

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Solución numérica de la ecuación de Richards con término fuente no lineal, mediante el método de diferencias finitas generalizadas.

Por

Eduardo Contrera Schneider

Profesor Guía

Dr. Emilio Cariaga López

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco - 7 de abril de 2023

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

Dr. Emilio Cariaga López

Profesor informante:

Dr. Ramón Bécar Collao

Profesor informante:

Dr. Cristian Farías Vega

Director del Programa (Ministro de fe):

Dr. Jacobo Hernández

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional postgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas dinámicos y evolutivos. Específicamente:

- Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes de sistemas dinámicos y evolutivos.
- Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.
- Desarrolla y/o utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos y evolutivos.
- Comunica información científico-matemática con rigurosidad técnica y claridad en el ámbito de la matemática aplicada.

Agradecimientos

A mi hija Helena por ser luz en la oscuridad.

A Alejandra, compañera eterna en un sinfín de batallas que me regaló el más hermoso de los regalos.

A mis padres Luis e Isabel, cuyo infinito apoyo hace que cada carga sea más liviana.

Al profesor Emilio Cariaga por su amabilidad, disponibilidad y paciencia.

A Pablo Miño, John, Daniel, Fernando Peña, Fernando Vargas, Leonardo, Alex, Pablo Alcázar y Diego, cuya amistad es fundamental y sincera.

A Francisco, María José, Guillermo y Jorge, que hicieron cada jornada del programa más entretenida y llevadera.

A todos ustedes mis infinitos agradecimientos por aportar en distintas formas a mi
 vida.

Abstract

Generalized finite difference method (GFDM) has turned out to be a good option as a method for solving partial differential equations numerically speaking. This method belongs to *meshless methods* family and it allows to work with explicit and implicit schema on irregular domains. Discretization over these domains may consist in an arbitrary point distribution.

Richard's equation is a non linear partial differential equation that includes a differential operator with parabolic and elliptic components. Non linear terms in this equation are often hard to deal analitically, so there are few works presenting analitical solutions in the sorrounding literature.

This work presents a direct application of generalized finite difference method on Richard's equation exposing computational results performed with Matlab. Codes belong to the author itself. Results are compared with analitical solutions given by other researchers.

Resumen

El método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) ha demostrado ser una buena opción como método de resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales. Este método pertenece a la familia de *meshless methods* y permite trabajar esquemas explícitos e implícitos de resolución en dominio irregulares. La discretización de estos dominios puede realizarse con distribuciones de puntos de forma arbitraria.

La ecuación de Richards es una ecuación diferencial parcial de tipo no lineal con un operador diferencial que tiene partes parabólicas y elípticas. Los términos no lineales presentes en esta ecuación hacen que sea difícil de tratar de forma analítica generalmente, de modo que existen pocos trabajos que presentan soluciones analíticas en la literatura circundante.

Este trabajo presenta una aplicación directa del método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) a la ecuación de Richards, exponiendo resultados de experimentos computacionales realizadas en Matlab, a partir de códigos propios realizados por el autor de este manuscrito. Se comparan los resultados obtenidos con soluciones analíticas proporcionadas por algunos investigadores en otros trabajos.

Índice

1	Introducción	1
2	Objetivos	2
3	Ecuación de Richards con término fuente no lineal3.1Características del suelo3.2Ley de Darcy3.3Ecuación de continuidad3.4Ecuación de Richards	3 3 4 6 8
4	Método de diferencias finitas generalizadas4.1Preliminares	 11 13 18 19 20 22
5	Teoremas de Convergencia 5.1 Ecuaciones parabólicas no lineales 5.2 Ecuaciones hiperbólicas no lineales	24 24 27
6	Solución Numérica 6.1 Ecuación de Richards unidimensional	30 30 31
7	Experimentos computacionales 7.1 Caso unidimensional 7.2 Caso bidimensional con término fuente no lineal	37 37 38
8	Discusión	43
9	Conclusiones	46
10	Bibliografía	47
11	 Anexos 11.1 Diferencias finitas generalizadas en ℝ³	 49 49 53 56 63

1 Introducción

En el campo de la Hidrología, el estudio del flujo de aguas subterráneas [1] es un tema de gran importancia, ya que lleva a modelar el movimiento de aguas en napas y acuíferos [2]. La compreNsión de este fenómeno se utiliza potencialmente para detectar posibles eventos de carácter catastrófico para los ecosistemas como deslizamientos de tierra o inundaciones.

En este contexto, L.A. Richards en [5] presenta una ecuación derivada de la ecuación de continuidad y la ley de Darcy que modela el flujo de líquidos en medios porosos no saturados. La ecuación de Richards es una ecuación no lineal de segundo orden y es conocida por ser difícil de tratar analíticamente debido a los fuertes componentes no lineales que posee en sus términos. Si bien lo usual es tratar la ecuación de forma numérica por las razones antes mencionadas, hay trabajos como los de Hayek [20] y Broadbridge [21] que presentan soluciones analíticas en ciertos casos. En este contexto, estos trabajos son una buena referencia de comparación al utilizar esquemas de resolución numérica para resolver la ecuación de Richards.

