{(20)} \right| \right\} \\
&= \\
&(-1) \left\{ \ln \left| \left( \frac{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2}+20}{\sqrt{(t^*+20)^2+(20)^2-(20)^2}} \right)^{(20)} \right| - \ln \left| \left( \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^{(20)} \right| \right\}
\end{aligned} \right. \tag{5.27}
\end{aligned}$$



## Capítulo 6

# Teoría Sobre Elementos Estadísticos y Probabilísticos

### 6.1. Descripción General.

### 6.2. Variable Aleatoria Discretas.

En base de una función de probabilidad, formulado de manera axiomática sobre un espacio muestral con un número finito de elementos, los cuales cada uno tiene la misma probabilidad.

#### Definición:

Se dice que, una variable aleatoria discreta unidimensional, denominada  $x^*$ . Si esta variable aleatoria toma un número finito o infinito de valores numerables. Al suponer que, la variable  $x^*$ , únicamente tomara los valores  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ , tal que  $n \in \mathbb{N}$ , cuyas probabilidades corresponden a:  $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ . Sea un subconjunto de los puntos  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ , el cual, es llamado  $\mathcal{A}^*$ . Entonces, la probabilidad que existe en el subconjunto  $\mathcal{A}^*$ , siendo ésta denominada  $\mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$ , definiéndose mediante la expresión:

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}^*) = \sum_{\mathcal{A}^*} f(\mathcal{A}^*) \quad (6.1)$$

Según esta expresión, cuya resultante de la probabilidad existente para algún elemento perteneciente al subconjunto denominado  $\mathcal{A}^*$ , es equivalente a la suma total de las probabilidades que representan a los valores de la variable aleatoria, por de las funciones de probabilidades definidas por medio de:  $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ , siendo estas funciones de forma discreta. Por lo tanto, la probabilidad para todos los elemento perteneciente al subconjunto  $\mathcal{A}^*$ , cuyos **elementos de la variable aleatoria**, se pueden discretizar por medio de la expresión:  $x_i^*$ ; tal que,  $i = 1, \dots, n : n \in \mathbb{N}$ .

Naturalmente, para una situación experimental, la función de probabilidad  $f(x^*)$ , se puede asumir de forma que, esta es ajustable para poder considerar para cualquier problema particular. De esta manera, podemos llamar a la función de probabilidades  $f(x^*)$ , como una **función de densidad para una variable discreta**, o también como una **función de cuantía**. Además, podemos señalar que, la variable aleatoria discreta  $x_i^*$  puede distribuir la función de densidad  $f(x_i^*)$ ; para el caso inverso, la función de densidad  $f(x_i^*)$  distribuye a la variable aleatoria discreta  $x_i^*$ .

Por otro lado, cualquier función de densidad, cuya variable es discreta por media de la variable aleatoria  $x_i^*$ , en una muestra de elementos, o conjunto de elementos definidos, cuya **variable aleatoria discretizada**, es denominada por medio de  $x_i^*$ , lo cual, dicha función corresponde:  $f(x_i^*)$ . La función de densidad, puede satisfacer la condición:

$$\begin{aligned} f(x_i^*) &\geq 0 & \forall i &= 1, \dots, n \in \mathbb{N} \\ \sum_{(x_i^*)} f(x_i^*) &= 1 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Al suponer que, en un experimento aleatorio, se lanzan cuatro monedas, cuya forma de las monedas es simétrica, y registrando en cada lanzamiento el número de caras. Además, sea el resultado el valor de una variable aleator  $x^*$ . Por ende, los valores que, puede tomar la variable aleatoria  $x^*$ , en este caso, equivalen a: 0, 1, 2, 3, 4. Para determinar la función de densidad  $f(x^*)$ , cuya probabilidad para la variable aleatoria, la cual, aparezcan  $x^*$  cantidad de caras. Podemos observar que, el número de

maneras en que pueden caer las cuatro monedas descritas, corresponde al número equivalente  $2^4 = 16$ ; esto debido a que, cada una de ellas puede caer de dos maneras distintas. El número de formas en que puede aparecer la  $x^*$  cantidad de caras, es equivalente a:  $\binom{4}{x^*}$ . Por lo tanto, introduciendo el valor correspondiente al número de caras que se describe anteriormente en la función de densidad  $f(x^*)$ , podemos decir de esta:

$$f(x^*) = \frac{\binom{4}{x^*}}{2^4} \quad \forall \quad x_i^* \Leftrightarrow i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (6.3)$$

Luego, debido a que, la probabilidad sobre la muestra que se ejemplifica  $\mathcal{P}(x_i^*)$ , es equivalente:

$$\sum_{x^*=0}^4 f(x^*) = \left(\frac{1}{16}\right) \sum_{x^*=0}^4 \binom{4}{x^*} \quad (6.4)$$

Cuyo desarrollo, en este caso, para determinar un valor equivalente a la probabilidad discreta correspondía:

$$\begin{aligned} \sum_{x^*=0}^4 f(x^*) &= \left(\frac{1}{2^4}\right) \sum_{x^*=0}^4 \binom{4}{x^*} \\ \sum_{x^*=0}^4 f(x^*) &= \left(\frac{1}{16}\right) \sum_{x^*=0}^4 \left[ \frac{4!}{(4-x^*)! \cdot x^*!} \right] \\ \sum_{x^*=0}^4 f(x^*) &= \left(\frac{1}{16}\right) \left[ \left(\frac{4!}{(4-0)!0!}\right) + \left(\frac{4!}{(4-1)!1!}\right) + \left(\frac{4!}{(4-2)!2!}\right) + \left(\frac{4!}{(4-3)!3!}\right) + \left(\frac{4!}{(4-4)!4!}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\sum_{x^*=0}^4 f(x^*) = \left(\frac{1}{16}\right) \left[ \binom{4!}{4!} + \binom{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} + \binom{2! \cdot 6 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} + \binom{4 \cdot 3!}{1! 3!} + \binom{4!}{4!} \right]$$

$$\sum_{x^*=0}^4 f(x^*) = \left(\frac{1}{16}\right) [1 + 4 + 6 + 4 + 1]$$

$$\sum_{x^*=0}^4 f(x^*) = 1$$

Si la función de densidad, siempre es positiva  $f(x^*) \in \mathbb{N}_0$ , cuyo intervalo para la variable aleatoria  $x^*$  equivalente a la muestra; para este caso, correspondería  $[0, 4] \in \mathbb{N}_0$ .

Dado que, para los posibles **valores del dominio** de la variable aleatoria  $x^*$ , para lo cual, al introducir este concepto de dominio, esto quiere decir que, correspondería a **la muestra dada**, representando así, a la variable aleatoria  $x^*$ .

Por otra parte, los valores posibles de la variable aleatoria  $x^*$ , pueden determinar la función de densidad  $f(x^*)$ , y representar mediante una gráfica utilizando barras verticales, cuya longitud debe ser equivalente al valor representativo en la función de densidad sobre la muestra  $f(x^*)$ .

Se debe considerar en la gráfica de la función de densidad sobre la muestra  $f(x^*)$ , las frecuencias relativas que representan a cada uno de los valores de la variable aleatoria sobre la muestra  $x^*$ . De esta manera, podemos suponer que, lanzar un gran número de veces las cuatro monedas mencionadas, se esperaría que, aproximadamente en una cantidad de  $\left(\frac{1}{16}\right)$  lanzamientos, se esperaría que no apareciera caras, esto indicaría que, el valor de la variable aleatoria es cero  $x^* = 0$ . En el caso que, apareciera en algún lanzamiento de las monedas, al menos una cara, lo cual, la variable aleatoria sobre la muestra equivaldría  $x^* = 1$ . Lo que, representaría de forma sucesiva, la cuarta parte de los lanzamientos de la moneda.

Gráfica de la función de densidad

### 6.3. Variable Aleatoria Continua.

La característica principal de una variable aleatoria continua, cuya característica principal corresponde a, que dicha variable recoge cualquier valor de un intervalo dado, representando este intervalo a



una muestra de datos. Lo cual, se denomina a la variable aleatoria continua sobre la muestra de datos mediante  $x^*$ .

Mediante un plano, denominado  $\wp(x^*, y^*) \subseteq \mathbb{R}^2$ , podemos representar a la función de densidad  $f(x^*)$ ; dónde, la variable aleatoria continua, sobre el intervalo que define a dicha función, correspondiente a la muestra, denominada mediante  $x^*$ . Siendo esta variable aleatoria continua, definida mediante una **desviación horizontal**. Además, podemos decir que, la variable aleatoria, puede asignarse un número infinito no numereble de valores en dicho intervalo sobre la muestra.

La diferencia existente entre, las variables aleatoria discreta y continua, esradica en que la variable aleatoria discreta puede tomarun número finito o infinito de valores numerables. Miestras tanto, una variable aleatoria continua, asume un número un núro infinito de valores no numerables.

### 6.3.1. Variables Aleatoria Continuas.

Para el caso de las variantes discretas, existe la posibilidad de asociar una probabilidad finita a cada punto del recorrido, aunque el número de puntos infinitos .

## 6.4. Teoría Sobre Valores Esperados.

El valor esperado de una variable aleatoria  $x^*$ , equivalente para, una función cuya variable es aleatoria, siendo esta función  $f(x^*)$ . El valor correspondiente, se obtiene determinando el valor medio de la función para todos los valores posibles de dicha variable aleatoria  $x^*$ . Al estudiar concretamente, al lanzar tres monedas, en la distribucion en el número de caras que se obtienen, equivalen a una distribución binomial.

$$f(x^+) = 6 \binom{n}{x^*} (p^*)^n = \left( \frac{n!}{(n-x^*)x^*!} \right) (p^*)^n$$

$$\forall x^* \wedge n \in \mathbb{N}$$
(6.5)

$$f(x^*) = 6 \left( \frac{1}{2} \right)^3 \binom{3}{x^*} \quad \forall x^* = 0, 1, 2, 3$$

Para un valor determinado, como es el caso de  $x^* = 2$ , considerando el valor de la función de distribución  $f(2)$ , siendo este equivalente:

$$f(x^*) : \begin{cases} x^* = 2 \\ n = 3 \\ p^* = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x^*) = \binom{n}{p^*} (p^*)^n \\ f(2) = \binom{3}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \\ = \left(\frac{3!}{(3-2)!2!}\right) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \\ = (3) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \\ f(2) = \frac{3}{8} \end{cases}$$

En este caso, la frecuencia es relativa, en la cual, aparecerán siempre dos caras sobre un inmenso número de lanzamientos.

El valor esperado, corresponde a una **media ideal**, lo cual, indica que la esperanza efectiva para la variable aleatoria  $x^*$ , es equivalente al valor esperado para un lanzamiento de la moneda. Al ejemplificar lo mencionado anteriormente, es imposible. Cabe decir que, el valor medio de la variable de densidad para la muestra  $x^*$ , para un gran número de lanzamientos de la moneda, pueda alcanzar al valor esperado, representado por medio de la variable aleatoria de densidad  $x^*$ .

### Definición:

Sea una variable aleatoria de densidad, representada por medio de  $x^*$ , en una función de densidad tal  $f(x^*)$ . El valor esperado para la variable  $x^*$ , denominada por medio de  $\mathcal{E}(x^*)$ , resulta expresarse:

$$\mathcal{E}(x^*) = \sum_{i=1}^{x^*} x^* f(x^*) \quad (6.6)$$

Cuando la variable de densidad aleatoria sobre la muestra  $x^*$ , sea discreta. Pero, cuando la variable de densidad aleatoria  $x^*$  es continua; el valor esperado, resulta ser equivalente a la expresión:

$$\mathcal{E}(x^*) = \int_{-\infty}^{\infty} x^* f(x^*) dx^* \quad (6.7)$$

Al definir las expresiones que se describen anteriormente, para expresar el el valor esparado sobre una variable aleatoria en la muestra, siendo esta, discreta como continua. Se debe considerar que, en el caso de la expresión continua para la resultante del valor esperado sobre la muestra  $\mathcal{E}(x^*)$ , ésta debe tener un valor convergente. Por ende, la resulatnte para la expresión del valor esperado sobre la muestra de manera continua  $\mathcal{E}(x^*)$ , cuyo valor, al no existir un valor convergente resultante; por lo tanto, no existiría un valor esperado.

### Teorema:

Sea una variable de densidad, denominada por medio de  $x^*$ , para una función de densidad sobre la muestra  $f(x^*)$ . El valor esperado para una función, denominada  $u$ , cuya variable aleatoria equivale  $x^*$ . Por lo tanto, el valor esperado para la función  $u(x^*)$ , corresponde a la expresión:

$$\mathcal{E}[u(x^*)] = \sum_{i=1}^{x^*} u(x^*) f(x^*) \quad (6.8)$$

Esta expresión corresponde para casos discretos. Para el caso que, la variable aleatoria sobre la muestra  $x^*$  sea continua, el valor esperado resultante, corresponde a la expresión:

$$\mathcal{E}[u(x^*)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x^*) f(x^*) dx^* \quad (6.9)$$

Podemos observar que, las expresiones anteriores que describe al valor esperado de una función  $u(x^*)$ , siempre estas deben tener un valor convergente. Esta obsrevarción debe realizarse en todos los valores esperados, para una variable aleatoria  $x^*$ .

**Definición:**

Sea un conjunto de variables  $k$ - dimensionales aleatorias, denominadas mediante  $(x_1^*, \dots, x_k^*)$ , cuya función de densidad correspondería, para este caso  $f(x_1^*, \dots, x_k^*)$ . El valor esperado, para la variable aleatoria, denominada  $x_i$ , tal que:  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ . La expresión resultante, es denotada mediante  $\mathcal{E}(x_i^*)$ , y se encuentra definida por medio de:

$$\mathcal{E}(x_i^*) = \sum_{x_1^*} \sum_{x_2^*} \cdots \sum_{x_k^*} x_i^* f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \quad (6.10)$$

Esta expresión corresponde a la variable aleatoria  $x_i^*$ , cuando esta es discreta. En el caso de, determinar el valor esperado para un conjunto de variables  $k$ -dimensional, siendo estas variables aleatorias  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$  de este conjunto , cariables continuas. El valor esperado resultante, para este caso equivale:

$$\mathcal{E}(x_i^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^* f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) dx_1^* dx_2^* \dots dx_k^* \quad (6.11)$$

Para determinar el valor esperado, para una función de variables aleatorias, es necesario citar el siguiente teorema:

**Teorema:**

Sea un conjunto de variables aleatorias, lo cual, este conjunto es de dimensión  $k$ -dimensional, cuya función de densidad corresponde  $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ . Por lo tanto, el valor esperadode una función  $\mathfrak{U}(x^*)$ , lo cual, la variable aleatoria corresponde  $x^*$ . La expresión resultante, para determinar el valor esperado, en este caso equivale:

$$\mathcal{E}[\mathfrak{U}(x^*)] = \sum_{x_1^*} \cdot \sum_{x_2^*} \cdots \sum_{x_k^*} \mathfrak{U}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \cdot f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \quad (6.12)$$

Esta expresión corresponde, siempre que la variable aleatoria sobre la muestra  $x_i^*$  sea discreta. Para los caso, donde la variable aleatoria sobre la muestra  $x_i^*$  es continua; el valor esperado para la función sobre el conjunto de variables  $k$ -dimensional, cuya función es denominada mediante  $\mathbf{u}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ ; también, se conoce que, la función de densidad sobre el conjunto de variables  $k$ -dimensional, corresponde  $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ . por ende, la expresión equivalente, para los casos donde el conjuntos de variables  $k$ - dimensionales, corresponde:

$$\mathcal{E}[\mathbf{u}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) dx_1^* dx_2^* \dots dx_k^* \quad (6.13)$$

### Teorema:

Sea una variable aleatoria, denominada por  $x^*$ , cuya función de densidad correspondiente  $f(x^*)$ . Además, se tiene una constante, la cual, es denominada  $\mathfrak{k}^* \in \mathbb{N}$ . El valor esperado, es equivalente:

$$\mathcal{E}(\mathfrak{k}^*) = \mathfrak{k}^* \quad (6.14)$$

### Teorema:

Sea una variable aleatoria  $x^*$ , cuya función de densidad  $f(x^*)$ . Además, existe una constante  $\mathfrak{k}^* \ni \mathbb{N}$ . El valor esperado sobre la muestra, es equivalente:

$$\mathcal{E}[\mathfrak{k}^* \mathbf{u}(x^*)] = \mathfrak{k}^* \mathcal{E}[\mathbf{u}(x^*)] \quad (6.15)$$

### Teorema:

Sea una variable aleatoria, la cual, es denominada  $x^*$ , cuya función de densidad  $f(x^*)$ . El valor esperado, para la suma de dos funciones, cuya variables es equivalente para ambas  $x^*$ . Además, existe una función, denominada  $u(x^*)$ , es posible aplicar el principio de la linealidad en este caso. Por lo tanto, la expresión resultante equivale:

$$\mathcal{E}[u(x^*) + v(x^*)] = \mathcal{E}[u(x^*)] + \mathcal{E}[v(x^*)] \quad (6.16)$$

### 6.5. Momentos:

La función de momento, para una distribución correspondiente a los valores esperados sobre una muestra, la cual, la variable aleatoria corresponde  $x^*$  se encuentra elevada a una potencia  $p^*$ -ésima que tienen esta distribución, cuya función de densidad en este caso corresponde  $f(x^*)$ . El momento  $r$ -ésimo, para la variable aleatoria  $x^*$ , se designa mediante  $\mu'_{p^*}$ , cuya expresión corresponde:

$$\mu'_{p^*} = \mathcal{E}(x^{*p^*}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{*p^*} f(x^*) dx^* \quad (6.17)$$

Para el caso, correspondiente al primer momento, denominado mediante  $\mu'_1$ , corresponde a la media de la variable aleatoria  $x^*$ . Respecto a cualquiera de los puntos arbitrarios, los momento se encuentran definidos mediante la expresión:

$$\mathcal{E}[(x^* - a^*)^{p^*}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^* - a^*)^{p^*} f(x^*) dx^* \quad (6.18)$$

Al igualar el valor de  $a^*$  al valor correspondiente a la media, podemos obtener los momentos respectivos a la media, usualmente estos se encuentran denominados:

$$\mu_{\mathfrak{p}^*} = \mathcal{E} \left[ (x^* - a^*)^{\mathfrak{p}^*} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^* - a^*)^{\mathfrak{p}^*} f(x^*) dx^* \quad (6.19)$$

Realizando una igualdad, entre los valores equivalentes de  $a^*$  y la media; podemos obtener los momentos con respecto a esta media, expresada mediante  $\mu'_1$ . Por lo cual, este momento, es denominado por medio de:  $\mu_{\mathfrak{p}^*}$ . Entonces, en este caso, la expresión según estas condiciones, correspondería:

$$\mu_{\mathfrak{p}^*} = \mathcal{E} \left[ (x^* - \mu'_1)^{\mathfrak{p}^*} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^* - \mu'_1)^{\mathfrak{p}^*} f(x^*) dx^* \quad (6.20)$$

## 6.6. Distribuciones Muestrales.

Supongamos que existe una variante, cuya denominación es denotada mediante  $x^*$ , cuya distribución correspondiente, es equivalente  $f(x^*)$ , la cual, determina una cierta población. Si suponemos que, al extraer aleatoriamente sobre la muestra, dos valores de esta, expresados mediante un par ordenado, cuyas componentes equivalen a:  $x_a^*$  y  $x_b^*$ , de la variante  $x$ . Este par ordenado expresado  $(x_a^*, x_b^*)$ , determina un punto en el plano; y la población de todos los posibles pares ordenados, cuyas componentes numéricas pueden obtenerse, y forman una población bibariante. El interés se centra, en el conocer la distribución de la población bibariante, cuya base corresponde a la distribución original, expresada mediante una función  $f(x^*)$ .