El método de diferencias finitas generalizadas es un método de aproximación de derivadas mediante esquemas de diferencias finitas. La característica de generalizada se obtiene por hacer uso del polinomio de Taylor de una función en varias variables y por prescindir de la forma de distribución de puntos en el espacio. Este método tuvo su génesis con Jensen en [6] y autores como Perrone, Kao en [7] y Liszka, Orkisz en [8] contribuyeron en mejorar aspectos computacionales del método.

Los autores F. Ureña, L. Gavete, A. García, J.J. Benito y A.M. Vargas han realizado diversos aportes relacionados al uso del método de diferencias finitas generalizadas para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En [11] y [13] no solamente se presentan pruebas computacionales, sino también resultados teóricos de convergencia en algunas ecuaciones de segundo orden. La importancia de estos trabajos es innegable en cuanto al uso del método y la verificación de los resultados teóricos.

Este trabajo pretende aportar en el contexto de la resolución numérica de la ecuación Richards mediante el uso del método de diferencias finitas generalizadas. Para hacerlo, se realiza en primera instancia una presentación conceptual de la ecuación y el método de diferencias finitas generalizadas. Posteriormente, se resumen resultados de convergencias y se realiza el planteamiento de esquemas numéricos para resolver la ecuación de Richards. Por último, se exponen distintos resultados de experimentos computacionales realizados en Matlab mediante códigos creados por el mismo autor de este trabajo.

2 Objetivos

Objetivo general

Resolver numéricamente la ecuación de Richards con término fuente no lineal mediante el método de diferencias finitas generalizadas

Objetivos específicos

- 1. Resolver computacionalmente la ecuación de Richards mediante el método de diferencias finitas generalizadas.
- 2. Estimar el error a priori del método de diferencias finitas generalizadas aplicado a la ecuación de Richards con término fuente no lineal.
- 3. Establecer condiciones de convergencia del GFDM para resolver numéricamente la Ecuación de Richards.
- 4. Evaluar la exactitud del método GFDM respecto de otros métodos analíticos y numéricos.

3 Ecuación de Richards con término fuente no lineal

Lo que sigue pretende dar un introducción a los orígenes conceptuales que llevan a plantear la ecuación de Richards. Estas ideas están recopiladas de [1], [2], [3] y [4].

3.1 Características del suelo

El suelo por naturaleza está conformado por material sólido, agua y aire. El agua y el aire llenan los espacios existentes entre los granos sólidos de tierra. A tal espacio existente se les llama poros y una medida adecuada para esto es la porosidad. Considerése como volumen de control un trozo de suelo con forma de ortoedro. Así, la porosidad η se define como

$$\eta = \frac{\text{Volumen total de poros}}{\text{Volumen total}} \tag{1}$$

que toma valores entre 0 y 1, ya que representa el porcentaje que no es llenado por el material sólido en el volumen de control. La porosidad es un parámetro que se mide de forma experimental y depende del tipo de suelo. Por ejemplo, en [1] se menciona que para suelos arenosos y arcillas naturales la porosidad está en el rango 0.35-0.45 y 0.4-0.6 respectivamente, sin embargo, en suelos con otras características podría llegar a valores mayores.

El flujo de agua bajo el suelo está condicionado por las mismas características del medio. Se distinguen dos zonas bajo la superficie donde el movimiento del agua tiene distintas características: la **zona insaturada** y la **zona saturada**. La zona insaturada es la primera región vertical por la que se mueve el agua bajo el suelo. Allí, los poros están parcialmente llenos de agua y aire, de modo que el agua no satura por completo los conductos por los cuales se mueve. Más abajo se distingue la zona saturada, que es aquella región donde los poros están completamente llenos de agua. Esta saturación del espacio vacío yace por encima de una capa rocosa de carácter impermeable que marca la frontera inferior de la zona saturada. El límite que separa ambas zonas se llama **capa freática** y su principal característica es que la presión del agua p es igual a la presión en su interior; en la zona insaturada y la zona saturada se tiene que $p < p_{atm}$ y $p > p_{atm}$ respectivamente, siendo p_{atm} la presión atmosférica.

La zona insaturada es común dividirla en tres regiones con distintas propiedades: la zona agua-suelo, la zona intermedia y la franja capilar, listadas en orden descendente. Éstas se pueden ver claramente en la figura 1.

La zona agua-suelo es la zona más cercana a la superficie y es de vital importancia para la vegetación residente ya que ésta depende de agua y aire, recursos que se pueden encontrar en esta parte debido a que los poros no están completamente saturados. La distribución de humedad en esta zona es fuertemente afectada por las condiciones del clima en la superficie, variando en condición de las precipitaciones, la irrigación, la temperatura del aire y la humedad ambiental. La zona intermedia se extiende desde el límite inferior de la zona agua-suelo y por encima del límite superior de la franja capilar. Su existencia depende prácticamente de lo alto que se encuentre la capa freática, pues en caso que sea muy alto la franja capilar se extiende hasta la zona-agua suelo, anulando su existencia. En tiempos de reposición, el agua se mueve temporalmente a través de esta zona por efecto de la gravedad.