De manera conjunta, la función de densidad, para los valores componentes del par ordenado equivalente a:  $x_a^*$  y  $x_b^*$ , deberá corresponder a una cierta función caracterizada mediante  $g(x_a^*, x_b^*)$ ; tal que, se encuentran puntos intermedios, dentro de un dominio acotado; el cual, se describe:

$$\mathcal{D}^* : \begin{cases} (\nu_1^*, \nu_2^*) \times (\xi_1^*, \xi_2^*) \\ \forall (x_a^*, x_b^*) \subset \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (6.21)$$

Existe una probabilidad asociada a las variables  $x_a^*$  y  $x_b^*$ , definida para el dominio  $\mathcal{D}^*$ . Por lo tanto, esta probabilidad, la podemos expresar mediante:

$$\mathcal{P}(x_a^*, x_b^*) = \int_{\nu_1^*}^{\nu_2^*} \int_{\xi_1^*}^{\xi_2^*} g(x_a^*, x_b^*) dx_b^* dx_a^* \quad (6.22)$$

En otras palabras, al decir de una muestra aleatoria, podemos entender que, el valor de la primera observación de datos de la muestra, ésta no tiene efecto alguno sobre la segunda observación de datos de la muestra; lo cual, podemos decir de esto, que para una muestra aleatoria de datos, los valores de  $x_a^*$  y  $x_b^*$ , en sentido probabilístico, éstos son valores independientes. Cuando las dos variantes son independientes entre sí, en la distribución bivalente, cuyo sentido sería netamente probabilístico. Además, como hemos visto, la distribución conjunta, corresponde al producto de las distribuciones marginales. Ejemplificando



este hecho, las distrubuciones marginales,de modo independiente, las podemos expresar mediante  $f(x_a^*)$  y  $f(x_b^*)$ , a través de la definición de aleatoriedad, podemos decir:

$$g(x_a^*, x_b^*) = f(x_a^*) f(x_b^*) \quad (6.23)$$

Por lo tanto, según esto, podemos afirmar que se cumple la siguiente condición:

$$\mathcal{P}(\nu_1^* < x_a^* < \nu_2^*, \xi_1^* < x_b^* < \xi_2^*) = \mathcal{P}(\nu_1^* < x_a^* < \nu_2^*) \mathcal{P}(\xi_1^* < x_b^* < \xi_2^*) \quad (6.24)$$

Esto se cumple, para todo los valores  $\nu_i^*$  y  $\xi_i^*$ ; tal que:  $i = 1, 2$ .

Un sencillo ejemplo corresponde, al suponer que, la variante muestral que se describe, equivale a  $x^*$ , ésta solamente toma dos valores, siendo estos valores: 0, 1, cuyas probabilidades respectivas, son descritas por medio de  $p^*$  y  $q^*$ . Esto nos indica que, la variante  $x^*$  es una variante discreta, cuya distribución binomial la expresaremos mediante:

$$f(x^*) = \binom{1}{x^*} \cdot (p^*)^{x^*} (q^*)^{1-x^*} \quad \forall x^* = 0, 1 \quad (6.25)$$

Puesto que, el valor de:

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

De este modo, escribiremos en base a la ecuación de la función  $f(x^*)$ . Entonces, podemos decir:

$$f(x^*) = (p^*)^{x^*} (q^*)^{1-x^*} \quad (6.26)$$

La función de densidad conjunta sobre una muestra de dos valores de la variante  $x^*$ , cuyo análisis nos arroja, una resultante tal, como se describe a continuación:

Se tiene la funciones  $f(x_a^*)$  y  $f(x_b^*)$ , cuyos valores corresponden:

$$f(x^*) : \begin{cases} f(x_a^*) = (p^*)^{(x_a^*)} (q^*)^{(1-(x_b^*))} \\ f(x_b^*) = (p^*)^{(x_a^*)} (q^*)^{(1-(x_b^*))} \end{cases} \quad (6.27)$$

Entonces:

$$g(x_a^*, x_b^*) = f(x_a^*) f(x_b^*)$$

$$g(x_a^*, x_b^*) = \left[ (p^*)^{(x_a^*)} (q^*)^{(1-(x_a^*))} \right] \left[ (p^*)^{(x_a^*)} (q^*)^{(1-(x_b^*))} \right]$$

$$g(x_a^*, x_b^*) = [P^*]^{(x_a^*+x_b^*)} [q^*]^{[(1-(x_a^*))+(1-(x_b^*))]}$$

Deeste modo, obtenemos:

$$g(x_a^*, x_b^*) = (p^*)^{(x_a^*+x_b^*)} (q^*)^{(2-(x_a^*+x_b^*))} \quad \forall \quad x_a^* = x_b^* = 0, 1 \quad (6.28)$$

Según esto, la función de densidad de una muestra para dos valores  $g(x_a^*, x_b^*)$ , se encuentra definida para los puntos tales:  $(0,0); (1,0); (0,1); (1,1)$ , en el plano  $\wp(x_a^*, x_b^*) \subseteq \mathbb{R}^2$ . También es necesario observar que, en la función de densidad para la muestra  $g(x_a^*, x_b^*)$ , no es igual a la función, la cual, se habrían obtenido extrayendo dos elemento de la población binomial, en la cual, existe una variable en la función  $y^*$ , que correspondiente al número de acierto. En este caso, la función de densidad sobre la muestra, equivale:

$$h(y^*) = \binom{2}{y^*} (p^*)^{y^*} (q^*)^{2-(y^*)} \quad \forall \quad y^* = 0, 1, 2 \quad (6.29)$$

Lo cual, esta ecuación difiere a la función de densidad sobre la muestra resultante  $g(x_a^*, x_b^*)$ . Esto se debe, a la función de densidad sobre la muestra de una sola variante  $h(y^*)$ , equivalente a la suma de las variantes  $x_a^*$  y  $x_b^*$ , cuya resultante equivale a la a la distribución conjunta para las variables aleatorias, lo cual, corresponden  $x_a^*$  y  $x_b^*$ .

Además, se debe observar que, la función de densidad resultante sobre la muestra  $g(x_a^*, x_b^*)$ , proporciona una distribución sobre la muestra en el orden de extracción de datos. Por ende, la función de densidad sobre la muestra  $g(x_a^*, x_b^*)$ , al evaluarla para el par ordenado  $(0, 1)$ , el valor resultante es equivalente  $p^* q^*$ . En referencia de obtener una probabilidad que, primeramente equivale a un valor cero; luego, a un valor equivalente a uno; indica que, generalmente se representa la probabilidad de la primera observación recae en la obtención en el intervalo  $(\nu_1^*, \nu_1^*)$ ; y la segunda observación, recaería sobre el intervalo  $(\nu_2^*, \nu_2^*)$ . Para el caso opuestos, cuyo suceso no satisfacería las condiciones especificadas, exceptuando, el caso en que los dos intervalos sean coincidentes.

Al razonar, de la misma manera, en la que se realizó anteriormente, podemos encontrar que, la distribución conjunta sobre una muestra aleatoria, cuyo tamaño equivale a  $n$  elementos, lo cual, podemos decir que: la cantidad de variantes, para este caso, correspondería  $x_1^*, \dots, x_n^*$ , de una población, en función de distribución  $f(x^*)$ . Por lo tanto, según esto, diremos que:

$$g(x_1^*, \dots, x_n^*) = f(x_1^*) f(x_2^*) \cdots f(x_n^*) \quad (6.30)$$

Consecuentemente, nos vuelve a resultar la función de distribución sobre la muestra para el orden extraído de esta muestra.

Aludiendo, a la noción correspondiente a la definición de muestreo aleatorio, éste es eliminado automáticamente sin sustitución alguna, por una población finita. Ejemplificando este concepto, al extraer dos bolas de una caja, la cual, contiene dos bolas blancas y tres bolas negras; el resultados en la primera extracción de una bola de la caja, afectaría de forma segura, la probabilidad resultante de la segunda extracción de las dos bolas que se encuentra dentro de la misma caja. Estas dos primeras

dos extracciones de bolas de la caja descrita, no implica que estos sean eventos independientes en un sentido probabilístico. En el caso de adoptar otra opinión, con respecto a la definición al muestreo aleatorio, implicaría centrar la atención sobre poblaciones continuas.

## 6.7. Momentos Muestrales.

Para la estadística, uno de los problemas principales corresponde a casos, en la cual, se debe estudiar una población que tiene una distribución denominada, por medio de una función  $f(x^*, \theta^*)$ . En esta función, se conoce su estructura, pero contiene un parámetro desconocido, llamado  $\theta^*$ , por lo cual, si este parámetro, denominado  $\theta^*$  fuese conocido, la función de densidad sobre el espacio muestral, se encontraría totalmente especificada. Por otra parte, el procedimiento corresponde a tomar una muestra aleatoria de tamaño  $n$ ; la cual, a esta muestra, la denominaremos  $x_1^*, \dots, x_n^*$ , para  $n$  distribuciones, con el fin de poder formar una función que podemos denominar  $\mathcal{U}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , cuyo propósito es poder estimar este desconocido parámetro  $\theta^*$ . Principalmente, este problema consiste en estimar de la mejor forma el parámetro mencionado  $\theta^*$  mediante la función de densidad.

### 6.7.1. Momento Estadístico.

Un momento estadístico, corresponde a una función, formada por variables aleatorias observables que no contiene parámetros desconocidos.

Para ejemplificar esta definición, podemos señalar, que la variable aleatoria  $x^*$  contiene a la distribución  $n(x^*, \mu^*, (\sigma^*)^2)$ , donde los valores de  $\mu^*$  y  $(\sigma^*)^2$  son valores desconocidos. El hecho de decir que, mediante las expresiones  $x^* - \mu^*$  y  $\left(\frac{x^*}{\sigma^*}\right)$ , éstas no corresponden a un momento estadístico.

También, se debe señalar que, uno de los problemas fundamentales en la estadística, es determinar los momentos estadísticos, a través de las funciones de variables aleatorias, expresando estas variables, a través  $x_1^*, \dots, x_n^*$ , cuyo método es el más apropiado para poder representar el parámetro no conocido  $\theta^*$ .

### 6.7.2. Momentos Muestrales.

Sea las variables de una muestra aleatoria, denominadas  $x_1^*, \dots, x_n^*$  de la función de distribución  $f(x^*)$ . El momento muestral, para el  $r^*$ -ésimo elemento con respecto a cero, siendo equivalente a cero, corresponde:

$$m_{\tau^*} = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n x_i^{\tau^*} \quad (6.31)$$

Particularmente, asumiendo el valor para  $\tau^* = 1$ , se nos presenta que la media muestral, es equivalente a la media aritmética. Por lo tanto:

En el caso de:

$$\tau^* = 1$$

El momento muestral equivale:

$$m_{\tau^*}^* = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (x_i^*)^{(\tau^*=1)}$$

En este caso, nos resulta que el momento muestral, equivale a

la media aritmética  $\overline{x^*}$ . Por lo tanto:

$$\overline{x^*} = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n x_i^*$$

Asumiendo que, el momento muestral  $\tau^*$ -ésimo de una función de densidad  $f(x^*)$

## 6.8. Regresión Simple.

El análisis sobre una regresión simple, es utilizado principalmente para investigar una forma probable, sobre una relación de las variables que se encuentran involucradas, lo cual, según esto, corresponde a dos variables. Por ende, existe una ecuación que relaciona a estas variables; además, entre los objetivos principales que se tienen se encuentran, el posible hecho de predecir o estimar el valor de una

variable, la cual, corresponde al valor entregado, y otra variable para optimizar o controlar un proceso tal.

Supongamos que existen dos variables, las cuales, son denominadas por medio de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ ; además, se supone que, se intenta explicar el comportamiento de la variable  $\mathcal{Y}$ , cuya base son, los valores generados por la variable  $\mathcal{X}$ . Con el propósito de, poder medir el valor de la variable  $\mathcal{Y}$ , sobre un conjunto de  $n$  valores correspondiente a la variable  $\mathcal{X}$ . Según esto, mediante lo que podemos obtener, son  $n$  parejas de puntos, las cuales, las denominaremos por medio de los pares:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

Para este caso, la variable independiente o la ***variable de regresión***, corresponde a la variable  $\mathcal{X}$ . Por otra parte, la variable dependiente o ***variable de respuesta*** correspondería a la variable  $\mathcal{Y}$ . Sobre la *variable independiente o de regresión*  $\mathcal{X}$ . Esta variable ***no es necesariamente descrita de manera aleatoria***, ya que, en muchas ocasiones, el observador, el cual, realiza un estudio utilizando la *regresión simple*, fija los valores. Por otra parte, la variable dependiente o de respuesta, denominada  $\mathcal{Y}$ , ***corresponde a una variable aleatoria***.

Supongamos que, las variables descritas anteriormente, correspondiente a las variables de la muestra, siendo estas:  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , se encuentran ***relacionadas de manera lineal***. Además, se debe considerar que, para cada valor de la variable independiente o variable de regresión  $\mathcal{X}$ , encontrándose relacionado con algún valor de la variable dependiente o variable de respuesta  $\mathcal{Y}$ . También, al conocer que, ésta variable es una variable aleatoria; por lo consiguiente, podemos decir que, para cada observación de la variable puede independiente  $\mathcal{X}$ , la podemos describir, por medio de una expresión algebraica equivalente. Por lo tanto, podemos decir que, esta expresión corresponde a una ecuación, tal que:

$$\mathcal{Y} = \beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X} + \varepsilon^* \quad (6.32)$$

En esta expresión algebraica, el valor de  $\varepsilon^*$ , corresponde al valor de un error aleatorio, cuya media equivale a cero, y una varianza asociada, denominada  $\sigma^2$ . La ecuación de la expresión anterior, es conocida como un modelo de ***regresión lineal simple***.

Para especificar de manera más objetiva esta ecuación, se dice que, ésta ecuación relaciona las variables involucradas sobre la muestra. Por lo tanto, es necesario estimar mediante dos parámetros expresados en la ecuación anterior, los cuales, tienen una interpretación:  $\beta_0^*$ , corresponde al punto, el cual, la recta corta o intercepta al eje de la variable dependiente o de respuesta  $\mathcal{Y}$ ; además, el valor de

$\beta_1^*$ , corresponde a la pendiente de la recta. Por lo tanto, el valor de  $\beta_1^*$ , **representa a la cantidad de incremento o disminución sobre la variable independiente o de respuesta  $\mathcal{Y}$** , para cada unidad de incremento de la variable independiente o de regresión  $\mathcal{X}$ .

Primero, para poder estudiar la relación entre las variables de la muestra, **es efectuar un diagrama de dispersión**. Éste diagrama consiste en: **representar los pares de valores obtenidos, y en consecuencia, poder representar de manera gráfica**.

Para poder estimar los coeficientes de regresión, los cuales, corresponden:  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ , para lo cual, **es necesario utilizar la información de una muestra, para un tamaño de  $n$  elementos**. En cada observación, podemos formular una ecuación representativa, la cual, corresponde:

$$\mathcal{Y}_i = \beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i + \varepsilon_i^* \quad (6.33)$$

Un procedimiento de ajuste, correspondiente a la rectificación de la recta  $\mathcal{Y}_i$ . Por ende, para estimar los valores correspondiente a:  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ , es necesario utilizar el **método de mínimos cuadrados**: Este método, consiste en: En la ecuación de la recta de regresión para las observación  $\mathcal{Y}_i$ , podemos desperjar el valor de los errores, al elevar al cuadrado dicha ecuación de la recta de regresión  $\mathcal{Y}_i$ . Luego, sumando estos valores, se obtiene:

$$\mathcal{S}^* = \sum_{i=1}^n [\varepsilon_i^*]^2 = \sum_{i=1}^n [\mathcal{Y}_i^* - (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*)]^2 \quad (6.34)$$

El procedimiento matemático, el cual, necesario para poder minimizar los errores de la ecuación expresada anteriormente. De esta manera, es posible encontrar los estimadores, en la utilización de **mínimos cuadrados**, para los valores de los estimadores correspondientes a la ecuación anterior, siendo estos:  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ . El método para determinar los valores equivalente para los estimadores  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ , corresponde en: derivar de manera parcial, la ecuación  $\mathcal{S}^*$ , con respecto a las variables equivalentes a los estimadores  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ . De esta manera, se generarían dos ecuaciones, las cuales son **triviales**. De esta manera, al igualar estas ecuaciones resultantes de la derivación de la ecuación  $\mathcal{S}^*$ , con respecto a las variables  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ , obtenemos mediante una resolución algebraica, una minimización de los errores estimados. Es necesario mencionar previamente, considerar, las expresiones algebraicas correspondientes a las **desviaciones típicas**  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}^* \mathcal{Y}^*}^*$  y  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}^* \mathcal{X}^*}^*$ , equivalentes a las ecuaciones:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}^* \mathcal{Y}^*}^* = \sum_{i=1}^n (\mathcal{X}_i^* - \bar{\mathcal{X}}^*) (\mathcal{Y}_i^* - \bar{\mathcal{Y}}^*) = \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i^* \mathcal{Y}_i^* - \left(\frac{1}{n}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i^* \right] \left[ \sum_{i=1}^n \mathcal{Y}_i^* \right] \quad (6.35)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}^* \mathcal{X}^*}^* = \sum_{i=1}^n (\mathcal{X}_i^* - \bar{\mathcal{X}}^*)^2 = \sum_{i=1}^n [\mathcal{X}_i^*]^2 - \left(\frac{1}{n}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i^* \right]^2 \quad (6.36)$$

Al considerar, la ecuación ( 6.3.), que describe a una desviación típica  $\mathcal{S}^*$ . En esta ecuación al descomponer en los distintos elemento constitutivos, dicha ecuación la podemos expresar:

La poder determinar la demostración correspondiente a la desviación típica  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}^* \mathcal{Y}^*}^*$ , correspondiente a la expresión ( 6.4.). Necesariamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^* &= \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n [(\mathcal{Y}_i^*) - (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ (\mathcal{Y}_i^*)^2 - (2) [(\mathcal{Y}_i^*) (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*)] + [\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*]^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^*)^2 = \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*)^2 \right] - (2) \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n \beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^* \right] \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos una ecuación que expresa a la desviación típica sobre la recta de regresión lineal  $\mathcal{S}^*$ , equivalente:

$$\mathcal{S}^* = \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*)^2 \right] + (-2) \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*)^2 \right] + (-1) \left[ \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^*)^2 \right] \quad (6.37)$$

Como se menciona anteriormente, es necesario optimizar la ecuación resultante correspondiente a la **desviación típica  $\mathcal{S}^*$ , sobre la recta de regresión lineal**, existiendo en esta ecuación, una variable relacionada con respecto al error de la muestra, esta variable es denominada por medio de  $\varepsilon_i^*$ .



Para la determinación para esta optimización *sobre una frontera del conjunto de valores de la muestra*, se realiza mediante un sistema de ecuaciones equivalente a cero para cada una de las ecuaciones que constituyen este sistema; dónde, se deriva de manera parcial la ecuación resultante para la desviación típica sobre la muestra, con respecto a los estimados de la recta de regresión lineal  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ . Según esto, las ecuaciones que constituyen al sistema de ecuaciones, cuya finalidad corresponde a determinar el valor de los estimadores sobre la muestra  $\beta_0^*$  y  $\beta_1^*$ . Por lo tanto, obtendríamos:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial \beta_0^*} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial \beta_1^*} = 0 \quad (6.38)$$

Por lo tanto, podemos decir de esta expresión análoga, lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial \beta_0^*} &= (-2) \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) \right] + (2) \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial \beta_1^*} &= (-2) \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{X}_i^* \mathcal{Y}_i^*) \right] + (2) \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_1^*) (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

De la primera ecuación, luego despejando el término correspondiente al estimador  $\beta_0^*$ , obtendríamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial \beta_0^*} &= (-2) \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) \right] + (2) \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_0^* + \beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] = 0 \\ (-2) \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) \right] + (2) \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_0^*) \right] + (2) \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] &= 0 \\ \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) \right] &= \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_0^*) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] \\ \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_0^*) \right] &= \left[ \sum_{i=1}^n (\mathcal{Y}_i^*) \right] - \left[ \sum_{i=1}^n (\beta_1^* \mathcal{X}_i^*) \right] \end{aligned}$$



## Capítulo 7

# Longitud de Curvatura en el Arco $\widehat{BC}$

### 7.1. Descripción General:

Sobre el tramo de la curvatura superficial del perfil para el álabe direccional  $\widehat{BC}$ , existe una serie de puntos que se describen a partir del dominio coordenados cartesiano auxiliar  $(x^*, y^*)$ , a través de una forma polar de dichos puntos, siendo estos pares descritos de manera  $(r, \theta)$ . Para lo cual, se hace necesario estudiar la curvatura de dicho tramo geométrico; por lo tanto, existen varias formas de enfrentar este problema, de manera determinada el caso de donde los puntos se encontrarían definido según la curva que estimativa para este tramo; o por el contrario, los puntos no se encuentran dentro de la curva que describe el modelo algebraico polar para este tramo geométrico superficial  $\widehat{BC}$  del álabe direccional.

En este caso, se estudiará, cuando la tendencia sobre los puntos seleccionados en la medición del tramo  $\widehat{BC}$ , sobre el modelo que se describe en una representación de un programa de tipo CAD, como es el caso de CATIA R 19 - V5 a la curva propuesta.

Entonces, se debe considerar la variación del enfoque numérico en parte, tomando así, mayor relevancia estadística, razón por la cual, se utilizará modelos de regresión.

En lo que se refiere a los modelos de regresión, podemos inferir básicamente a los modelos de

correlaciones. Primeramente, se hace necesarios hablar sobre estadística descriptiva bivalente.

## 7.2. Estadística Descriptiva Bivalente

Se debe considerar acerca de la información obtenida de manera simultánea entre dos variables, lo cual, esto indica las observaciones constan de una sucesión de datos expresados de forma pareada  $(x_i, y_i)$ .

Esto quiere decir, según lo indica la siguiente proposición:

### 7.2.1. Proposición:

Sea un espacio muestral, un conjunto finito de pares  $\Omega_n = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ , definiendo a estos elementos mediante el par  $(x_i, y_i)$ ; como observación en el espacio muestral  $\Omega_n$ , tal que,  $n \in \mathbb{N}$  como muestra de datos. La idea es realizar dos mediciones en torno a los elementos de la muestra. Por lo tanto, se debe mencionar que, la cantidad  $n$  es el tamaño de la muestra de los datos; por ende, se hace necesario realizar dichas mediciones para dos conjuntos representativos a las dos variables de esta muestra respectivamente.

Cabe señalar que, se puede aumentar el número de las variables y obtener mediante un estudio detallado los indicadores estadísticos asociados a matrices de varianzas y de covarianza. De este modo, se puede estudiar la correlación en problemas de homotecidad. Además, se debe señalar, en este caso centrarnos en el modelo de Regresión Lineal Bivalente, lo que significa una Regresión Lineal entre dos variables.

De manera esquemática, podemos observar la gráfica de dispersión de datos pareados, de manera que estos se esquematizan de modo  $(x_i, y_i)$ ; teniendo que los puntos asociados y distribuidos dentro de un plano que describiremos mediante las variables  $a$  y  $b$ .

En la gráfica anterior, denominado diagrama de dispersión tiene puntos asociados y distribuidos a lo largo de un plano  $(a, b)$ .

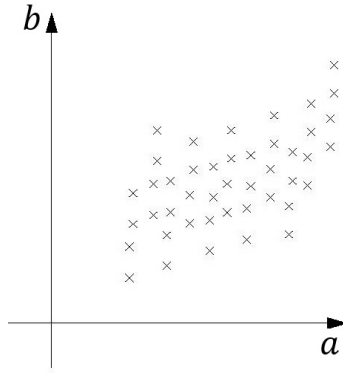


Figura 7.1: Diagrama o plano de dispersión

Dibujo, Correlación Positiva y Negativa.

Los diagramas de dispersión, se clasifican en dos formas, el primer plano corresponde a un conjunto de datos pareados correspondiente a una correlación positiva. Esto geoméricamente corresponde, a los puntos con respecto a la proyección de la variable  $a$  aumenta, cuyas proyecciones de dichos puntos en la variable  $b$  tienden a aumentar (Fig b)). La correlación negativa corresponde, a los puntos cuyas proyecciones geométricas horizontales  $a$  y las proyecciones generadas en los puntos cuya proyección geométrica en la variable vertical  $b$  aumentan (fig b)).

Luego, nos focalizaremos en el índice de predicción que implica la determinación de las correlaciones, tal que, se hace necesario definir algunos conceptos asociados a las correlaciones.

### 7.2.2. Definición: (Covarianza)

La covarianza corresponde en un indicador que busca medir las correlaciones entre las distintas variables de la muestra. De forma analítica la covarianza se representa mediante la expresión para las variables  $a$  y  $b$  cualesquiera sean estas:

$$cov(a, b) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) (b_i - \bar{b}) \quad (7.1)$$

Este indicador estadístico, se encuentra relacionado con la correlación lineal, de tal modo que:

$cov(a, b) > 0$	Indica una correlación positiva
$cov(a, b) = 0$	Indica una correlación negativa
$cov(a, b) < 0$	Indica una correlación negativa

Tabla 7.1: Propiedades principales de la covarianza

En el caso contrario, no existe reciprocidad.

También, es necesario tener en cuenta otras propiedades asociadas a la covarianza, tales que estas, se encuentran descritas para las variables  $a$  y  $b$ .

$cov(a, a) = var(a)$	
$cov(\Pi a + \Sigma, \Pi^* d + \Sigma^*) = \Pi \cdot \Pi^* cov(a, b)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$cov(a, b) = cov(b, a)$	Simetría
$cov(a, \Sigma) = 0$	$\Sigma \in \mathbb{R}$

Tabla 7.2: Propiedades secundarias sobre la covarianza

Como se describe anteriormente en las propiedades secundarias de la covarianza de la tabla a,2), se asumen como parámetros los valores escalares  $\Pi$  y  $\Sigma$ .

A continuación, se definirá el concepto de de varianza  $\sigma^2$ , esto con el objeto de tener una claridad mejor sobre los conceptos estadísticos empleados en este análisis sobre la longitud de curvatura del tramo superficial del perfil del álabe direccional  $\widehat{BC}$ .

### 7.2.3. Definición: (Varianza $\sigma^2$ )

Corresponde a la medida de la variabilidad existentes entre los datos de la muestra o variables asociadas. Este concepto da origen a otra medida de dispersión de mayor significancia, denominada como desviación estandar  $\sigma$ , o también esta es denominada como desviación típica  $S_n$ .

Las expresiones asociadas a la varianza  $\sigma^2$ , corresponden:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_a &= var(a) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n [a_i - \bar{a}]^2 \\ \hat{S}_n^2 &= \left(\frac{1}{n-1}\right) \sum_{i=1}^n [a_i - \bar{a}]^2\end{aligned}\tag{7.2}$$

Para nuestro análisis, podemos representar la desviación estandar que tienen los puntos como el promedio de una forma cuadrática. En la ecuación de la expresión anterior de  $\hat{S}_n$ , corresponde a la varianza poblacional. Este concepto, lo podemos relacionar con la varianza  $\hat{\sigma}_a^2$  utilizando la correlación de Bessel, pero no nos detendremos en esto.

### 7.2.4. Definición: (Correlación de Pearson)

La correlación de Pearson, corresponde a la función que mide la relación lineal entre dos variables. Este indicador, se expresa mediante:

$$r_{(a,b)} = \frac{cov(a,b)}{\hat{\sigma}_a \cdot \hat{\sigma}_b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\tag{7.3}$$

De otra manera, la correlación de Pearson correspondiente para cuantificar la linealidad entre las variables  $a$  y  $b$ , según la ecuación anterior. Además, se puede señalar que, dicha función, representa la covarianza entre las variables  $a$  y  $b$ , en razón del producto de las desviaciones estándar para dichas variables  $\hat{\sigma}_a$ ,  $\hat{\sigma}_b$ .

Las propiedades de la correlación de Pearson  $r(a, b)$ , se describen a continuación:

$r(a, b) =  1 $	<p>Correlación perfecta, esto quiere decir, que la relación que existe entre las variables una relación lineal precisa.</p> <p>No obstante, esto en la practica sirve para describir una linealidad a valores que se encuentran cercano a <math> 1 </math>, lo que también es válido.</p>
$0 < r(a, b) < 1$	Indica la existencia de una correlación lineal positiva entre las variables $a$ y $b$ .
$-1 < r(a, b) < 0$	Indica la existencia de una correlación lineal negativa entre las variables $a$ y $b$ .
$r(a, b) = 0$	Indica la no existencia de correlación lineal entre las variables. Además, se puede mencionar que no existe relación entre las variables $a$ y $b$

Tabla 7.3: Propiedades de la correlación de Pearson

Acerca de la primera propiedad de la tabla anterior, se debe mencionar que los puntos que se correlacionan de las variables  $a$  y  $b$ ; entonces, podemos decir que, estos puntos se encuentran contiguos a una línea recta sobre un plano representativo, cuyas variables denominadas deben ser  $a$  y  $b$ . También,



el ángulo que se forma con respecto a un eje horizontal en este plano, debe ser equivalente a  $45^\circ$ , o bien,  $\pi/4$  en radianes.

También, sobre esta propiedad, en lo cual, se muestran los puntos representativos de las variables  $a$  y  $b$ , ya que, estas son irremovibles, en tanto como la correlación lineal es positiva, por lo tanto, el coeficiente de correlación de Pearson  $r(a, b) = -1$ .

En la segunda propiedad de la coeficiente de correlación de Pearson  $r(a, b)$ , que se endica en la tabla a.3, si bien es cierto, este coeficiente es positivo, no indica que exista linealidad entre las variables  $a$  y  $b$ . Ejemplo de esta propiedad, es cuando el indice de correlación de Pearson tiene un valor equivalente de  $1/2$ ; según esto, se dice que la mitad de los puntos de las variables  $a$  y  $b$  se encuentran apegados a la recta de regresión en el plano mencionado.

También en la tabla descrita, en la segunda y tercera propiedad del indice de correlación de Pearson mencionados anteriormente, se debe mencionar, que existe la posibilidad que exista una tendencia de los datos de las variables  $a$  y  $b$  a la linealidad. Pero las variables involucradas  $a$  y  $b$ , no son perfectamente lineales a las correlaciones lineales.

Según las últimas propiedades de la correlación de Pearson  $r(a, b)$  en la tabla a.3. estas propiedades se encuentran relacionadas con la covarianza , tal como es el caso de la primera propiedad que se menciona en la tabla a.3. Por lo tanto, podemos decir:

$$r(a, gb + m) = \frac{g}{|g|} \Leftrightarrow \begin{cases} g < 0 \Rightarrow r(a, b) > 0 & \forall a, b \in \mathbb{R} \\ g > 0 \Rightarrow r(a, b) < 0 & \forall g \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \quad (7.4)$$

Para el caso de la segunda propiedad, podemos señalar:

$$\begin{aligned}
r(ga + m, sb + n) &= \frac{gs}{|g||s|} r(a, b) \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} \{g > 0 \wedge s > 0\} \\ \{g < 0 \wedge s < 0\} \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \wedge g, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

De forma paralela, este concepto referido al índice de correlación de Pearson  $r(a, b)$  lo podemos asociar aun concepto perteneciente a la geometría vectorial real, denominado cosenos directores, ya que su estructura y finalidad es similar. También, de forma análoga, se puede señalar que los puntos de las variables del plano  $\wp(a, b)$  pueden actuar como vectores en cuanto la deducción de la estructura algebraica de la expresión de los cosenos directores con respecto al índice de correlación de Pearson.

Además, según lo anterior, se afirma la existencia de un ángulo entre los puntos de las variables del plano  $\wp(a, b)$ , siendo este ángulo  $\Gamma$ , una medida generada con respecto a una linea recta que une los puntos de las variables y la proyección geométrica horizontal del plano  $\wp(a, b)$ .

figura ángulo del coseno director

Según la figura, se dice que el valor de los vectores  $\vec{g}$  y  $\vec{s}$  equivalen:

$$\begin{aligned}
\vec{g} &= a_1 - a_0 \\
\vec{s} &= b_1 - b_0
\end{aligned} \quad \forall \vec{g}, \vec{s} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\cos \Gamma &= \frac{(a_1 - a_0) \cdot (b_1 - b_0)}{\sqrt{((a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2)}} \\
&= \frac{\vec{g} \cdot \vec{s}}{|gs|}
\end{aligned}$$

Por propiedad de valor absoluto, se sabe que:

$$|gs| = |g||s|$$

Aplicando este principio, diremos que:

$$\cos \Gamma = \frac{\vec{g} \cdot \vec{s}}{|g||s|}$$

Para el caso del indicador de la correlación de Pearson  $r(a, b)$ , el producto punto de los vectores  $\vec{g}$  y  $\vec{s}$  corresponde al valor equivalente de la covarianza de las variables  $a$  y  $b$ , en razón al producto de las desviaciones estándar de las variables  $a$  y  $b$ . Por ende, la congruencia existentes entre ambas expresiones sería:

$$\cos \Gamma = \frac{\vec{g} \cdot \vec{s}}{|g||s|} \simeq r(a, b) = \frac{cov(a, b)}{\sigma_a \sigma_b} \quad (7.6)$$

### 7.3. Regresión Lineal

Este concepto estadístico, se puede definir a través del concepto, el cual, mediante un conjunto de datos descritos por dos variables, a través de pares ordenados en el plano  $\phi(a, b)$ . Por ende, podemos definir la existencia de una regresión lineal, mediante la expresión:

$$\hat{b} = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{a} \quad (7.7)$$

Describiendo de esta manera, la existencia de dos variables involucradas, siendo estas  $a$  y  $b$ . Gráficamente, la expresión algebraica asociada a la regresión lineal corresponde a una recta en ángulo de  $45^\circ$ , con respecto a la variable horizontal  $a$ . También, la recta que representa la regresión lineal, es denominada como recta de regresión o recta de mínimos cuadrados.

En algunos casos, las variables  $a$  y  $b$  se encuentran relacionadas de manera determinista, esto quiere decir que, a partir del valor de una variable y de forma automática se determina el valor equivalente de la otra variable.

La ecuación de regresión lineal, expresa la relación existente entre la variable  $\hat{a}$ , denominada como variable explicativa o variable de predicción, y la variable  $\hat{b}$ , es denominada variable de respuesta.

Los valores equivalente de  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , siendo estos evaluados, obtendríamos la recta de regresión lineal estimada, lo cual teniendo una propiedad especial, diremos que esta recta de regresión es la mejor forma de ajustar los puntos de la variable sobre la muestra. Dicha propiedad especial, se refiere al concepto de mínimos cuadrados.

De manera general, comparamos los valores asociados a los estimados estadísticos  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ , según el parámetro poblacional y el parámetro estadístico muestral.

A continuación, se hace una comparación, entre la notación de los estimados estadísticos según el parámetro poblacional y el parámetro estadístico muestral.