Figura 1: Esquema descriptivo del suelo [2]

La franja capilar es la sección más profunda de la zona insaturada y se considera una región donde los poros estás prácticamente saturados. Cabe destacar que la saturación desciende progresivamente a medida que se avanza hacia arriba desde la capa freática, de modo que solamente se encuentran saturados aquellos poros pequeños que estén conectados. El límite superior tiene una forma irregular, pero se considera que debajo de ella el grado de saturación es de al menos un 75 %.

3.2 Ley de Darcy

En 1856 el ingeniero francés Henry Darcy llevó a cabo una serie de experimentos y propuso la ley que lleva su nombre y que rige el movimiento de agua a través de la tierra. Darcy montó un experimento como el de la figura, que consistía en un tubo lleno de una muestra de suelo saturada con agua y conectada a dos reservas en sus extremos. El objetivo principal era medir la cantidad de agua, llamada descarga total Q, que se movía a lo largo de la muestra en un intervalo de tiempo. Se observó que cuando no existía diferencia de altura entre las columnas de las reservas, el agua no se movía a través de la muestra. No obstante, mediante la variación de la diferencia de altura entre las reservas, se notó que había movimiento efectivo del fluido y este era directamente proporcional a esa diferencia. En concreto, se concluyó que la descarga total $Q(\frac{m^3}{seq})$ se puede expresar como

$$Q = kA \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta s} \tag{2}$$

donde $A(m^2)$ es el área transversal del tubo en , $\Delta s(m)$ es el largo de la muestra y k es una constante de proporcionalidad llamada coeficiente de permeabilidad o conductividad hidráulica, cuyas unidades son $\frac{m}{seg}$. Es importante notar que las unidades aquí mencionadas pueden ser cambiadas según el sistema de unidades en el que se quiera trabajar, de modo que se pueden encontrar mediciones en diversas fuentes de las variables y parámetros incluidos en la ecuación (2) en centímetros y minutos como unidades de distancia y tiempo respectivamente.

De la figura 2 se desprende que $p = (\varphi - z)\rho g$ que es la presión que ejerce la columna de agua de altura $\varphi - z$ sobre la entrada del flujo. De aquí que se obtiene la expresión



Figura 2: Experimento de Darcy [1]

$$\varphi = z + \frac{p}{\rho g} \tag{3}$$

que es comúnmente llamado cabezal hidráulico. A los términos z y $\frac{p}{\rho g}$ se les suele llamar cabezal geométrico y cabezal de presión respectivamente. Otra manera de escribir la ley de Darcy es

$$v = -k\frac{d\varphi}{ds} \tag{4}$$

que es una relación diferencial para la velocidad $v = \frac{Q}{A}$ en dirección normal a la superficie A en consideración. En general, las expresiones (2) y (4) son relaciones existentes para un fluido que se mueve de forma unidireccional, no obstante la dirección del movimiento puede ser en cualquier dirección del espacio, de modo que debe considerarse la expresión general $v = (v_x, v_y, v_z)$ con componentes en las direcciones x, y y z. Así, la ley de Darcy expresada en sus distintas componentes es

$$v_{x} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v_{y} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$v_{z} = -k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$
(5)

Distintos experimentos han mostrado que k no solamente es una propiedad característica del suelo, sino también del fluido que se mueve a través de él. En efecto, una propiedad del fluido incidente en la magnitud de la permeabilidad es la viscosidad cinemática ν . Por tanto, una expresión más general y adecuada para k es

$$k = \frac{\kappa g}{\nu} \tag{6}$$

donde κ ahora es un parámetro exclusivamente característico del suelo, g una constante de proporcionalidad y ν la viscosidad cinemática.

Si bien la naturaleza de la permeabilidad k es discutida en varios estudios, el caso del flujo en zona insaturada se vuelve aún más especial. Mediante diversos experimentos se ha comprobado que k en la zona de aireación es una función del contenido volumétrico de aguasuelo (humedad en el suelo). De esta manera, la ley de Darcy para flujo en zona insaturada es de la forma

$$v = -k(\theta)\frac{d\varphi}{ds} \tag{7}$$

siendo θ el contenido volumetrico de agua. Esta relación fue estudiado por el físico estadounidense Edgar Buckingham en su trabajo llamado *Studies on the movement of soil moisture* publicado en 1907. En él estableció que existía una relación entre la evaporación y el contenido de agua en el suelo, adjudicando un sentido de protección por parte del mismo suelo mediante la creación de un mantillo superficial ante condiciones climáticas demasiado aridas. Una relación importante cimentada a partir de este trabajo es la relación entre la conductividad hidráulica K y difusividad agua suelo D en función del contenido de humedad θ , que tiene la forma

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\varphi}{d\theta} \tag{8}$$

propuesta mediante evidencia empírica de datos para distintos tipos de suelos.

3.3 Ecuación de continuidad

Una de las ecuaciones más importantes en la mecánica de fluidos que sirve para entender el movimiento de fluidos es la ecuación de continuidad. Para su deducción se necesita considerar un volumen de control del fluido de forma como se muestra en la figura 3.