	Parámetro poblacional	Parámetro Estadístico Muestral
Constante de intersección con la variable de respuesta para recta de regresión $\hat{b}$	$h_0$	$\gamma_0$
Pendiente de la recta de regresión	$h_1$	$\gamma_1$
Ecuación de la recta para una regresión lineal	$b = h_0 + h_1 a$	$b = \gamma_0 + \gamma_1 a$

Tabla 7.4: Tabla de comparación entre la notación para el parámetro poblacional, y el parámetro estadístico muestral.

### 7.3.1. Redondeo de la pendiente mediante estimadores estadísticos $\gamma_0$ y $\gamma_1$

Sobre el redondeo de los estimadores estadísticos  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  a tres dígitos significativos, es demasiado costoso de determinar una regla universal y sencilla para establecer dichos valores, pero podemos encontrar una manera aproximada de gran eficiencia, esto dependerá de la manera que podemos redondear.

Nos introduciremos en la teoría sobre estimadores, cuando en la recta de regresión exista valores no observables, dichos valores los representaremos mediante  $\varepsilon$ .



## Capítulo 8

# Teoría Infinitesimal Sobre Áreas Planas.

### 8.1. Descripción General.

En este capítulo, describe de manera teórica la metodología infinitesimal, para poder determinar el área de una región plana, mediante la metodología geométrica correspondiente a la integral doble para una superficie plana, en un dominio acotado.

Respondiendo de alguna manera, a lo plantado en la Gracia Helenica por Euclides, el área de una región tal, corresponde al producto del ancho y el largo para toda superficie plana. Esto, a través del tiempo ha generado distintas discusiones sobre el problema del área. Además, también ha creado en las mentes distintas interrogantes, lo cual, responde a todas las formas geométricas que se pueden generar sobre una superficie plana.

En la época del renacimiento, mediante la teoría axiomática conjuntista de Cantor, se ha podido; de alguna manera, dar una cierta formalidad acerca de la determinación del valor que represente al área de una superficie plana.

Con la aparición de los estudios sobre la geometría analítica, se marca de forma histórica, a esta rama de la matemática. La geometría en la edad moderna, se ve fuertemente influenciada por el filósofo matemático francés René Descartes. Quién propone un método que consiste en la resolución

de problemas geométricos, a través de la extensión, lo cual, se propone como investigación para la generación de una nueva línea sobre geometría.

La metodología de análisis, en esta nueva rama de la geometría, esencialmente se basa en ecuaciones algebraicas ciertas geometrías en un sistema coordenado cartesiano. También, dentro de la metodología de análisis, se sustituye los instrumentos clásicos de medición, como lo son: la regla y compás; utilizando así, expresiones numéricas que, describen de manera taxativa algunas geometrías dentro de un plano, descrito a través de un sistema coordenado cartesiano. Cabe señalar que, en la actualidad, la notación empleada en estos análisis ha permanecido desde aquella época.

Sobre esta emergente rama de la matemática, denominada geometría analítica, acarrea consigo una forma distinta de mirar y entender la geometría, estadiada hasta la fecha. El método algebraico, que sustituye al antiguo método, consiste en establecer axiomas y definiciones para definir los teoremas. El método sintético, aporta a la geometría nuevos resultados, los cuales, son de gran interés; dentro de estos, se encuentra la característica de Euler, cuya naturaleza sobre estos resultados, son más bien topológico, más que geométricos. Estando estos relacionados con los métodos algebraicos y métodos diferenciales; lo cual, genera un método de estudio más algebraico.

Se necesario mencionar que, en el método algebraico existe otra generalización que puede estudiar de forma natural, lo cual, no solamente podemos considerar a una curva dentro del plano, que se encuentra descrita, a través de, una ecuación polinómica; sino que, también, podemos considerar que, dicho polinomio describe a una función  $f$ , tal que,  $f(x, y) = 0$ .

El concepto de área geométrica, cuyos valores, son posibles de determinar mediante una herramienta infinitesimal, denominada integral definida para una función. Esto puede interpretarse, de manera exacta al área generada entre las gráficas de las funciones. Para el caso de las integrales dobles para funciones de dos variables, éstas representan al volumen generado por: la región de la superficie plana y la superficie geométrica generada por dicha función. Mencionando de esta manera, las funciones que tienen más de dos variables, se interpretan geométricamente, a través de, las integrales múltiples; Donde, los valores resultantes generan cuerpos, denominados hipervolumenes.

## 8.2. Concepto de Área Mediante una Función de Conjunto.

Cuando se intenta desarrollar una **teoría general**, que pueda abarcar conceptos distintos, se procura aislar las propiedades comunes que parecen ser fundamentales, para cada una de las aplicaciones



particulares que se considera. Por ende, podemos utilizar dichas propiedades como piedras angulares en su teoría. En la Grecia Helenica, Euclides utilizó este método en el desarrollo de la Geometría elemental como una sistematización deductiva, cuya base corresponde en un conjunto de axiomas. Actualmente, se utiliza el mismo proceso axiomático para el sistema numérico real  $\mathbb{R}$ , utilizando para la discusión del **concepto de área superficial plana**, concepto matemático que utilizaremos en el proceso de determinación para el valor equivalente de la subárea  $\mathcal{A}_1$ .

Al asignar un *área en una región plana*, asociamos un valor finito en un conjunto  $\mathcal{S}$  del plano. Desde el punto de vista matemático, significa que se tiene una función, la cual, denominaremos por  $\mathcal{A}$ , siendo de esta manera, una **función de área**. Esta función, se le asigna un valor finito real, denotando a dicho valor mediante  $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ , representando al área de la sección plana  $\mathcal{S}$  para cada conjunto  $\mathcal{S}$ , de una cierta colección de conjuntos dados. Una función en cuya naturaleza existente, donde el dominio es: **una colección de conjuntos** y cuyos valores denominada como función de conjunto.

Cualquier función de conjunto que satisfaga los axiomas para los números reales  $\mathbb{R}$ , es llamada función de área. También es necesario, demostrar que existe una función de área, en la cual, en esta ocasión, no los detendremos en dicho análisis. Mientras tanto, asumiremos la existencia de dicha función de área; para luego, deducir nuevas propiedades a partir de los *axiomas de los números reales*.

Al establecer *los axiomas de los numeros reales*  $\mathbb{R}$  para la determinación del área, haremos algunas observaciones acerca de los conjuntos del plano a los que se puede asignar a dicha área. Estos conjuntos se denominan **conjuntos medibles**; y la colección de todos los conjuntos medibles se designará por medio de la letra  $\mathcal{M}$ . Los axiomas de los números reales  $\mathbb{R}$  contienen la suficiente información acerca de los conjuntos medibles  $\mathcal{M}$ , y que sus áreas pueden calcularse mediante *integración*. Uno de los axiomas de los números reales, establece que todo rectángulo es **medible**, y su área asociada es el *producto de las longitudes de sus lados*. Aludiendo a la palabra **rectángulo**, es utilizado aquí para referirse a cualquier *conjunto congruente*, cuya forma responde:

$$\forall (x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h \times 0 \leq y \leq k \quad (8.1)$$

Donde,  $h \in \mathbb{R}_0^+$  y  $k \in \mathbb{R}_0^+$ . Las constantes  $h$  y  $k$ , corresponde a las longitudes a considerar, un segmento o un punto, como un *caso particular de un rectángulo*, suponiendo que; las constantes descritas  $h$  o  $k$ ; son equivalente a cero. Por lo tanto, equivalencia corresponde a la reunión de una colección finita de rectángulos, cuyas **bases ortonormales** corresponden a la abscisa  $x$ , y la ordenada

$y$ , lo cual, se denomina *región escalonada*. Los axiomas implican que cada región escalonada sea medible, y que su área respectiva es la *suma de las áreas de los rectángulos componentes*.

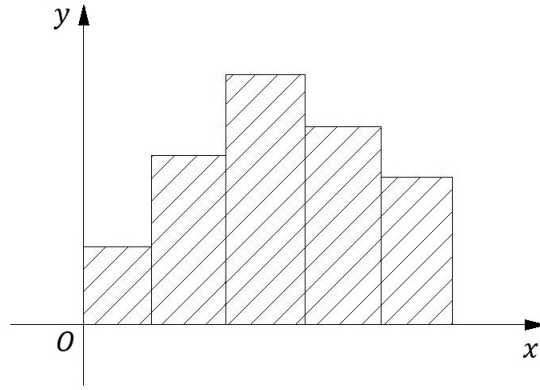


Figura 8.1: Región escalonada en el plano.

La región  $\mathcal{Q}$  dibujada en la figura 8,2; es un ejemplo de conjunto de ordenadas. Su contorno superior, corresponde a la gráfica de una *función no negativa*. El axioma *vi* nos permitirá demostrar, que muchos conjuntos de ordenadas son medibles y que sus áreas respectivas, pueden calcularse aproximando tales conjuntos por regiones escalonadas rectángulos inscritos y circunscritos en un ***lugar geométrico*** generado por una curva o función dada, como lo muestra las figuras 8,2; (a) y (c). Luego, se expondrá gráficamente los axiomas que se mencionan.

1. Propiedad asociada a la no negatividad: Para cada conjunto de la sección plana  $\mathcal{S}$  correspondiente a la medida  $\mathcal{M}$ ; según esto, tenemos  $\mathcal{A} \geq 0$ :
2. Propiedad aditiva: Si los elementos geométricos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$ , pertenecientes a la medida  $\mathcal{M}$ , también los *elementos geométricos* asociados a la unión e intersección pertenecen a la medida  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ ). por ende, se tiene:

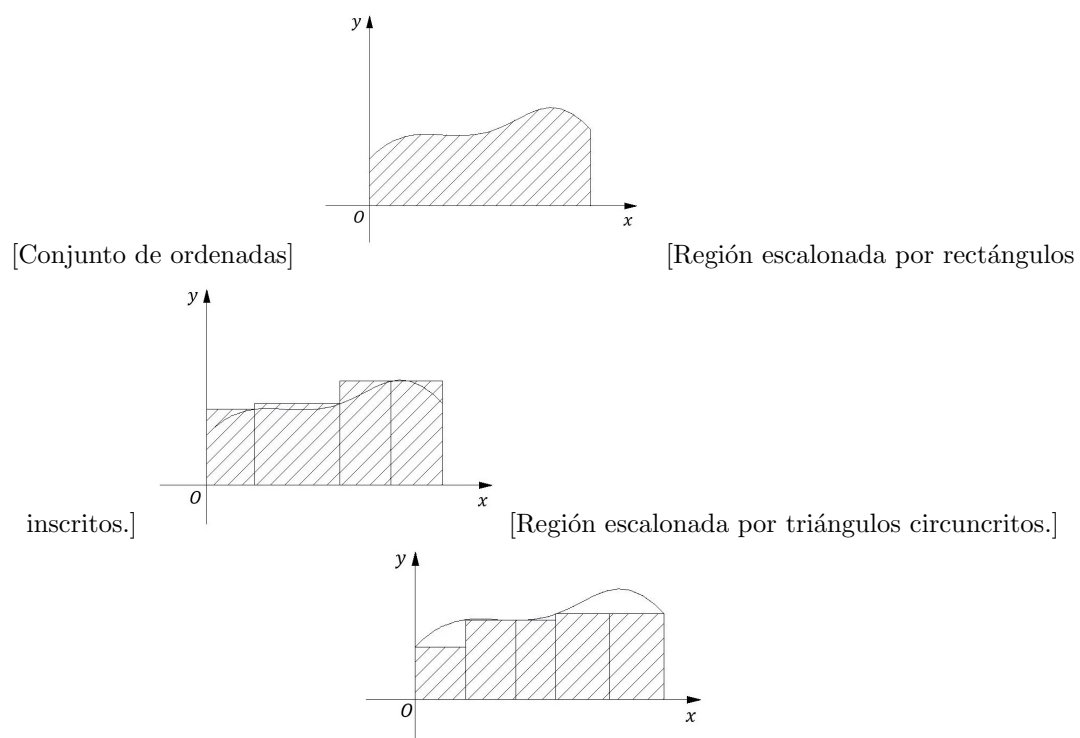


Figura 8.2: Conjunto de ordenadas inscritas por dos regiones escalonadas.

$$\mathcal{A}(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{S}) + \mathcal{A}(\mathcal{T}) - \mathcal{A}(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \quad (8.2)$$

3. Propiedad de la diferencia: Si los *elementos geométrico* o *conjuntos*  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  pertenecen a la medida  $\mathcal{M}$ . Cumpliendo la condición  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ; entonces la diferencia entre conjuntos  $\mathcal{T} - \mathcal{S}$ , encontrándose en *la medida*  $\mathcal{M}$ , se cumple:

$$\mathcal{A}(\mathcal{T} - \mathcal{S}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) - \mathcal{A}(\mathcal{S}) \quad (8.3)$$

4. Invariancia por congruencia: Si un conjunto o elemento geométrico  $\mathcal{S}$  pertenece a ***un conjunto medible***  $\mathcal{M}$ , y otro elemento geométrico denominado  $\mathcal{T}$ , siendo éste ***congruente*** al conjunto  $\mathcal{S}$ , también  $\mathcal{T}$  pertenece al conjunto medible  $\mathcal{M}$ , y en consecuencia a esto, obtenemos:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) \quad (8.4)$$

5. Elección de escala: Se propone que, todo rectángulo  $\mathcal{R}$  *perteneciente al conjunto de medida*  $\mathcal{M}$ ; Si los lados del rectángulo  $\mathcal{R}$  tienen longitudes equivalentes a  $h$  y  $k$ . Por lo tanto, diremos

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = hk \quad (8.5)$$

6. Propiedad de exhaustión: Sea  $\mathcal{Q}$  un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones correspondientes a los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$ , de modo que se cumple la condición:

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T} \quad (8.6)$$

Si existe un elemento numérico real, el cual, se denomina mediante  $c$ , este satisface las desigualdad:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \leq c \leq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \quad (8.7)$$

para todas las regiones escalonadas de los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$ , que satisfagan la expresión equivalente a la propiedad de exhaustión. Entonces, el conjunto  $\mathcal{Q}$ , es un conjunto medible, siendo la función de área en este conjunto equivalente al valor de convergencia numérica  $c$ .

En el axioma *I*, se establece que el área de un, corresponde a un número  $n$ , tal que  $n \in \mathbb{R}_0^+$ . El axioma *II*; nos indica que, cuando un conjunto se encuentra formado por dos regiones que pueden tener una intersección mutua, el área de cuya reunión geométrica en el plano corresponde a la suma de las áreas de ambas partes partes exceptuando la intersección entre ambas. Si la intersección generada tiene un área nula, dicha área del conjunto equivalente, corresponde a la suma de las áreas de ambas partes.

Si extraemos del conjunto medible  $\mathcal{S}$  otro conjunto medible  $\mathcal{T}$  siendo este última conjunto, un conjunto mayor; según el axioma *III*, podemos establecer que la parte sustraída  $\mathcal{T} - \mathcal{S}$ , es un conjunto medible, y su área se obtiene por la propiedad de la sustracción, tal que,  $\mathcal{A}(\mathcal{T} - \mathcal{S}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}) - \mathcal{A}(\mathcal{S})$ . En particular, este axioma implica que el conjunto vacío  $\emptyset$ , también es un conjunto medible, y su área es nula. Puesto que  $\mathcal{A}(\mathcal{T} - \mathcal{S})$ ; se presume que, mediante el axioma *III* también, este implica la propiedad de la monotonía:

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) \leq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \quad (8.8)$$

$$\forall \mathcal{S} \wedge \mathcal{T} \in \mathcal{M} : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$$

DE otra manera, un conjunto que forma parte de otro, no puede tener un área mayor.

El axioma *IV*, asigna áreas iguales a los conjuntos que tienen el mismo tamaño y una misma forma. Los cuatro primeros axiomas mencionados, se satisfacen de manera trivial, siempre que se asuma una equivalencia a estos nula; además, esto se aplica para la determinación del área para todo conjunto sea medible  $\mathcal{M}$ . Mediante el axioma *V*, asigna un área no nula a ciertos rectángulos; por lo tanto, se excluye aquel caso trivial. Finalmente el método griego correspondiente a la exhaustión; nos permite extender la clase de conjuntos medibles de las regiones escalonadas a regiones más generalizadas.

### 8.3. Área bajo el Concepto de Integración.

Consideremos, a la de integral definida de una función de una variable  $\int_a^b f(x)dx$ . Siendo esta función, positiva  $f(x) \geq 0$ ; y donde esta se encuentra definida en un intervalo cerrado  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . El propósito de esta integral, representa al área bajo la curva para una función  $y = f(x)$ , sobre todo el intervalo definido. Se debe recordar que, una integral puede definirse sin recurrir al concepto de área geométrica, proceso mediante el principio de sumas de Riemann, la cual, dicho intervalo definido para la función  $f$ , al dividir el intervalo en que se define la función  $[a, b]$  en  $n$ -ésimos subintervalos que, ya que, por simplicidad, asumiremo que cada intervalo es equivalente al ancho, expresado mediante  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Al enumerar los subintervalos, a través de  $i = 1, \dots, n$ , y escogiendo un valor para  $x$  en cada subintervalo  $x_i^*$ .

Luego, formamos la  $n$ -ésima suma de Riemann, estableciendo de este modo.