Figura 3: Volumen de control del fluido

La ecuación de continuidad postula que la razón neta de cambio de masa dentro del volumen de control es igual a la razón a la que fluye la masa hacia el volumen de control menos la razón a la que fluye la masa afuera del volumen de control. Se puede observar que el flujo másico que cruza una sección en particular está dado por la expresión

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A \tag{9}$$

donde ρ es la densidad del fluido, A es el área de la sección y v es la velocidad del fluido con dirección normal a A. Así, utilizando una aproximación de primer orden por serie de Taylor centrada en P para la función ρv para la cara de salida en dirección x se tiene

$$(\rho v_x)|_{xin} = \rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$
(10)

De la misma manera, para la cara de entrada la expresión es

$$(\rho v_x)|_{xout} = \rho v_x - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$$
(11)

Análogamente, las expresiones de entrada y salida para las otras en las direcciones y y z son

$$\begin{aligned} (\rho v_y)|_{yin} &= \rho v_y + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \\ (\rho v_y)|_{yout} &= \rho v_y - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \\ (\rho v_z)|_{zin} &= \rho v_z + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \\ (\rho v_z)|_{zout} &= \rho v_z - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \end{aligned}$$
(12)

Por tanto, restando la suma de los flujos de entrada con la suma de los flujos de salida se obtiene

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$
(13)

La expresión anterior debe ser igual a la razón neta de cambio de masa dentro del volumen de control, lo cual se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = -\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z - \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{14}$$

Dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y reordenando los términos en el lado izquierdo se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial y} = 0$$
(15)

y usando el operador ∇ , la ecuación de continuidad se transforma en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \tag{16}$$

que es la forma de presentación clásica en el análisis vectorial y la física de fluidos.

3.4 Ecuación de Richards

Para modelar el movimiento de agua a través del suelo en la zona insaturada debemos considerar la ecuación de continuidad (16) y la ley de Darcy para flujos insaturados (7). Primero que todo, se debe tener claro que al escoger un volumen de control del suelo, éste no está completamente compuesto de agua, sino de aire y material sólido también. De tal forma, debemos aplicar la ley de conservación de la masa a la masa de agua y no a la masa existente dentro del volumen de control. Así, veamos que la masa del agua está dada por

$$M_w = \rho_w \theta \Delta x \Delta y \Delta z \tag{17}$$

donde ρ_w es la densidad del agua y $\theta = \frac{V_w}{V_S}$ el contenido volumétrico de agua, es decir, el cociente entre el volumen de agua y el volumen de suelo en el volumen de control. Si se aplica las mismas expresiones de la ecuación de continuidad a la masa del agua se obtiene la expresión

$$\frac{\partial(\rho_w\theta)}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = -\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z - \frac{\partial(\rho_w v_y)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z - \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (18)$$

de modo que dividiendo (17) por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y considerando que el agua es incompresible, entonces se tiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial(v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(v_z)}{\partial y}$$
(19)

Reemplazando v_x, v_y y v_z directamente des
de la ecuación de Darcy (7) para flujos insaturados, da como resultado

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\theta) \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\theta) \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$
(20)

donde φ es la incógnita, $K(\varphi)$ es la conductividad hidráulica, $D(\varphi)$ es la difusividad aguasuelo. En este punto se puede utilizar la regla de la cadena para ver que

$$K(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial x} = K(\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$K(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = K(\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$K(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = K(\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} = D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}$$
(21)

y reemplazando las expresiones en (21) en (20) se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$
(22)

conocida como la ecuación de Richards, presentada por el físico estadounidense Lorenzo Adolph Richards en 1931 en su trabajo *Capillary conduction of liquids through porous mediums* [5]. La ecuación (22) es una de varias formas de presentación que tiene esta ecuación según las variables dependientes e independientes que se pretendan mostrar en la expresión. Si ahora se considera un término que representa la extracción de agua por parte de una raíz, llámese $R(\theta)$, entonces la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} - R(\theta)$$
(23)

Esta ecuación va acompañada de una única condición inicual y condiciones de borde según se especifique un modelo en particular, sin embargo en este trabajo se consideran las siguientes situaciones:

- Se considera un perfil inicial de humedad para t = 0 que se asumen constante a lo largo del dominio espacial.
- Existe un flujo de humedad en una de las fronteras, típicamente para z = 0, que tiene carácter evolutivo o dependiente del tiempo.
- En las fronteras de las otras variables se asume que no hay flujo con el exterior del sistema.
- Para grandes profundidades existe estabilización del flujo de humedad, es decir, la tasa de cambio se anula.

Las ideas antes mencionadas se pueden expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta_0, \forall x, y, z \tag{24}$$

$$\theta(x, y, 0, t) = f(t), \forall x, y, t$$
(25)

$$\frac{\partial \theta(a, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(b, y, z, t)}{\partial x} = 0, \forall y, z, t$$
(26)

$$\frac{\partial \theta(x,c,z,t)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(x,d,z,t)}{\partial y} = 0, \forall x, z, t$$
(27)

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} = 0, \forall x, y, t$$
(28)

considerando el dominio como el conjunto $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \times [0, \infty)$. Si bien esta presentación de la ecuación es de carácter tridimensional, en este trabajo se estudia el caso de dos dimensiones espaciales y una temporal, de modo que el dominio en las variables espaciales se encuentre en \mathbb{R}^2 .