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (8.9)$$

Considerando que, los subintervalos corresponden a elementos infinitesimales; por ende, al aplicar el límite para esta suma, considerando que la cantidad de elementos particionados  $n$  son incontables, por ende, consideraremos el criterio para dicho límite  $n \rightarrow \infty$ . Con esto, se pretendería obtener la integral definida para la función  $f$ ; tal que  $f \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (8.10)$$

## 8.4. Integral Doble Sobre un Rectángulo Definido.

Al considerar una función de dos variables, tal que:  $f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cuyo dominio corresponde a un rectángulo cerrado, el cual, es denominado por medio de la letra  $\mathcal{R}$ ; dónde, sus lados se encuentran de forma paralela a los ejes del plano coordenado cartesiano. Dicho rectángulo  $\mathcal{R}$ , también puede definirse en términos de dos intervalos cerrados, estos corresponden  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  y  $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ , representativamente a sus lados a lo largo de los ejes del plano cartesiano  $(x, y)$ . En consecuencia, podemos decir:

$$\mathcal{R} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \quad (8.11)$$

Supongamos que, la función sea positiva  $f(x, y) \geq 0$ , para todo conjunto  $\mathbb{R}$ , de manera que su gráfica corresponde una superficie en un espacio  $\mathbb{R}^3$ , ubicándose por encima del rectángulo  $\mathcal{R}$  en el plano Cartesiano. Consideremos ahora, una región sólida denominada por medio  $\mathcal{S}$ , en un espacio  $\mathbb{R}^3$ , la cual, se encuentra limitada por la región plana correspondiente a un rectángulo  $\mathcal{R}$ . También, se considerará los cuatro planos verticales generado por las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$  e  $y = d$ , y la superficie generada por la gráfica de la función  $f$ . El objetivo, es poder determinar el valor del volumen del sólido generado  $\mathcal{S}$ . De esta manera como una función de una variable, comienza el análisis acerca de las integrales definidas, aproximando el área generada bajo la curva producida por una función  $y = f(x)$ , siendo esta positiva, lo cual, diremos que  $f(x) \geq 0$ , para el intervalo definido  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . En el caso de, una función de dos variables, cuya representación en un espacio  $\mathbb{R}^3$ , se debe aproximar el volumen generado bajo esta superficie, considerando que; la función  $z = f(x, y)$ , es una función positiva, lo cual, diremos que  $f(x, y) \geq 0$ , sobre el en el rectángulo  $\mathcal{R}$ .

Para la determinación de la aproximación correspondiente al volumen de la sección  $\mathcal{S}$ . Primeramente, es necesario dividir el rectángulo  $\mathcal{R}$  en subrectángulos, lo cual, este debe dividirse mediante los intervalos que definen la función  $f$ , a través de:  $[a, b]$  y  $[c, d]$ . Sobre la abscisa  $x$  del espacio  $\mathbb{R}^3$ , al dividir dicho intervalo definido en cuyos puntos extremos de  $a$  y  $b$ , en  $n$ -subintervalos numerados, tal que, estos intervalos sean expresados mediante una cantidad numerable  $i = 1, \dots, n$ , cuyo ancho correspondería a  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Por otra parte, el intervalo  $[c, d]$ , que define a la función  $f$  sobre la ordenada para el dominio definido para la función  $f$ , en  $m$ -subintervalos numerados, lo cual, diremos que  $j = 1, \dots, m$ , dónde sus valores extremos corresponden a  $c$  y  $d$ ; según esto, el ancho de cada subintervalo numerable se expresa mediante  $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ . Luego, los rectángulos que define al dominio

de la función  $\mathcal{R}$ , se encuentran divididos por el producto  $mn$ , siendo estos valores equivalentes a los subrectángulo denominados  $\mathcal{R}_{ij}$ .

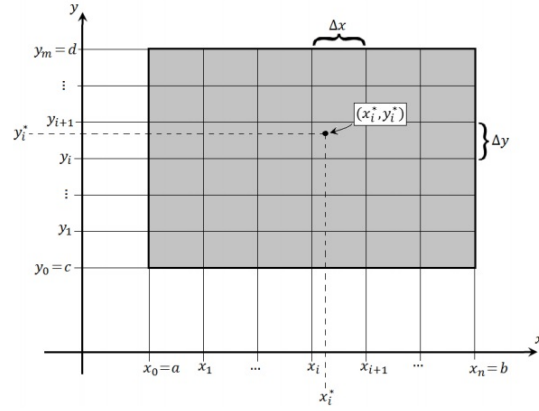


Figura 8.3: Subdivisión rectangular para el dominio acotado  $\mathcal{R}$ , cuyas dimensiones corresponden a la composición de  $n \times m$ —subrectángulos, lo cual, describe el área de cada subrectángulo.

Al tomar un punto correspondiente a una muestra cualquiera, la cual, la llamaremos  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ , para cada subrectángulo perteneciente al dominio de la función  $\mathcal{R}_{ij}$ ; luego, aproximaremos la parte que comprende al sólido que es representado mediante  $\mathcal{S}$ , encontrándose por encima del rectángulo numerable  $\mathcal{R}_{ij}$ , formando  $\mathcal{R}_{ij}$  y de altura  $f(x_i^*, y_j^*)$ .

Al realizar, el proceso correspondiente a la aproximación, para los  $n \times m$ —subrectángulos, para posteriormente sumarlos a los volúmenes generados por todas las  $n \times m$  columnas, se obtendría una aproximación del valor equivalente al volumen total del sólido generado  $\mathcal{S}$ . Este valor, lo podemos expresar mediante:

$$\mathcal{S}_{mn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y \quad (8.12)$$

A esta doble suma finita, es denominada mediante el nombre de suma doble de Riemann.

Según la definición de integral doble en para una región rectangular  $\mathcal{R}$  mencionada anteriormente, es posible aplicarse en cualquier función de dos variables, sin importar si esta es positiva, o bien



negativa. Cuando una función de dos variables  $f(x, y) \geq 0$  dentro de la región  $\mathcal{R}$ , la integral doble de la función  $\int_{\mathcal{R}} f(x, y) d\mathcal{A}$ , es una representación del volumen generado  $\mathcal{V}$  del sólido, que se ubica sobre el rectángulo  $\mathcal{R}$ , y por debajo de la superficie generada por la función  $z = f(x, y)$ ; lo cual, se representa mediante:

$$\mathcal{V} = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y \quad (8.13)$$

Esta expresión, nos induce a la siguiente definición para la integral doble de una función de dos variables sobre un rectángulo definido en un plano:

### Definición:

La integral doble para una función de dos variables  $f(x, y)$ , sobre el rectángulo  $\mathcal{R}$  en un plano, equivale:

$$\mathcal{V} = \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y \quad (8.14)$$

Esto se cumple, siempre que exista límite.

Si la función  $f$ , es una función continua dentro del rectángulo definido del dominio correspondiente  $\mathcal{R}$ , podemos demostrar que, el límite según la definición expuesta anteriormente existe cuya resultante equivale a valor real finito.

Haremos notar que, según la definición anterior, es posible aplicar en cualquier función que esta sea positiva o negativa. Pero, cuando la función sea positiva  $f(x, y) \in \mathbb{R}_0^+$  dentro de su dominio definido rectangular  $\mathcal{R}$ , la integral doble  $\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ , representa el volumen generado del sólido, denominado mediante  $\mathcal{V}$ , el cual, se encuentra sobre dicho rectángulo  $\mathcal{R}$ , y por debajo de la superficie generada por la función  $z = f(x, y)$ . Según esto, podemos expresar el volumen  $\mathcal{V}$  generado por :

$$\mathcal{V} = \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad (8.15)$$

$$\forall \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow [a, b] \in x \subseteq \mathbb{R} \times [c, d] \in y \subseteq \mathbb{R}$$

## 8.5. Integrales Dobles Iteradas

Supongamos que una función de dos variables, representada mediante  $f(x, y)$ , correspondiente a una función continua, la cual, esta definida para un dominio rectangular definido por:  $\mathcal{R} : [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ . Luego, para la siguiente integral definida  $\int_c^d f(x, y) dy$ . Indica que la variable correspondiente a la abscisa  $x$ , corresponde a un valor constante; por lo tanto, la función  $f(x, y)$ , es integrable para la variable ordenada  $y$ , cuyo intervalo de integración corresponde  $[c, d] \in y \subseteq \mathbb{R}$ . Observando que, la integral definida  $\int_c^d f(x, y) dy$ , proporciona una expresión que depende de la variable  $x$ . Ahora bien, integramos la función  $f(x, y)$ , con respecto a la variable  $x$ , cuyo intervalo definido equivale  $[a, b] \in x \subseteq \mathbb{R}$ , obtendríamos:

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (8.16)$$

Esta expresión, es conocida como integral iterada doble, en cuyo caso, el proceso de iteración consiste en integrar una vez con respecto a una variable, para luego volver a integrar sobre la función resultante con respecto a la otra variable. Según esto, podemos mencionar que:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (8.17)$$

Por lo tanto, queda indicado que, en primer lugar, se debe integrar la función  $f(x, y)$  con respecto a la variable  $y$ , cuyo intervalo definido es equivalente  $[c, d] \subset \mathbb{R}$ . Luego, la resultante de la función integrada con respecto a la variable  $y$ , se debe integrar con respecto a la variable  $x$ , cuyo intervalo definido es equivalente  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

De forma análoga, es posible expresar la integral iterada, tal que:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (8.18)$$

### 8.5.1. Teorema de Fubini Aplicado Para las Integrales Dobles:

Si una función  $f$ , se encuentra definida mediante:  $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , corresponde a una función continua para el rectángulo  $\mathcal{R} : (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tal que,  $\mathcal{R} \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, tenemos:

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) d\mathcal{A} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (8.19)$$

En general, el Teorema de Fubini se satisface; también, bajo condiciones débiles, solamente bajo el supuesto de, que la función  $f$  se encuentra acotada en un rectángulo denominado  $\mathcal{R}$ . Esta puede ser discontinua solamente en una cantidad finita de curvas suaves, existentes para las integrales iteradas.

El Teorema de Fubini; además, nos permite entonces determinar la integral doble sobre un rectángulo  $\mathcal{R}$ , para una función continua, a través de integrales iteradas, esto quiere decir que, se debe integrar con respecto a una variable a la vez; lo cual, también implica que, en cualquier orden de integración, por lo cual, es de mucha conveniencia.

### 8.5.2. Integrales Dobles Para una Región Plana.

Para el caso de integrales definidas en funciones de una variable  $y = f(x)$ , la región de integración debe corresponder al un intervalo definido continuo  $I \subset \mathbb{R}$ . La diferencia, con respecto a funciones de dos variables  $z = f(x, y)$ , cuya situación es más ventajosa, y existe mayor variedad de regiones superficiales para considerar en dicha integración. Las integrales dobles, cuyo dominio corresponde rectángulos, denominados mediante  $\mathcal{R}$ ; lo cual, sobre una región superficial plana, denominaremos al dominio de integración mediante  $\mathcal{D}$ , de forma general.

Suponiendo que la región que define al dominio de integración dentro de una superficie plana, la cual, es denominada mediante  $\mathcal{D}$ , correspondiente a una región acotada continua, lo cual, indica que existe un rectángulo  $\mathcal{R}$ , tal que,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ . Según esto, definiremos una nueva función denominada  $g$ , cuyo dominio corresponde al rectángulo  $\mathcal{R}$ , mediante:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \forall (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \forall (x, y) \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{D} \end{cases} \quad (8.20)$$

Luego, en el caso de la integral doble para la función  $g(x, y)$ , sobre dominio acotado rectangular  $\mathcal{R}$ ; se define que, la integral para la función  $f(x, y)$  sobre el dominio acotado  $\mathcal{D}$ , mediante la expresión:

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}} g(x, y) d\mathcal{A} \quad (8.21)$$

Por ende, la integral doble correspondiente al miembro derecho de la expresión anterior equivalente a una igualdad sobre el dominio definido mediante un rectángulo  $\mathcal{R}$ , es determinable de manera inmediata. Por otra parte, según la definición correspondiente a las integrales dobles para una región plana, es razonable pensar, que la función  $g(x, y)$  equivale a cero, cuando los puntos de esta función, se encuentran fuera del dominio acotado  $\mathcal{D}$ . Por la condición, no tiene mayor trascendencia en la determinación del valor de la integral doble para una región plana. En consecuencia, se debe tener en cuenta, que el rectángulo correspondiente al dominio de la región  $\mathcal{R}$ , es la única condición importante a considerar, siempre que se cumpla la condición  $\mathcal{R} \supset \mathcal{D}$ .

Si la función correspondiente para este caso, tiene la condición  $f(x, y) \geq 0$ ; la integral doble  $\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A}$ ; el volumen del sólido generado sobre la región acotada  $\mathcal{D}$  y la gráfica que genera la función para dicho espacio correspondiente  $z = f(x, y)$ ; podemos observar que, que la positividad de esta función  $f \in \mathbb{R}_0^+$ , implica que la función general  $g$ , geométricamente genera un mismo sólido. Por lo tanto, la integral doble  $\int \int_{\mathcal{R}} g(x, y) d\mathcal{A}$ , equivale al volumen del sólido para dicha región rectangular  $\mathcal{R}$ . Recíprocamente los volúmenes de ambos sólidos para dichas regiones son equivalentes.

Generalmente, existe la posibilidad que la función  $g$ , presenta ciertas discontinuidades en los puntos de la frontera del dominio acotado  $\mathcal{D}$ , al ocurrir dicho fenómeno en la función; en este caso la función  $f$ ; a pesar de aquello, sin embargo la función  $f$  es continua en dominio acotado  $\mathcal{D}$ . Además la frontera del

dominio acotado  $\mathcal{D}$ , es una curva cuyo comportamiento es conocido, lo cual, mediante este, es posible demostrar a través de la integral doble de la función  $g$  sobre la región rectangular  $\mathcal{R}$  existente. Por lo tanto,  $\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A}$  existe.

Al Estudiar las regiones de integración para el dominio acotado  $\mathcal{D}$ , teniendo un comportamiento definido conocido; de las integrales dobles sobre una región plana, las clasificaremos para regiones de tipo  $I$  y regiones de tipo  $II$ . Además, existen regiones en el plano, cuya característica corresponde para ambos casos. Por ende, las condiciones que se mencionan corresponden:

## 8.6. Dominios Para Regiones Planas de Tipo $I$ y Tipo $II$

1. Para una región plana, que corresponda a una región del tipo  $I$ , si esta se encuentra entre las curvas generadas de dos funciones continuas, cuya variable independiente equivale a  $x$ . Por lo tanto, esto corresponde:

$$\mathcal{D}_I = \{ \forall (x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \} \quad (8.22)$$

Lo cual, las funciones  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$ , son funciones continuas cuya variable independiente es  $x$ , para todo el intervalo definido  $[a, b] \in \mathbb{R}$ .

Suponiendo que, el dominio acotado  $\mathcal{D}$ , corresponde a una región de tipo  $I$ , la manera de poder determinar el el área respectiva para esta forma del tipo  $I$ , se podría a través de la definición, escogiendo una región rectangular  $\mathcal{R}$ , conteniendo al dominio acotado  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto, al definir la función  $g$ , esta coincide con la función  $f$ , en cuyo dominio acotado corresponde a  $\mathcal{D}$ , teniendo en cuenta que la función  $g$  es nula fuera del dominio acotado  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto, al aplicar la definición, tenemos:

$$\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{R}} g(x, y) d\mathcal{A} \quad (8.23)$$

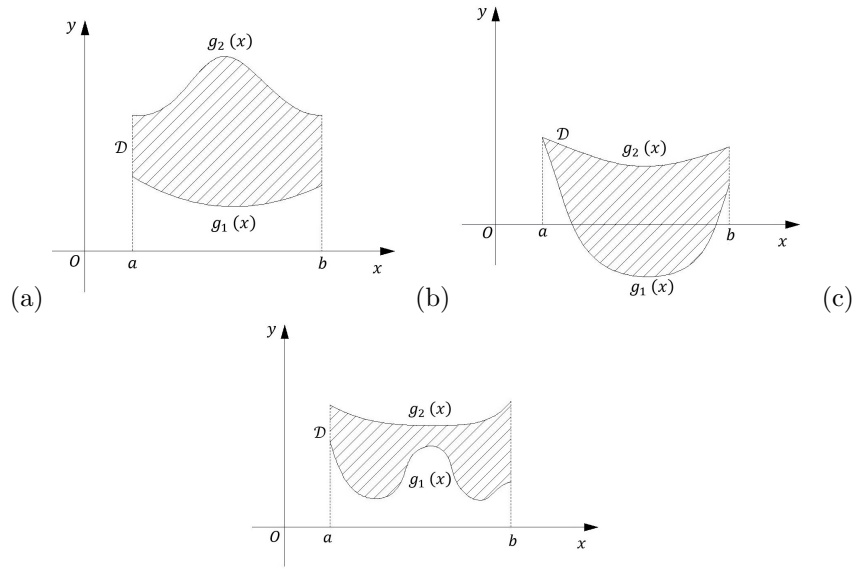


Figura 8.4: Gráficas para casos de regiones planas del tipo  $I$ .

Al aplicar el Teorema de Fubini en la expresión anterior correspondiente integral doble, se tiene:

$$\int \int_{\mathcal{R}} g(x, y) d\mathcal{A} = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx \quad (8.24)$$

Teniendo en cuenta que, la función  $g(x, y) = 0$ ; además,  $y < g_1(x)$ ; o bien,  $y > g_2(x)$ . Según esto, podemos decir que:

$$\int_c^d g(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} g(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \quad (8.25)$$

Lo cual, se debe tener en cuenta que la función  $g(x, y) = f(x, y) \in \mathcal{D}$ , esto cuando se cumpla la condición  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ . Finalmente, según esto, podemos escribir una integral doble sobre una región equivalente al dominio acotado  $\mathcal{D}$  para el tipo  $I$ , mediante una integral iterada, lo cual, corresponde a la siguiente descripción:

### 8.6.1. Integrales Dobles Para Regiones Planas del Tipo I:

Sea una función  $f$ , definida sobre un dominio  $f : \mathcal{D}_I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo esta función continua en su dominio, equivalente a la región  $\mathcal{D}_I$  correspondiente al tipo  $I$ . Describiendo el criterio, para la región del dominio  $\mathcal{D}_I$ , tal que:

$$\mathcal{D}_I = \{ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \} \quad (8.26)$$

Lo cual,  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son funciones continuas para un intervalo  $I \subseteq [a, b]$ , entonces:

$$\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (8.27)$$

1. En una región plana, según la clasificación correspondiente a una región del tipo  $II$ ; estas deben ser funciones continuas para un intervalo  $I' : [c, d] \in y \subseteq \mathbb{R}$ , lo cual, generan gráficas, que conecuentemente, crean una región acotada plana. Podemos expresar, de otra forma, el dominio de integración para una región de tipo  $II$ , de modo:

$$\mathcal{D}_{II} = \{ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \} \quad (8.28)$$

Lo cual, las funciones  $h_1$  y  $h_2$ , corresponden a funciones continuas para un intervalo  $I : [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ . Por lo tanto, diremos:

De manera similar, para los casos correspondientes a las regiones planas del tipo  $I$ , cuyo análisis de manera equivalente, podemos demostrar para las regiones planas de tipo  $II$ , una resultante análoga:

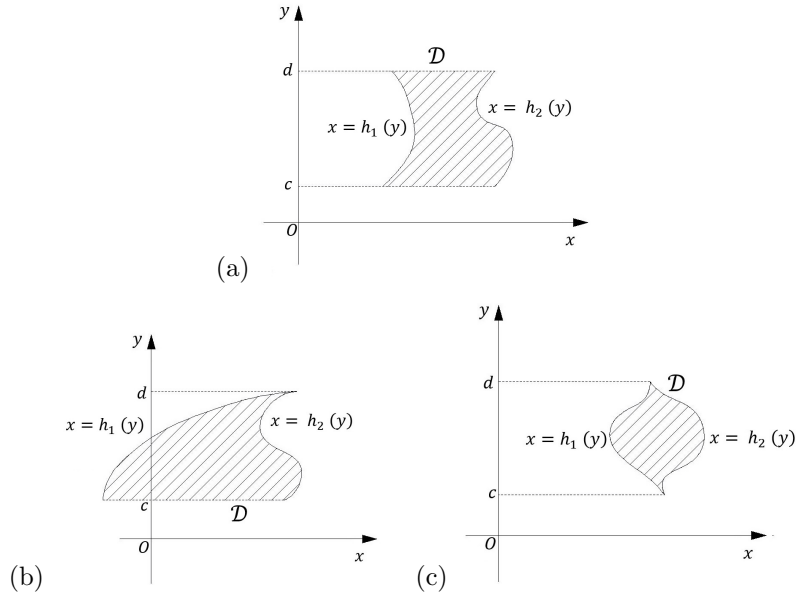


Figura 8.5: Gráficas correspondiente para los casos de regiones planas del tipo  $II$ .