En este escrito se procederá a resolver numéricamente mediante el método de diferencias finitas generalizadas la ecuación de Richards unidimensional

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$
(29)

y la ecuación de Richards bidimensional con término fuente no lineal

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} - R(\theta)$$
(30)

Ambas ecuaciones serán resueltas bajo las condiciones de frontera e inicial expuestas en las expresiones (24) a (28), adaptando a la dimensión correspondiente.

4 Método de diferencias finitas generalizadas

4.1 Preliminares

Para comenzar a discutir el método de diferencias finitas generalizadas (GFDM desde ahora en adelante), es bueno entrar en contexto con una breve revisión del método de diferencias finitas clásicas. Esta revisión puede ser basada en una gran cantidad de literatura que habla respecto de análisis numérico y métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales. En este caso, las ideas han sido inspiradas en los libros de Smith [14], Thomas [15], Strikwerda [16] y Cheney, Kincaid [17], donde los tres primeros representan textos clásicos de resolución numérica de EDP's mediante esquemas de diferencias finitas y el último es una referencia sólida del análisis numérico.

Al resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial se pretende utilizar la misma forma de la ecuación en base a un esquema discretizado haciendo uso de condiciones iniciales o de frontera, que constituye información acerca de la solución. Esto conlleva a tener que aproximar las derivadas involucradas en la ecuación para poder ir generando puntos nuevos de la solución.

Considérese por ejemplo la ecuación del calor dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad k > 0, \quad x \in (a, b), \quad y \in (c, d), \quad t \in (0, \infty)$$
(31)

$$u(a, y, t) = f_1(y, t), \quad u(b, y, t) = f_2(y, t), \quad \forall y \in (c, d), \forall t \in (0, \infty)$$
(32)

$$u(x, c, t) = g_1(x, t), \quad u(x, d, t) = g_2(x, t), \quad \forall x \in (a, b), \forall t \in (0, \infty)$$
(33)

$$u(x, y, 0) = h(x, y), \quad \forall x \in (a, b), \forall y \in (c, d)$$

$$(34)$$

Se comienza por discretizar el dominio en una malla rectangular, que consiste en tomar particiones finitas de los dominios de las respectivas variables independientes. Este tipo de discretización es sencillo de implementar en términos próticos cuando el dominio tiene forma rectangular, es decir, está formado por el producto cruz de intervalos cerrados. Existen casos en los que el problema original no es de forma rectangular, pero dada la geometría del dominio, existe la posibilidad de transformarlo en un problema de coordenadas rectangulares mediante un procedimiento de transformación de coordenadas. En concreto, para el problema planteado en (29-32) se toman conjuntos $\{x_0, x_1, ..., x_N\} \subset [a, b], \{y_0, y_1, ..., y_M\} \subset [c, d]$ y $\{t_0, t_1, ..., t_P\} \subset [0, \infty)$ con

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N, \quad x_0 = a, \quad x_N = b$$
 (35)

$$y_0 < y_1 < \dots < y_N, \quad y_0 = c, \quad y_M = d$$
 (36)

$$t_0 < t_1 < \dots < t_P, \ t_0 = 0, \ t_P = t_{max}$$
(37)

donde t_{max} es un tiempo límite de valor finito que es de interés para el investigador. La inclusión del valor t_{max} tiene su razón en la característica finita de los intervalos a trabajar con la discretización, pero cabe destacar que el dominio de la variable temporal t es de longitud infinita sin extremo derecho.

Así, la forma clásica de resolver numéricamente esta ecuación es usar aproximaciones de las derivadas por diferencias finitas, las cuales son construidas mediante los valores de la función en el punto de interés y en ciertos puntos cercanos a éste. Las aproximaciones para derivadas de primer y segundo orden son

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,y,t+\Delta t) - u(x,y,t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \neq 0$$
(38)

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+\Delta x,y,t) - 2u(x,y,t) + u(x-\Delta x,y,t)}{\Delta x^2}, \quad \Delta x \neq 0$$
(39)

Expresiones similares se pueden construir de la misma forma para derivadas de primer y segundo orden de las otras variables independientes no mostradas en (36) y (37). Al ser una malla de tipo rectangular, un punto interior en el dominio discretizado tiene como puntos más cercanos aquellos que están inmediatamente a la izquierda, derecha, arriba y abajo del punto de interés donde se desea generar la aproximación, tal como se muestra en la figura 4.



Figura 4: Esquema de aproximación diferencias finitas clásicas

Si se utilizan índices i, j y k para indexar los puntos discretizados de las variables x, y y t respectivamente, y v la aproximación discretizada de u, entonces la ecuación (29) se escribe como

$$\frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\Delta t} = k \left(\frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right)$$
(40)

donde $v_{i,j}^k = v(x_i, y_j, t_k)$. La función v es una función definida solamente en la malla rectangular definida previamente, es decir, $Dom(v) = \{x_0, x_1, ..., x_N\} \times \{y_0, y_1, ..., y_M\} \times \{t_0, t_1, ..., t_P\}$, razón por la cual se dice que es una función discreta ya que su dominio consta de una cantidad finita de puntos; (N + 1)(M + 1)(P + 1) puntos para ser más precisos. La función v se dice que es una aproximación razonable si el valor $v(x_i, y_j, t_k)$ está lo suficientemente cerca de $u(x_i, y_j, t_k)$. Si se agrega además

$$v_{i,j}^{0} = h(x_{i}, y_{j})$$

$$v_{0,j}^{k} = f_{1}(y_{j}, t_{k})$$

$$v_{N,j}^{k} = f_{2}(y_{j}, t_{k})$$

$$v_{i,0}^{k} = g_{1}(x_{i}, t_{k})$$

$$v_{i,M}^{k} = g_{2}(x_{i}, t_{k})$$
(41)

entonces se tienen las condiciones iniciales en su forma discretizada.

El esquema presentado en (38) conforma un esquema **explícito** dado que utiliza explícitamente la información en el nivel temporal $t = k\Delta t$ para generar los valores en el nivel $t = (k + 1)\Delta t$. No es difícil ver que la ecuación (38) se puede despejar $v_{i,j}^{k+1}$ en función de los valores de la función v en el nivel temporal $t = k\Delta t$, de modo que si éstos últimos son datos conocidos entonces generar los valores en el nivel $t = (k + 1)\Delta t$ no representa más dificultad que realizar algunas operaciones aritméticas. A grosso modo, en un nuevo nivel t_{k+1} se generan los valores de las fronteras mediante el uso directo de las condiciones iniciales, y los puntos interiores se generan mediante el esquema de aproximación (38).

El uso de esquemas explícitos para resolver ecuaciones diferenciales parciales es simple de usar en términos computacionales cuando existen ciertas propiedades geométricas deseables en el dominio de los problemas, ya sea la convexidad y la simetría. Cabe destacar también que, a pesar de las propiedades nombradas anteriormente, la implementación de diferencias finitas haciendo uso de un esquema explícito no converge en todos los casos. Esto se debe a que las particiones de los intervalos, a criterio total del investigador, inciden de manera directa en la convergencia del método y por tanto para ciertas elecciones del tamaño de paso los valores de la función obtenida se hacen cada vez más grande; en consecuencia, el error diverge. De hecho, es posible demostrar que la condición de convergencia para el esquema de aproximación (38) junto a las condiciones (39) es

$$\Delta t \le \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{8k} \tag{42}$$

de modo que no existe absoluta libertad en la elección de los tamaños $\Delta x, \Delta y$ y Δt de las particiones.

4.2 Diferencias finitas generalizadas

Una alternativa posible al trabajar con dominios curvos y asimétricos, es barajar que la partición no sea regular, es decir, que no exista la misma distancia entre puntos consecutivos de la partición. Esto es particularmente útil en zonas donde se observa que la función crece o decrece de manera muy violenta, o dicho de otra manera que $\|\nabla u\|$ sea demasiado grande, puesto que es sabido que la aproximación por series de Taylor de las derivadas es menos confiable con puntos lejanos en funciones de este tipo. De esta manera, es muy deseable refinar las particiones y obtener puntos más cercanos en aquellas zonas donde la función presenta un crecimiento o decrecimiento más brusco. La solución a los problemas mencionados

anteriormente parece ser dejar de pensar en una malla como una distribución de puntos que cumpla con algún patrón geométrico determinado. De esta forma, se considera trabajar con métodos sobre ecuaciones en derivadas parciales con discretizaciones que no configuren una malla; estos son los denominados métodos sin malla o *meshless methods*.

El método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) es solamente un miembro particular de una familia de métodos que cumple con trabajar con dominios no mallados. Dentro de esta familia de métodos se encuentran algunos miembros como el *método de puntos finitos* (FPM) [19] y el *método de elementos difusos* (DEM) [18]. Por tanto, se considera una distribución de puntos en el dominio que no tiene porqué cumplir un patrón específico de posicionamiento. Al respecto, uno también podría considerar que el posicionamiento de una cantidad finita de puntos sobre el dominio podría ser de manera completamente aleatoria, y en teoría el método debería funcionar de igual manera, sin embargo, para obtener mejores aproximaciones, convergencia o rapidez de convergencia se deben considerar algunos de los aspectos ya discutidos.