### 8.6.2. Integrales Dobles Para Regiones Planas del Tipo $II$ :

Sea una función  $f$ , definida sobre un dominio, tal que  $f : \mathcal{D}_{II} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Esta función, debe ser una función continua para todo el dominio acotado, correspondiente a la región denominada  $\mathcal{D}_{II}$ ; siendo esta, una región plana del tipo  $II$ . Lo cual, implica que:

$$\mathcal{D}_{II} = \{ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \times h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \} \quad (8.29)$$

Lo cual, como condición las funciones  $h_1$  y  $h_2$  deben cumplir la condición de continuidad para el intervalo  $I : [c, d] \subset \mathbb{R}$ . Según esto, podemos expresar la integral doble para la región plana de tipo  $II$ , tal que:

$$\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dy dx \quad (8.30)$$



## 8.7. Propiedades Para las integrales Dobles Sobre una Región Plana

Sean dos funciones continuas dentro de una región sobre una superficie plana, lo cual, denominaremos mediante  $f$  y  $g$ : Además, estas funciones deben cumplir la condición de existencia para la integrabilidad sobre la región en la superficie plana, denominada  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto, diremos que, dicha integrales dobles  $\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A}$  y  $\int \int_{\mathcal{D}} g(x, y) d\mathcal{A}$ , deben satisfacer las siguientes propiedades:

$$1. \quad \int \int_{\mathcal{D}} [f(x, y) + g(x, y)] d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A} + \int \int_{\mathcal{D}} g(x, y) d\mathcal{A}$$

$$2. \quad \int \int_{\mathcal{D}} \mathcal{G} f(x, y) d\mathcal{A} = \mathcal{G} \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A}$$

3. Si las funciones  $f$  y  $g$ , cumplen la condición:  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , lo cual, se satisface:  $\forall (x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ . entonces:

$$\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A} \leq \int \int_{\mathcal{D}} g(x, y) d\mathcal{A}$$

4. Si, en la región sobre la superficie plana del dominio  $\mathcal{D}$ , equivale a:  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ; Dónde, dichos conjuntos que representan a las subregiones  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$ , no existe intersección; salvo que, la frontera de ambos subconjuntos exista. Diremos que:

$$\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{D}_1} f(x, y) d\mathcal{A} + \int \int_{\mathcal{D}_2} f(x, y) d\mathcal{A}$$

Al integrar una función constante, siendo esta equivalente a:  $f(x, y) = 1$ , Para el dominio correspondiente a una región plana sobre una superficie, denominada  $\mathcal{D}$ . De este modo, se puede obtener el valor del área de dicha región del dominio, representada mediante  $\mathcal{D}$ . Según esto, podemos decir que:

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int \int_{\mathcal{D}} d\mathcal{A}$$

Si la función  $f$ , tiene un mínimo y un máximo en el dominio de la región plana  $\mathcal{D}$ , tal que, se cumple la condición:  $\mathfrak{M} \leq f(x, y) \leq \mathcal{M}$ ; correspondiendo a la condición adjunta:  $\forall(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, se establece:

$$m\mathcal{A}(\mathcal{D}) \leq \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A} \leq \mathcal{M}\mathcal{A}(\mathcal{D})$$

## 8.8. Integrales Dobles Para Transformaciones en Coordenadas Polares

Supongase que, al pretender determinar un valor equivalente para una integral doble; cuyo dominio, corresponde a una región acotada  $\mathcal{D}$ , entonces se dice que dicha integral doble  $\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mathcal{A}$ . Además, debemos considerar el rango para el dominio acotado de la integral doble, sobre el plano expresado originalmente en un sistema de coordenadas cartesianas, ubicandonos solamente en el primer cuadrante de este.

En el primer cuadrante del plano, expresado en un sistema coordenado cartesiano, se encuentra un radio expresado, cuya magnitud equivale a  $R$ . Además, existe un ángulo variable, denominado ángulo azimutal  $\theta$ , cuyo rango consecuentemente varía entre  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , lo cual, el ángulo azimutal  $\theta$ , se encuentra expresado en radianes.

Por otro lado, una función de dos variables  $z = f(x, y)$ , siendo definida para los puntos del plano II; también, existe una expresión equivalente, con mayor simplicidad. Si al escribir las variables cartesianas en el plano II, siendo estas variables correspondientes a:  $x$  e  $y$ . Realizando una transformación lineal, en la podemos establecer mediante variables polares para dicho plano II, siendo estas  $R$  y  $\theta$ . La definición para la transformación lineal correspondiente a cambiar de un plano coordenado cartesiano a un plano polar, corresponde:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (R, \theta)\end{aligned}\tag{8.31}$$

Teniendo en cuenta que, una noción correspondiente a la región acotada, bajo la transformación lineal para la expresión de transformación polar, denominando a dicha región  $\mathcal{D}_{(R, \theta)}$  como rectángulo polar; o bien, segmento de una corona circular: Por lo tanto, cuya expresión corresponde:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(R, \theta)} &= \{\forall(R, \theta) : \alpha' \leq R \leq \mathfrak{b}' \times \alpha' \leq \theta \leq \beta'\} \\ &: \alpha', \mathfrak{b}' \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge \alpha', \beta' \in [0, \frac{\pi}{2}]\end{aligned}\tag{8.32}$$

Una función  $f$ , definida para dos variables  $z = f(x, y)$ , puede expresarse en términos de coordenadas polares, mediante la parametrización, correspondiente a la transformación en la función:

Por lo tanto, diremos:

$$\left. \begin{aligned}x(R, \theta) &= R \cos \theta \\ y(R, \theta) &= R \sin \theta\end{aligned}\right\}\tag{8.33}$$

Para realizar la integración doble para cualquier función, bajo la transformación de espacios coordenados cartesianos a un espacio coordenado; y no solamente para la este tipo de transformación, sino que, para todo tipo de transformación, la integral doble se determinaría:

$$\int \int_{\mathcal{R}_{(x, y)}} f(x, y) d\mathcal{A} = \int \int_{\mathcal{R}_{(R, \theta)}} f(x(R, \theta), y(R, \theta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \theta)} \right| d\mathcal{A}\tag{8.34}$$

El término que acompaña a la integral doble, en cuya transformación lineal correspondiente en el sistema de coordenadas cartesianas, al aplicar dicha transformación para coordenadas polares, se debe considerar como factor en la transformación, el determinante de la matriz jacobiana para dimensión

dos. La dimensión de la matriz jacobiana, depende del espacio en que se realice dicha transformación. Como es el caso de la definición para la transformación lineal, en que se define el cambio de coordenadas para un espacio cartesiano a un espacio polar, expresando esto, a través de la integral doble.

El determinante correspondiente a la matriz jacobiana, sobre un espacio de dimensión dos, en la cual, podemos relajar la transformación lineal correspondiente, teniendo en cuenta los parámetros de esta:

De este modo, al expresar el determinante de la matriz jacobiana, para dicha transformación, diremos:

$$|\mathcal{J}| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(R,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial[x(R,\theta)]}{\partial(R)} & \frac{\partial[x(R,\theta)]}{\partial(\theta)} \\ \frac{\partial[y(R,\theta)]}{\partial(R)} & \frac{\partial[y(R,\theta)]}{\partial(\theta)} \end{vmatrix} \quad (8.35)$$

Para determinar el valor del determinante de matriz jacobiana, para la transformación entre un espacio coordinado cartesiano y un espacio coordinado polar, nos resulta:

$$|\mathcal{J}| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(R,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta \\ \sin \theta & R \cos \theta \end{vmatrix} = R \quad (8.36)$$

De esta manera, toda integral doble expresada bajo la transformación lineal entre un espacio coordinado cartesiano y un espacio coordinado polar, es equivalente:

$$\int \int_{\mathcal{R}_{(x,y)}} f(x,y) d\mathcal{A}_{(x,y)} = \int \int_{\mathcal{R}_{(R,\theta)}} f(R,\theta) R d\mathcal{A}_{(R,\theta)} \quad (8.37)$$

Para toda función  $f$ , de dos variables  $z = f(x,y)$ , la podemos expresar a través de los términos equivalente a las coordenadas polares  $z = f(R,\theta)R$ , mediante dicha igualdad. Además, existe una equivalencia para la parametrización del espacio coordinado polar  $(x(R,\theta), y(R,\theta))$ , siendo este:

$$f(x(R, \theta), y(R, \theta)) = f(R \cos \theta, R \sin \theta) \quad (8.38)$$

Ejemplificando esta igualdad, la función correspondiente a la distancia euclídea entre un punto que se encuentra perteneciente al lugar geométrico de la circunferencia, hasta el origen del plano cartesiano  $(x, y)$ ; siendo la función expresada en coordenada cartesianas, para el semiplano equivalente a la semicircunferencia  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La resultante es equivalente:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ f(R \cos \theta, R \sin \theta) &= \sqrt{(R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{R^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{R^2} \\ f(R \cos \theta, R \sin \theta) &= R \end{aligned}$$

Mediante estos conceptos mencionados, podemos aplicar mediante una idea respecto a las sumas de Riemann, para la determinación de valores determinativos, para las integrales dobles, que se encuentran definidas, mediante funciones de dos variables  $z = f(x, y)$ ; sobre una región del plano cartesiano  $(x, y)$ , mediante el concepto rectángulo polar. Para esto, es necesario dividir la región  $\mathcal{R}$  en  $n \times m$  subrectángulos polares. De este modo, se genera, una subdivisión para el radio polar  $R$  para tramos equivalentes, siendo estos expresados mediante su diferencia  $\Delta R = \frac{b' - a'}{n}$ . De esta misma forma, existe una subdivisión equivalente para el ángulo azimutal polar  $\theta$ ; siendo este, dividido en  $m$  partes; en cada una de las cuales, se subextiende una diferencia en el arco, expresando de esta manera:  $\Delta \theta = \frac{\beta' - \alpha'}{m}$ .

La determinación del área por los subrectángulos, para la corona circular, cuyo radio polar, equivale a  $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ; y su ángulo azimutal polar  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Por lo tanto, el área para la región finita  $\mathcal{R}_{ij}$ , cuyo radio polar varía entre:  $R_i \in [R, R + \Delta R]$ , en consecuencia el ángulo azimutal polar varía entre:  $\theta_i \in [\theta, \theta + \Delta \theta]$ .

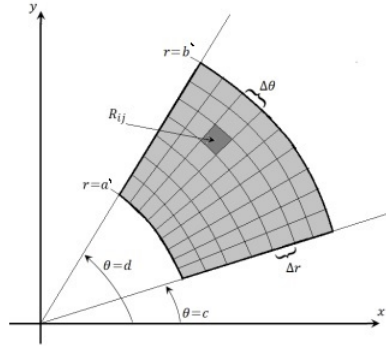


Figura 8.6: Región de la subdivisión del sector correspondiente a la corona circular definido para  $R \in [\alpha', \beta'] \times \theta \in [\alpha', \beta']$

Al aplicar la expresión que equivale para poder determinar el área dentro del sector de la corona circular, como se muestra en la figura anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{A}_{ij} &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ (R_i + \Delta R)^2 - R_i^2 \right] [(\theta_j + \Delta \theta) - \theta_j] \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right) [2R_i \Delta R + \Delta R^2] [\Delta \theta] \\
 \Delta \mathcal{A}_{ij} &= \left(\frac{\Delta R \Delta \theta}{2}\right) [2R_i + \Delta R]
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el término correspondiente a  $\Delta R$ , es un valor muy pequeño, en relación al tamaño de las particiones correspondientes para  $n$ , lo cual, dicho valor es posible despreciar este término cuadrático con respecto a los otros término. Según esto resultaría:

$$\Delta \mathcal{A}_{ij} = \Delta R R_i \Delta \theta \quad (8.39)$$

Podemos observar que, puede ser razonable la aparición del factor en la ecuación correspondiente a  $R_i$ , ya que, los valores de  $\Delta R$  y  $\Delta \theta$ , son valores fijos. También, los subrectángulos polares  $\mathcal{R}_{ij}$ , se encuentran más alejados con respecto al origen, además estos tienen un área superficial mayor.

Dentro de cada subrectángulo polar finito, denominado  $\mathcal{R}_{ij}$ , podemos elegir un punto, de manera muestral, lo cual, se puede caracterizar por medio de un radio finito  $R_{ij}^*$ , y un ángulo azimutal polar

finito  $\theta_{ij}^*$ . Por lo tanto, la suma de Riemann característica equivalente a la integral doble descrita para coordenadas polares, la podemos expresar:

$$\mathcal{S}_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(R_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, R_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) R_{ij}^* \Delta R \Delta \theta \quad (8.40)$$

Aplicando, el límite para las variables  $n$  y  $m$ , cuya tendencia se dirige hacia el infinito. Esto genera la expresión infinitesimal equivalente a la integral doble correspondiente. Entonces:

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathcal{R}_{(x,y)}} f(x,y) d\mathcal{A}_{(x,y)} &= \int \int_{\mathcal{R}_{(R,\theta)}} f(x(R,\theta), y(R,\theta)) d\mathcal{A}_{(R,\theta)} \\ &= \end{aligned} \quad (8.41)$$

$$\lim_{(n,m) \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(R_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, R_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) R_{ij}^* \Delta R \Delta \theta$$

El factor correspondiente al determinante del jacobiano, se denota mediante  $|\mathcal{J}|$ , es una manera sustituir para la determinación de integrales para funciones de varias variables. Esta forma de sustitución, se encuentra sujeta a la dimensión del espacio, en el cual, se encuentra la función. De manera análoga recordamos que, para funciones definidas de una variable, siendo esta sustitución expresada a través de:  $\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x(u)) x'(u) du$ ; teniendo en cuenta el término equivalente  $x'(x) = \frac{du}{dx}$ , pasando a ser análogo a la expresión correspondiente al determinante de la matriz jacobiana, para la transformación de un espacio de dimensión dos entre coordenadas cartesianas a coordenadas polar; lo cual, diremos que:  $|\mathcal{J}| = \left| \frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial R} \right|$ .

También, se debe considerar que, para una intragrál definida de una función en una variable, cuyo intervalo de integración  $I : [a, b] \subset \mathbb{R}$ ; al aplicar la sustitución simple en dicha integración, el intervalo donde se encuentra definida la función a integrar, este se debe redefinir, según la sustitución equivalente. De la misma manera, la región del espacio tal, donde se encuentra definida la integral múltiple, en este caso la integral doble, cuya región rectangular sobre la superficie plana, descrita para coordenadas cartesianas  $\mathcal{R}_{(x,y)} : \forall (x,y) \subseteq \mathbb{R}^2$ ; debe expresarse de manera equivalente para la misma región descrita en coordenadas polares  $\mathcal{R}_{(R,\theta)} : \forall (R,\theta) \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Podemos demostrar, un resultado de mayor generalidad, el cual, es denominado transformación de coordenadas, de un perpacio cartesiano  $(x, y)$ , hacia un espacio análogo denominado  $(w^*, z^*)$ , siendo para funciones de dos variables, esto nos permite, determinar las integrales doble, mediante la expresión:

$$\int \int_{\mathcal{R}_{(x,y)}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\mathcal{R}_{(w^*, z^*)}} f(x(w^*, z^*), y(w^*, z^*)) \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (w^*, z^*)} \right| dw^* dz^* \quad (8.42)$$

Para la expresión correspondiente al determinante de la matriz jacobiana, se incluye a la norma unidimensional, más conocida como el valor absoluto, para la transformación de coordenadas, la cual, expresaremos mediante:  $|\mathcal{J}(w^*, z^*)| = \left| \frac{\partial x}{\partial w^*} \frac{\partial y}{\partial z^*} - \frac{\partial x}{\partial z^*} \frac{\partial y}{\partial w^*} \right|$ ; por ende, se debe tener en cuenta, una nueva definición, para el dominio acotado sobre la superficie en el plano de la integral doble; de modo que  $(u, v) \in \mathcal{R}_{(u,v)}$  En ocasiones. dicha transformación de coordenadas, facilita la determinación del valor correspondiente a la integral doble para la función  $f$ .

Para un espacio descrito mediante coordenadas polares, es posible aplicar el concepto de integrales iteradas, lo cual, también se puede definir, a través, de la integral doble para una región polar. De modo general, sobre la superficie del plano, lo cual, para este caso podemos decir que, las regiones polares que se describen mediante regiones planas de tipo *I* y *II*; se expresan en valores fijos para el radio  $R$  y el ángulo  $\theta$  respectivamente.



## Capítulo 9

# Determinación del Área Superficial Sobre el Perfil del Álabes

### 9.1. Descripción general.

El contexto geométrico, el cual, se hace referencia a este capítulo, se centra básicamente en la determinación analítica del valor equivalente al área superficial del perfil para el álabes direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki.