El método de diferencias finitas generalizadas se llama de diferencias finitas debido a que vuelve ocupar de forma más general las aproximaciones por series de Taylor para una función que depende de dos o más variables independientes y también porque no se preocupa del posicionamiento de los nodos para construir estos valores de aproximación. Al calcular una aproximación de segundo orden para una función u en un punto (x_1, y_1) por serie de Taylor usando un punto (x_0, y_0) , se puede escribir entonces

$$u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0) + h \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + k \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + h k \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$
(43)

donde $h = x_1 - x_0$ y $k = y_1 - y_0$. Si se conoce cuál es el valor la función u y todas sus posibles derivadas hasta las de segundo orden en el punto (x_0, y_0) , entonces se puede calcular el valor de $u(x_1, y_1)$. En caso inverso, si no se conociera el valor de todas o algunas de las derivadas de u en (x_0, y_0) pero sí se tiene información de u en ese punto y otros cercanos a él, entonces se puede utilizar esa información para formar un sistema de ecuaciones y calcular los valores de las derivadas que se necesitan en (x_0, y_0) que constituyen las incógnitas en ese sistema. Es claro que se necesitan 5 puntos distintos a (x_0, y_0) para poder formar un sistema de 5 ecuaciones y 5 incógnitas; estas últimas son la cantidad de derivadas que no se conocen. La figura 5 muestra un esquema de distribución para aproximar derivadas en un punto x_0 mediante la ayuda de otros cinco puntos alrededor de éste.

Del álgebra lineal se sabe que el hecho de que exista igual cantidad de ecuaciones e incógnitas no asegura que el sistema vaya a ser soluble. En efecto, se ha probado en [7] que si los puntos están distribuidos de tal manera que conforman alguna sección cónica, entonces el sistema no tiene solución. Esto de alguna manera también representa un contrapié en algunos caso, debido al cuidado que se debe tener a la hora de generar la distribución de puntos y asegurarse que cada punto interior cumpla con que sus puntos más cercanos no ajusten una cónica. Esto sin duda conlleva a generar un algoritmo que no distribuya los puntos de tal manera o a pensar en una estratagia distinta.

Considérese un punto (x_0, y_0) y otros 5 puntos distintos a éste



Figura 5: Distribución de puntos para diferencias finitas generalizadas

 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ y $(x_5,y_5),$ entonces se puede escribir el siguiente sistema

$$u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = h_1 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + k_1 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + h_1 k_1 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{k_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$
(44)

$$u(x_{2}, y_{2}) - u(x_{0}, y_{0}) = h_{2} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial x} + k_{2} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial y} + h_{2} k_{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x \partial y} + \frac{h_{2}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x^{2}} + \frac{k_{2}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial y^{2}}$$
(45)

$$u(x_3, y_3) - u(x_0, y_0) = h_3 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + k_3 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + h_3 k_3 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{h_3^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{k_3^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$
(46)

$$u(x_4, y_4) - u(x_0, y_0) = h_4 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + k_4 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + h_4 k_4 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{h_4^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{k_4^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$
(47)

$$u(x_{5}, y_{5}) - u(x_{0}, y_{0}) = h_{5} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial x} + k_{5} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial y} + h_{5} k_{5} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x \partial y} + \frac{h_{5}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x^{2}} + \frac{k_{5}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial y^{2}}$$
(48)

donde $h_i=x_i-x_0$ y $k_i=y_i-y_0$ para $1\leq i\leq 5.$ Este mismo sistema se puede escribir matricialmente de la forma

$$Hd = u \tag{49}$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & k_1 & h_1k_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{k_1^2}{2} \\ h_2 & k_2 & h_2k_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} \\ h_3 & k_3 & h_3k_3 & \frac{h_3^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} \\ h_4 & k_4 & h_4k_4 & \frac{h_4^2}{2} & \frac{k_4^2}{2} \\ h_5 & k_5 & h_5k_5 & \frac{h_5^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) \\ u(x_2, y_2) - u(x_0, y_0) \\ u(x_3, y_3) - u(x_0, y_0) \\ u(x_4, y_4) - u(x_0, y_0) \\ u(x_5, y_5) - u(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Evidentemente, el valor de todas las derivadas en (x_0, y_0) se puede obtener siempre y cuando el sistema lineal (47) tenga solución. Este hecho depende netamente de la matriz H, pues es sabido que si $det(H) \neq 0$ el sistema tiene solución única. De esta forma, queda por saber en qué casos la matriz H es singular. Dado que H tiene términos que combinan las distancias verticales h_i y horizontales k_i de cada punto de la estrella respecto del nodo central, entonces es relevante la forma en que se distribuyen los puntos respecto del (x_0, y_0) . En [7] se muestra que si los puntos de la estrella se distribuyen de tal manera que forman alguna sección cónica conocida, entonces el determinante de la matriz H es cero. Esto genera una discusión y propuestas de ideas de cómo sobrellevar este problema cuando ocurre.

En 1972, Jensen [6] cimentó la idea de las diferencias finitas generalizadas cuando existe un distribución de puntos en el dominio espacial de una EDP que no cumpliese con criterios de regularidad. En este trabajo se menciona escoger la estrella de puntos en base a un criterio de distancia, es decir, escoger los cinco puntos más cercanos al nodo central donde se quieren aproximar las derivadas. Las posibles desventajas de este criterio es que si existen aglomeraciones de puntos cercanos en una cierta zona o dirección, entonces los resultados pueden no ser los mejores en cuanto a aproximar las derivadas de una función en un punto.



Figura 6: Idea gráfica del criterio de la distancia considerada por Jensen (1972).