Cabe señalar que, el álabes direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki, se describe de manera física como un sólido rígido; de un punto de vista geométrico da lugar a un análisis para un espacio euclideo real  $\mathbb{R}^3$ .

Además, de un punto de vista técnico, el álabes direccional de esta turbina, se encuentra compuesta de manera paralela por dos placas, cuya geometría superficial del perfil de estas dos placas tienen. Estas placas paralelas, se encuentran unidas mediante una placa transversal soldada con una una inclinación visto de perfil.

Por otro lado, la finalidad principal en el desarrollo de este análisis, radica de manera de manera escalonada, la determinación del volumen total del álabes direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki. Esto generaría una consecuencia, en nuevo análisis a través de elementos de volumen en el álabes direccional. Mencionando que, es necesario conocer dicho valor para poder realizar un futuro

análisis de flujo dinámico hidáulico circundante al álabe direccional, con el objetivo de poder describir el índice de eficiencia hidráulica de manera cuantitativa, a través de un proceso analítico estimativo.

El proceso de análisis, para la determinación del área superficial total del perfil del álabe direccional de la turbina de media potencia, tipo Michell Banki; se desarrolla mediante regiones acotadas en dicha superficie, denominándose estas subregiones, considerando en la determinación de estas subáreas la estandarización a través del dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ .

## 9.2. Esquematización de la Superficie Para el Perfil del Álabe.

Se hace necesario, y también por conveniencia, generar una representación del perfil superficial del álabe direccional de la turbomáquina generadora de potencia. Lo cual, como ha visto anteriormente, la estandarización del perfil superficial del álabe direccional, se asume como dominio coordenado cartesiano estandar, al dominio representado por el plano  $\wp(x, y)$ . En consecuencia, los dominios coordenados cartesianos referenciales, que se representan por medio de los planos  $\wp(u, v)$  y  $\wp(\alpha, \beta)$ , los podemos estandarizar, a través de; para el caso del dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , se debe aplicar la transformación de rotación de ejes coordenados para el ángulo que se señala; y para el dominio coordenado cartesiano referencial  $(\alpha, \beta)$ , además se debe aplicar de la transformación de traslación de ejes coordenados para el vector de traslación correspondiente, a su vez, la transformación de rotación de ejes coordenados, cuyo ángulo en este caso, es distinto que en el caso anterior.

Por simplicidad en la determinación de los valores asociados a la determinación del área superficial del perfil del álabe, se estandariza al dominio coordenado cartesiano representado por el plano  $\wp(u, v)$ , como se muestra en la figura ().

A través de la estandarización para el dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , el área de la superficie del perfil del álabe direccional; por simplicidad, es necesario dividir en subregiones, las cuales, denominaremos como regiones  $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^4$ , resultando como resultante total del valor del área de la superficie del perfil, las suma de todas las subáreas  $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^4$ , que se encuentran divididas en toda la superficie del perfil del álabe.

Como lo muestra la gráfica del contorno del perfil del álabe, de la figura 10.1. En sentido de

Figura 9.2: Representación gráfica, correspondientes a las distintas divisiones sobre las regiones que componen la superficie del perfil del álabe; a través de, puntos y rectas sobre dicha superficie.

Por lo tanto, podemos señalar al respecto que, el trabajo que se desarrolla, debe estar de acuerdo con lo expuesto anteriormente, por ende, y como lo muestra la figura 10.2; en la intersección entre la recta del contorno sobre el plano  $\wp(x, y)$  y la ordenada para el plano  $\wp(u, v)$ , se genera de manera arbitraria un nuevo vértice denominado  $F$ .

### 9.3. Determinación del Valor Analítico Para la Subárea $\mathcal{A}_2$ .

Para la región  $\mathcal{R}_1$ , de la superficie del perfil del álabe direccional, en cuyo plano  $\wp(u, v)$ , que compone el área total superficial del perfil para el álabe direccional, que es denominada a través de  $\mathcal{A}_1$ , definida mediante las rectas generadas por el contorno del álabe direccional; tal que, estas generan un polinogo en dicho espacio, sobre el dominio coordenada cartsiano  $(u, v)$ .

Esta región  $\mathcal{R}_1$ , la podemos representar mediante una subárea, cuya nomenclatura es referente a:  $\mathcal{A}_1$ . Mediante su gráfica, dónde se encuentra las intersecciones entre las rectas y los ejes coordenados para el dominio coordenado cartesiano referencial  $(x, y)$ , que se expresasa a través del plano  $\wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2$ . De este modo, los ejes del dominio coordenado cartesiano estandar  $(x, y)$ , pueden asumirse como rectas que intersectan a las rectas de los tramos de manera general  $\overline{CD}$  y  $\overline{OD}$ , cuyo tramo acotado para este caso del tramo  $\overline{CD}$ , equivale al segmento  $\overline{FD}$ .

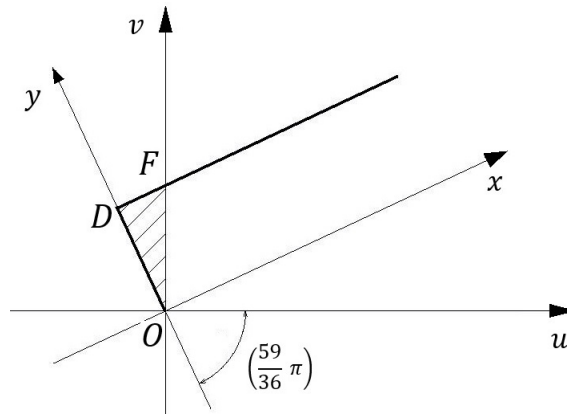


Figura 9.3: Representación gráfica de la subárea  $\mathcal{A}_1$  en la superficie del perfil del álabe direccional.

La representación de la subárea  $\mathcal{A}_1$ , generada como se observa en la gráfica de la figura 10.3;

muestra a la intersección entre las rectas y los ejes del dominio coordenado cartesiano estandar  $(x, y)$ , que representa al plano  $\wp(x, y)$ , que se encuentran involucrados en este caso. Para el caso, de la estandarización correspondiente para el dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , en dicha gráfica, dónde se muestra la subárea  $\mathcal{A}_1$  a través de sus vértices, los cuales, son denominados por  $O$ ,  $D$  y  $F$ , los cuales, se expresan mediante pares oordenados representados en el dominio coordenado cartesiano  $(u, v)$ , para el plano  $\wp(u, v)$ . Por lo tanto, , la región  $\mathcal{R}_1$ , correspondiente al poligono geométrico que representa a la región que se estudia en este caso, es correspondiente a un triángulo, cuyos lado según sus vértices corresponde  $\triangle QDF$ .

De forma regular, la metodología para la determinación del valor correspondiente a la subárea  $\mathcal{A}_1$ , se determina mediante el método de las integrales dobles sobre superficies planas, como se detalla en el capítulo referente a la **Teoría Infinitesimal Sobre Áreas Planas**.

Utilizando este método, correspondiente a las integrales doble sobre superficies planas, es posible determinar el valor equivalente a la subárea  $\mathcal{A}_1$ . Definiendo en primer lugar, la región correspondiente al poligono generado  $\mathcal{R}_1$ , sobre la superficie en el dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , cuyo plano referente corresponde  $\wp(u, v)$ . Previamente, mediante las ecuaciones involucradas para poder generar una estructura matemática, que represente al valor de la subárea  $\mathcal{A}_1$ , se debe determinar los valores de las interseccies entre los vértices  $D$  y  $F$ , que se muestran en la figura 10.3.

Considerando, la transformación de rotación para ejes coordenados entre los dominios coordenados cartesianos estandar  $(x, y)$  y referencial  $(u, v)$ , ambos dominios representados por los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ ; dónde, el ángulo de rotación equivalente, en este caso, corresponde  $\mu = \frac{59}{36}\pi$ .

De manera general, durate el proceso para la determación del valor equivalente a la subárea  $\mathcal{A}_1$ , se expresará al ángulo de rotación, en radianes.

Por lo tanto, la ecuación matricial que describe la transformación de rotación de ejes cartesianos entre los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ , es descrita de manera analógica y algebraica, a continuación:

$$[\mathcal{U}] = \left[ \mathcal{M}_{\mu=\left(\frac{59}{36}\cdot\pi\right)} \right]^{(-1)} [\mathcal{X}] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{59}{36}\cdot\pi\right) & \sin\left(\frac{59}{36}\cdot\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{59}{36}\cdot\pi\right) & \cos\left(\frac{59}{36}\cdot\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por otro lado, las ecuaciones correspondientes al contorno equivalentes a los segmentos que se indican en la figura 10.3; equivalentes a los trazos  $\overline{DF}$  y  $\overline{OD}$ , dónde, la intersección correspondiente equivale al vértice  $D$ . Dicho valor, es expresado en el dominio coordenado cartesiano  $(u, v)$ , cuyo plano

corresponde  $\wp(u, v)$ , y es equivalente a:  $(0, 4)^T$ . Según esto, al expresar este valor en términos del dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , podemos decir que:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) & \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \\ -\sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) & \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Desacoplando las ecuaciones, que se involucran en el sistema matricial de ecuaciones para dicha transformación de ejes coordenados. De este modo, los valores resultantes para  $u$  y  $v$ , se encuentran sujetos a la resultante de dicha transformación de rotación de ejes coordenados para los planos descrito de  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ . Por lo tanto, el valor analítico correspondiente a la subárea  $\mathcal{A}_1$ , una vez conocido las componentes del par ordenado del vértice  $D$  en el plano  $\wp(u, v)$ , se puede plantear una expresión que conduzca a conocer de manera analítica el valor de la subárea  $\mathcal{A}_1$ , correspondiente a la región  $\mathcal{R}_1$ , sobre la superficie del perfil del álabe direccional

$$\left. \begin{aligned} u &= 4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \\ v &= 4 \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

También, es necesario que, las ecuaciones que describen a los segmentos  $\overline{DF}$  y  $\overline{OD}$ , deben estar expresados para el dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , cuyo plano característico equivale  $\wp(u, v)$ . En consecuencia, utilizando la ecuación matricial de ecuaciones que describe la transformación de rotación para ejes coordenados, entre los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ . Esta transformación, en este caso, la expresaremos mediante:

$$[\mathcal{X}] = \left[ \mathcal{M}_{\mu=\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)} \right] [\mathcal{U}] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) & -\sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \\ \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) & \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Según la transformación de rotación para ejes coordenados; además, considerando al vértice  $D$ , como vector transpuesto, bajo el supuesto que la distancia existente corresponde a la norma de dicho para dicho par ordenado sobre el plano  $\wp(u, v)$ . Por ende, diremos que este vector transpuesto corresponde:  $(0, 4)^T$ , en consecuencia a esto, diremos que, el valor respectivo del vector columna mencionado para esta transformación, expresado en la ecuación matricial que describe la rotación de ejes coordenados, es equivalente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) & -\sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \\ \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) & \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Desacoplando la ecuaciones involucradas en la ecuación matricial, correspondiente a la transformación de ejes coordenados entre los planos que se describen  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ , se plantea:

$$\begin{cases} 0 = \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) u - \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) v \\ 4 = \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) u + \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) v \end{cases}$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{cases} v = \cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) u \\ v = 4 \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) - \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) u \end{cases} \quad (9.2)$$

De esta manera, es posible expresar la región  $\mathcal{R}_1$ , siendo esta región descrita en el plano  $\wp(u, v)$ . Por lo tanto, el criterio a utilizar para describir esta región sobre la rotación de ejes coordenados para los planos  $\wp(x, y)$  y  $\wp(u, v)$ , basado en el método para la determinación del área mediante la integración doble sobre superficies planas del tipo  $\mathcal{I}$  Por ende, podemos mencionar que, la región plana  $\mathcal{R}_1$ , se posible expresar, mediante este criterio señalado. La región  $\mathcal{R}_1$ , se describe mediante la expresión:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} [0, 4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)] \in v \subseteq \mathbb{R} \\ [\cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u, 4 \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) - \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u] \in u \subseteq \mathbb{R} \end{cases} \quad (9.3)$$

Entonces, el valor equivalente de la subárea  $\mathcal{A}_1$ , el cual, como ya se ha mencionado anteriormente, es posible determinarse, a través del método de las integrales dobles para superficies planas del tipo  $\mathcal{I}$ . De esta manera, expresión analítica que representa al método señalado, equivale:

$$\mathcal{A}_1 = \int \int_{\mathcal{R}_1} f(u, v) d\mathcal{A}_1 \quad : \quad f(u, v) = 1 \quad (9.4)$$

Por lo tanto, el valor equivalente a la subárea  $\mathcal{A}_1$ , correspondiente a la región del perfil del álabe direccional  $\mathcal{R}_1$ , en este caso, corresponde:

$$\mathcal{A}_1 = \int_{4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \int_{\cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u}^{4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) - \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u} dv du \quad (9.5)$$

De esta forma, determinaremos el valor equivalente para la subárea  $\mathcal{A}_1$  de forma detallada. Entonces, de esta manera obtendríamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \int_{4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \int_{\cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u}^{4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) - \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u} dv du \\ &= \int_{4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 v \Big|_{\cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u}^{4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) - \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u} du \\ &= \int_{4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) - \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u \right] - \left[ \cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u \right] du \\ &= \int_{4 \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] - \left[ \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u + \cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot u \right] du \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] du - \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left\{ \left[ \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) + \cot\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] \cdot u \right\} du \\
&= \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] du - \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left\{ \left[ \frac{\sin^2\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) + \cos^2\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}{\cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)} \right] u \right\} du \\
&= \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] du - \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left\{ \left[ \frac{2}{2 \cos\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)} \right] u \right\} du \\
&= \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] du - \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 \left\{ \left[ \frac{2}{\sin\left(\frac{59}{18} \cdot \pi\right)} \right] u \right\} du \\
&= \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] \cdot \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 du - \left[ \frac{2}{\sin\left(\frac{59}{18} \cdot \pi\right)} \right] \cdot \int_{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)}^0 u du \\
&= (-1) \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] \cdot \int_0^{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)} du + \left[ \frac{2}{\sin\left(\frac{59}{18} \cdot \pi\right)} \right] \cdot \int_0^{4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)} u du \\
&= (-1) \left[ 4 \cdot \sec\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] \cdot \left\{ 4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right\} + \left[ \frac{1}{\sin\left(\frac{59}{18} \cdot \pi\right)} \right] \cdot \left\{ 4 \cdot \sin\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right\}^2 \\
&= (-1) \left[ 16 \cdot \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) \right] \\
&= -16 \cdot \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right) + 8 \cdot \tan\left(\frac{59}{36} \cdot \pi\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, la resultante para la subárea  $\mathcal{A}_1$ , sobre la región  $\mathcal{R}_1$ , equivale:

$$\therefore \mathcal{A}_1 = \left| 8 \cdot \tan \left( \frac{59}{36} \cdot \pi \right) \right| \quad (9.6)$$

Bajo criterios sobre las medidas geométricas euclideas, una distancia, un área y un volumen, nunca pueden representarse de manera algebraica, como un valor negativo de esta. Por lo tanto, al expresar el valor equivalente de la subárea  $\mathcal{A}_1$ , de manera analítica, según la resultante anterior, corresponde:

$$\mathcal{A}_1 = 8 \cdot \tan \left( \frac{59}{36} \cdot \pi \right) \quad (9.7)$$

#### 9.4. Determinación del Valor Analítico Para la Subárea $\mathcal{A}_2$ .

Al considerar, para este caso la región sobre la superficie del perfil del álabe direccional; como ha sido el comun denominador de este capítulo. Siendo esta región, según como estudiaremos cada caso de particiones referente al area total generada en la suoefficie del álabe direccional. La sucesión que se describe desde un comienzo en la sesión 10.2; corresponderá al estudio de cada subárea particionada de izquierda a derecha. Por lo tanto, en esta sección, corresponderá a la región  $\mathcal{R}_2$ , cuya subárea generada equivale a la subárea  $\mathcal{A}_2$ .

Como se muestra en la figura 10.4; a continuación, bajo la estandarización del dominio coordenadfo cartsiano referencial  $(u, v)$ , representado a través del plano  $\wp(u, v) \subseteq \mathbb{R}^2$ . En esta figura, se señala la región  $\mathcal{R}_2$ , que se estudiará en este caso sobre la superficie del álabe direccional.

En el dominio coordenado referencial  $(u, v)$ , naturalmente se describe sobre la región  $\mathcal{R}_2$ , cuyo contorno inferior según la figura 10.4; se describe un arco de cuerda, la cual, se expresa mediante la ecuación característica, que rije para todo el contorno descrito mediante la cuerda  $\widehat{OB}$ . Dicha ecuación, corresponde:

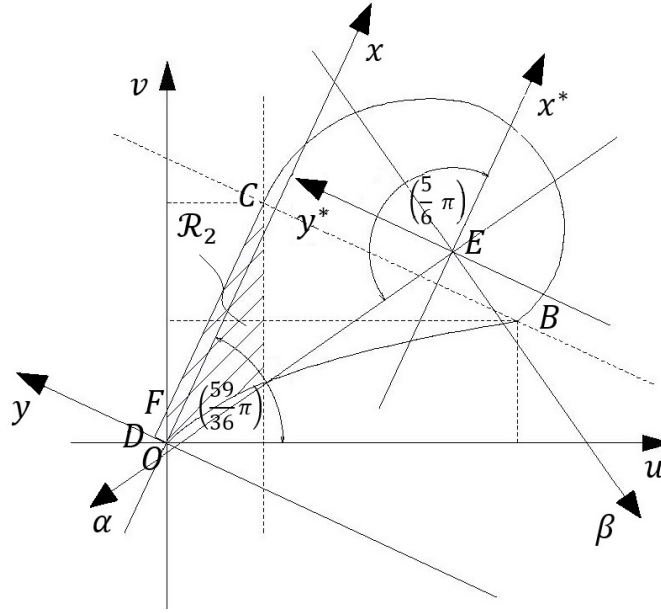


Figura 9.4: Representación gráfica de la región  $\mathcal{R}_2$ , generada sobre la superficie del perfil del álabe direccional.

$$v = 20 \cdot \ln \left( \frac{u+20}{20} \right) \quad \in \quad \wp(u, v) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (9.8)$$

Por otro lado, existe una limitante recta, la cual, esta se describe para el segmento geométrico superior correspondiente a la región  $\mathcal{R}_2$ , siendo este segmento denominado  $\overline{CF}$ . En general, la ecuación que describe a todo el segmento geométrico  $\overline{CD}$ . Conociendo que, segmento geométrico  $\overline{CD}$ , se encuentra definido de manera algebraico, a través de la expresión:

$$\left. \begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{DF} + \overline{FC} \\ \forall \quad \overline{CD} &\in \wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

## 9.5. Determinación del Valor Analítico Para la Subárea $\mathcal{S}_3$

La estandarización correspondiente al dominio coordenado cartesiano, representado por medio del plano geométrico  $\wp(u, v)$ , como se muestra en la figura . En estas figuras, se representa de manera

gráfica, de manera general y de manera segmentada, según las distintas subregiones que componen la superficie del perfil del álabe direccional de la turbina de media potencia.

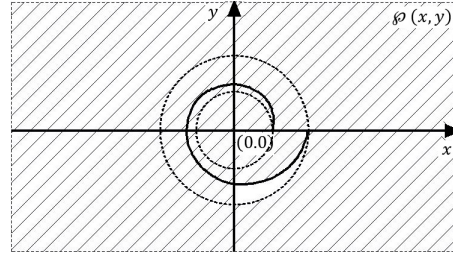


Figura 9.5: •

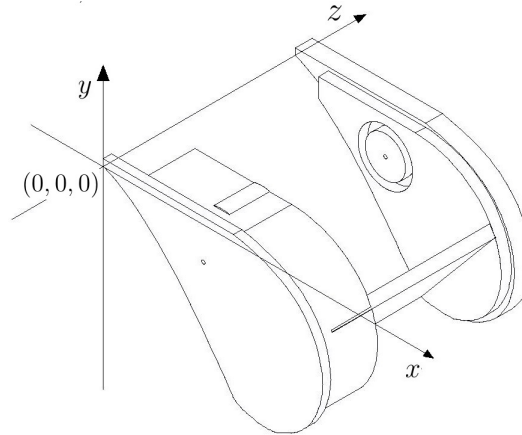


Figura 9.6: •

Según la figura demostrativa .2; la subárea  $\mathcal{S}_3$  se encuentra sobre la superficie, se encuentra sobre los vértices  $B$ ,  $C$  y  $G$ . Primeramente, se hace necesario conocer el valor de modo algebraico de la recta  $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_3}$  que une los vértices  $B$  y  $C$ , cuyos valores se encuentran representados en el mismo plano geométrico. Este plano geométrico referencial, el cual, corresponde al dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , el cual, se encuentra representado, mediante el plano geométrico  $\phi(u, v)$ .

### 9.5.1. Determinación de la Recta $\mathcal{L}_{S3}$ .

El segmento geométrico, que une a los vértices, en la superficie del perfil del álabe direccional, que se encuentran contenidos entre los vértices  $B$  y  $C$ ; cuyos valores experimentales, por naturaleza de dichos puntos, corresponden a planos geométricos distintos, sobre la misma superficie.

Los valores experimentales, de los pares que se describen para los vértices  $B$  y  $C$ ; se expresan mediante:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \in \wp(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad : \quad C(x, y) = (78, 4) \\ \forall \in \wp(u, v) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad : \quad B(78, 4) = \left(106, \ln \left[\left(\frac{63}{10}\right)^{20}\right]\right) \end{array} \right\} \quad (9.10)$$

Al estandarizar el dominio coordenado cartesiano referencial  $(u, v)$ , como se muestra en las figuras anteriores, cuyo propósito es, la simplificación para el desarrollo de manera analítica.

Según la expresión anterior, la estandarización del plano geométrico superficial  $\wp(u, v)$  en función de la rotación de ejes coordenados, según el plano geométrico  $\wp(x, y)$ . El valor del par ordenado  $C(x, y)$ , al aplicar la rotación de ejes coordenados en dicho punto, y entre los planos geométricos  $\wp(u, v)$  y  $\wp(x, y)$ , mediante la expresión matricial genérica, la cual, corresponde:

$$[X] = [\mathcal{M}_\mu][U]$$

Dónde, los valores de los vectores columnas  $[X]$  y  $[U]$ , describen de manera matricial a los planos geométricos cartesianos  $\wp()$ ; y el ángulo de rotación entre ambos dominios coordenados cartesianos, es denominado  $\mu$ , se encuentra descrito en radianes, y es equivalente a  $\frac{59}{36} \cdot \pi$ .

Determinando el valor expresado del par ordenado  $C$ , sobre el plano geométrico  $\wp(x, y)$ ; podemos decir:

$$[X]_C = [\mathcal{M}_\mu][U]_C$$

$$[U]_C = [\mathcal{M}_\mu]^{-1} \cdot [X]_C$$

Algebraicamente, expresaremos esta igualdad mediante:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_C$$

Dónde, el par ordenado equivalente sobre el plano geométrico  $\wp(x, y)$ , siendo este valor  $C = (78, 4)$ ; se debe reemplazar, el valor del vector columna en la expresión  $[X]_C$ , podemos señalar que:

$$[X]_C = \begin{pmatrix} 78 \\ 4 \end{pmatrix}_C^T$$

Luego, expresaremos en la expresión algebraica resultante para  $[U]_C$ , entonces:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 78 \cos \mu + 4 \sin \mu \\ -4 \sin \mu + 78 \cos \mu \end{pmatrix}^T$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_C = 2 \begin{pmatrix} 39 \cos \mu + 2 \sin \mu \\ -2 \sin \mu + 39 \cos \mu \end{pmatrix}^T \quad \mathcal{M}_{1j} : j = 1, 2 \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (9.11)$$

Considerando la estructura de la expresión (2), que expresa el valor del par ordenado  $B \subset \wp(u, v)$ , cuyo valor corresponde al valor extremal sobre este dominio coordinado cartesiano, que se describe mediante en este plano geométrico. Por ende, el vector columna que expresa el valor referencial  $[U]_B$ , es equivalente:

$$[U]_B = \left( \begin{array}{c} 106 \\ \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] \end{array} \right) \mathcal{M}_{1j^*} : j^* = 1, 2 \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (9.12)$$

Sea la recta que pasa por los puntos  $B$  y  $C$ , denominada mediate  $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_3}$ , expresandose mediante la igualdad:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}_3} \quad \Delta v = m_{ij} \Delta u \quad (9.13)$$

Dónde, los valores de la expresión (4)  $\Delta u$  y  $\Delta v$ , representan diferencias lineales entre los ejes del plano geométrico cartesiano  $\wp(u, v)$ . El valor de la pendiente, se encuentra definido por medio de los valores finitos resultantes de  $\Delta u$  y  $v$ .

Luego, si al volver a expresar la ecuación (4), de una manera distinta, se determina la estructura resultante de la pendiente  $m_{ij}$ , la cual, es equivalente:

$$\Delta v = m_{ij} \Delta u$$

$$m_{ij} = \frac{\Delta v}{\Delta u}$$

$$m_{ij} = \frac{v_j - v_i}{u_j - u_i} \quad \forall \Delta u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (9.14)$$

Al reemplazar los valores de las componentes correspondiente a los vectores columnas  $[U]_B$  y  $[U]_C$ , en la ecuación (5), obtendríamos:

$$m_{ij} = \frac{[-39 \sin \mu + 2 \cos \mu] - \left[ \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] \right]}{[39 \cos \mu + 2 \sin \mu] - [106]} \quad (9.15)$$

Considerando que, existe una expresión que relaciona al producto generado entre la pendiente de la recta  $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_3}$  y la recta normal en el punto  $B$ . Por lo tanto, podemos decir:

$$m_{ij} \cdot m_{ji}^N = -1 \quad (9.16)$$

Dónde, la pendiente de la recta normal, cuya resultante  $m_{ji}^N$ , equivale:

$$m_{ji}^N = \frac{-1}{m_{ij}} \Leftrightarrow m_{ji}^N = \frac{u_i - u_j}{v_j - v_i} \quad (9.17)$$

Reemplazando, la expresión de la pendiente de la recta sobre el punto  $B$ , determinaremos el valor de la pendiente de la recta normal en dicho punto  $m_{ji}^N$ , lo cual, se expresa mediantes:

$$m_{ji}^N = \frac{[106] - [39 \cos \mu + 2 \sin \mu]}{[39 \sin \mu + 2 \cos \mu] - \left[ \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] \right]} \quad (9.18)$$

De manera genérica, determinaremos una expresión para la ecuación característica correspondiente a la recta  $\mathcal{L}[\mathcal{S}_3]$ , para el plano geométrico cartesiano  $\wp(u, v)$ .

$$\Delta v = m_{ij} \Delta u$$

$$(v - v_i) = \left( \frac{-1}{m_{ji}} \right) (u - u_i)$$

$$(v - v_i) = \left( \frac{-1}{\left[ \frac{u_j - u_i}{v_j - v_i} \right]} \right) (u - u_i)$$

$$(v - v_i) = \left( \frac{v_i - v_j}{u_j - u_i} \right) (u - u_i)$$

$$v \left( \frac{1}{v_i - v_j} \right) - v_i \left( \frac{1}{v_i - v_j} \right) = u \left( \frac{1}{u_j - u_i} \right) - \left( \frac{1}{u_j - u_i} \right) u_i$$



$$\frac{v-v_i}{v_i-v_j} = \frac{u-u_i}{u_j-u_i} \quad (9.19)$$

En esta última expresión, al reemplazar los valores correspondientes:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= 106 & v_i &= \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] \\ u_j &= 37 \cos \mu + 2 \sin \mu & v_j &= -37 \sin \mu + 2 \cos \mu \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Reemplazando los valores descritos en la expresión (11), sobre la expresión (10), podemos obtener:

$$\frac{v - \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right]}{2 \cos \mu - 37 \sin \mu - \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right]} = \frac{u - 106}{37 \cos \mu + 2 \sin \mu - 106} \quad (9.21)$$

Esta igualdad, la podemos expresar mediante una recta sobre el plano, mediante el concepto de función en dos variables sobre el plano que se describe esta recta. Según esto, podemos decir, que la función correspondería:

$$f(u, v) = \frac{v - \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right]}{2 \cos \mu - 37 \sin \mu - \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right]} - \frac{u - 106}{37 \cos \mu + 2 \sin \mu - 106} \quad (9.22)$$

### 9.5.2. Determinación Matricial de la Recta $\mathcal{L}_{S_3}$ .

Al reescribir la expresión que determina el valor resultante de la pendiente de la recta  $\mathcal{L}_{S_3}$ , la cual, denominamos  $m_{ij}$ , siendo esta equivalente:

$$m_{ij} = \frac{[-39 \sin \mu + 2 \cos \mu] - \left[ \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] \right]}{[39 \cos \mu + 2 \sin \mu] - [106]} \quad (9.23)$$

Reescribiendo esta expresión para  $m_{ij}$ , en la cual, los términos correspondientes equivalente a: 106 y  $\ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right]$ , los expresaremos de un modo distinto. Entonces:

$$m_{ij} = \frac{[-39 \sin \mu + 2 \cos \mu] - \left[ 2 \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{10} \right] \right]}{[39 \cos \mu + 2 \sin \mu] - [106]} \quad (9.24)$$

Es necesario, la realización de un arreglo matricial, para los valores expresados entre paréntesis rectos dentro de  $m_{ij}$ . Por lo tanto, dichos valores, lo podemos expresar mediante el producto de vectores fila y vectores columnas. Entonces:

$$m_{ij} = \frac{\left[ \begin{pmatrix} -\sin \mu \\ \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 & 2 \end{pmatrix} \right] - \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{10} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \right]}{\left[ \begin{pmatrix} \cos \mu \\ \sin \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 & 2 \end{pmatrix} \right] - \left[ \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln [e^{(106)}] \\ 0 \end{pmatrix} \right]} \quad (9.25)$$

En cada uno de los términos descritos anteriormente, correspondiente a la resultante de  $m_{ij}$ , podemos expresar la resultante anterior; tanto en el denominador como en el numerador de este cociente mediante la diferencias entre matrices cuadradas. Por lo tanto, debemos considerar como bases, para tal efecto, las bases canónicas en un espacio bidimensional. Las bases correspondiente, a los vectores canónicos  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ , son equivalentes:

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0)^T \\ \vec{e}_2 &= (0, 1)^T \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

Aplicando, los valores de las bases correspondiente a los vectores canónicos traspuestos  $\{\vec{e}_2\}^T$  y  $\{\vec{e}_1\}^T$ , podemos encontrar la descripción en dichos términos una resultante para la pendiente  $m_{ij}$ , a través de matrices cuadradas  $\mathcal{M}_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^2$ .

Además, en la expresión correspondiente a los vectores columnas, cuyas componentes equivalen a valores trigonométricos sobre las matrices cuadradas que se encuentra; tanto, en el numerador como

en el denominados, para la resultante de la pendiente  $m_{ij}$ . Dicha matriz, corresponde a la matriz de rotación para un ángulo  $\mu = \frac{59}{36}\pi$ . Este valor, de forma genérica, mantiene su expresión a través de la letra  $\mu$ ; siendo esta matriz de rotación, descrita de forma genérica mediante  $[\mathcal{M}_\mu]$ . Por ende, el valor resultante, expresado a través de esta transformación, corresponde:

$$m_{ij} = \frac{\left\{ \left[ \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -39 & 2 \end{pmatrix} \right\} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{10} \right] & 0 \\ 0 & \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{10} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\}}{\left\{ \left[ \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 39 & 2 \end{pmatrix} \right\} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \ln [e^{53}] & 0 \\ 0 & \ln [e^{53}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\}}$$

De este modo, el valor de la pendiente  $m_{ij}$ , según lo expresado anteriormente, corresponde:

$$m_{ij} = \frac{39 \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] & 0 \\ 0 & \ln \left[ \left( \frac{63}{10} \right)^{20} \right] \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln [e^{(106)}] & 0 \\ 0 & \ln [e^{(106)}] \end{pmatrix}} \quad (9.27)$$

El valor resultante, para la nueva expresión de la pendiente de la recta  $\mathcal{L}_{S_3}$ , que expresamos anteriormente mediante  $m_{ij}$ . De manera genérica, el valor resultante de esta expresión, correspondería:

$$m_{ij} = \frac{39[\mathcal{M}_\mu] - [\mathcal{M}_O^{Y_A}]}{2[\mathcal{M}_\mu] - [\mathcal{M}_O^{Y_A \alpha}]} \quad (9.28)$$

Sobre la matriz, la cual es denominada mediante la simbología  $[\mathcal{M}_O^{Y_A \alpha}]$ , correspondiente al valor extremal, sobre la abscisa en el plano geométrico cartesiano  $\wp(u, v) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Por ende, la construcción matricial de dicho valor  $u_i$ , corresponde:

$$u_i \; = \; 106$$

$$= \; \ln \left[ e^{(106)} \right]$$

$$= \; 2 \ln \left[ e^{53} \right]$$

$$= \; \left( \begin{array}{cc} 2 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \ln \left[ e^{(53)} \right] \\ 0 \end{array} \right)$$

$$= \; \left( \begin{array}{cc} 2 & 0 \end{array} \right) \left[ \left( \begin{array}{cc} \ln \left[ e^{(53)} \right] & 0 \\ 0 & \ln \left[ e^{(53)} \right] \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \right]$$

$$= \; 2 \left( \begin{array}{cc} \ln \left[ e^{(53)} \right] & 0 \\ 0 & \ln \left[ e^{(53)} \right] \end{array} \right)$$

$$= \; \left( \begin{array}{cc} \ln \left[ e^{(106)} \right] & 0 \\ 0 & \ln \left[ e^{(106)} \right] \end{array} \right)$$

$$u_i \; = \; \left[ \mathcal{M}_{OA}^{Y\alpha} \right]$$

# Bibliografía

- [1] BRESLIN, W.R.,  
*Small Michell Banki Turbine: A construction manual*,  
Volunteers in Technical Assistance  
**Maryland - United States 1979**
  
- [2] HELMUT SCHEURER, REINOLD MATZLER, BOB YODER  
*German Appropriate Exchanges Technology*  
*Deutsches Zentrum für Entwicklungstechnologien*  
**Manual for the construction of a Cross-flow Turbine.**  
**Bonn - West Germany 1980**
  
- [3] LUIS A. SANTALÓ  
*Geometría Projectiva*  
*Editorial Universitaria de Buenos Aires*  
**Buenos Aires - 1977**
  
- [4] ALEXANDER MOOD & FRANKLIN GRAYBILL  
*Introducción a la Teoría de la Estadística*  
*Editorial Aguilar*  
**Madrid - 1978**
  
- [5] WALTER RUDIN  
*Principios del Análisis Matemático*  
*Mc GrawHill - México*  
**México - 1980**

- [6] NICOLAI PISKUNOV  
*Cálculo Diferencial e Integral*  
*Editorial MIR*  
**Barcelona - 1976**
- [7] N. H. COSTA PEREIRA & J.E. BORGES  
*Study of the Nozzle flow in a Cross-Flow Turbine*  
*School of Engineering, University Instituto Superior Tecnico. Technical University of Lisbon,*  
**Lisboa -Portugal 1996**
- [8] BRYAN HO-YAN<sup>1</sup>, W. DAVID LUBITZ  
*Cálculo Diferencial e Integral*  
*Editorial MIR*  
**Barcelona - 1976**
- [9] GEORGE ARFKEN & HANS WEBER  
*Mathematical Methods For Physicist*  
*Elsevier Academic Press*  
**San Diego, Ca. - United States 2005**
- [10] SCHIFTENREINE SCHIFFBAU  
*Artur Stück*  
*Mathematical Methods For Physicist*  
*Technischen Universität Hamburg* **Hamburg - Germany 2011**
- [11] GONZALO ANDRÉS MOYA NAVARRETE  
*Modelación de Parámetros Geométricos Para un Álabo Direccional de una Turbina de Media Potencia*  
*Trabajo de Título para optar al Grado Académico de Ingeniero Mecánico*  
*Universidad de La Frontera*  
**Temuco - Chile 2015**
- [12] SUK-HWAN SUH, SEONG-KYOON KANG, DAE-HYUK CHUNG & IAN STROUD  
*Theory and Design of CNC Systems*  
*Springer Verlag London Limited*  
**London - United Kingdom 2008**