El trabajo de Perrone y Kao [7] muestra una maduración de la idea, así como los argumentos del porqué los puntos no pueden tener distribuciones cónicas. Para superar el problema se plantea la idea de utilizar más puntos para tener sistemas sobredeterminados que aproximen el valor de las derivadas. La forma de construir la estrella y buscar por tanto los puntos de apoyo al nodo central se hace mediante un esquema de control de seis puntos, el cual tiene en consideración la dirección en la que están ubicados los puntos.

En 1980, Liszka y Orkisz [8] presentaron una mezcla de ambos criterios que toma en cuenta tanto la distancia como la dirección. El criterio es llamado el criterio de los cuatro cuadrantes, y que busca los ocho puntos más cerca al nodo central cuando este divide al plano en cuatro cuadrantes. En cada cuadrante se toman los dos puntos más cercanos, y la totalidad de los puntos viene a constituir la estrella del nodo central.

Un caso interesante es cuando se dispone de 4 puntos de la forma $(x_0 + \Delta x, y_0), (x_0 - \Delta x, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)$ y $(x_0, y_0 - \Delta y)$ para $\Delta x, \Delta y > 0$ fijos. En este caso, en todas las ecuaciones el término $h_5 k_5 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ desaparece, de modo que se pueda prescindir de una de las 5 ecuaciones. El sistema por tanto se reduce a

$$u(x_{0} + \Delta x, y_{0}) - u(x_{0}, y_{0}) = \Delta x \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x^{2}}$$



Figura 7: Idea gráfica del esquema de control de seis puntos considerado por Perrone y Kao en 1975. Imagen presentada en [7].



Figura 8: Idea gráfica del criterio de los cuatro cuadrantes presentado por Liszka y Orkisz en 1980. Imagen presentada en [8].

$$u(x_{0} - \Delta x, y_{0}) - u(x_{0}, y_{0}) = -\Delta x \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x^{2}}$$
$$u(x_{0}, y_{0} + \Delta y) - u(x_{0}, y_{0}) = \Delta y \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial y^{2}}$$
$$u(x_{0}, y_{0} - \Delta y) - u(x_{0}, y_{0}) = -\Delta y \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial y^{2}}$$

el cual es mucho más fácil de resolver. La solución de este sistema es

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2}
\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2}
\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x}
\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 - \Delta y)}{2\Delta y}$$
(50)

y por tanto se recupera las expresiones obtenidas en el método clásico de diferencias finitas.

Si bien no existe ninguna dificultad en cuanto al planteamiento de un sistema como el de 42-46, generar un algoritmo que distribuya los puntos de manera adecuada y también verifique que esto se hizo correctamente puede ser muy costoso en términos computacionales. Es por esto que pensar en utilizar más puntos de los necesarios y por tanto resolver un sistema sobredeterminado parece una alternativa más que razonable. En este caso, los valores de las derivadas obtenidas no constituyen las verdaderas aproximaciones obtenidas de resolver un sistema de 5×5 , sino más bien representa un promedio de resolver varias veces el mismo sistema con distintos subconjuntos de 5 puntos. Geométricamente, las soluciones son los coeficientes de un hiperplano en cinco dimensiones que pasa por una zona media de todos los datos.

Para un planteamiento tridimensional del teorema de Taylor y las diferencias finitas generalizadas, se puede revisar el anexo 11.1 al final de este documento. En tal apartado también se muestran argumentos que concluyen que el sistema lineal a resolver en las diferencias finitas generalizas no tiene solución cuando los puntos se distribuyen en formas cónicas.

4.3 Mínimos cuadrados para sistemas sobredeterminados

Considérese un punto \mathbf{x}_0 en la partición para el cual se quieren aproximar las derivadas hasta la de segundo orden. Tal como se planteó anteriormente, el sistema planteado por la estrella del punto \mathbf{x}_0 puede verse afectado negativamente por la distribución de puntos de la estrella. Para sobrellevar este problema, se plantea incrementar la cantidad de puntos de apoyo en la estrella y utilizar más información de la función que la mínima necesaria. Esto conlleva a evidentemente tener más ecuaciones que incógnitas en cada estrella, de modo que encontrar una solución sería encontrar la solución de un sistema sobredeterminado. En ocasiones estos sistemas son reducibles a sistemas cuadrados con solución exacta, especialmente cuando hay ecuaciones redundantes, sin embargo, en general estos sistemas no tienen solución, de modo que hay que buscar una solución aproximada. Un buen tratado de este tema se da en el libro de Amir Beck [9].

Una forma de plantear la solución de este sistema es encontrar la solución del problema de minimización de suma de errores al cuadrado

$$\min_{d\in\mathbb{R}^5} \|Hd - u\|^2 \tag{51}$$

En concreto, para aproximar las derivadas de hasta segundo orden del punto $x_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, se escogen s puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_s, y_s)$ con $s \ge 5$ para formar el sistema sobre-

determinado

$$u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = h_1 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + k_1 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + h_1 k_1 \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{k_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

$$u(x_{2}, y_{2}) - u(x_{0}, y_{0}) = h_{2} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial x} + k_{2} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial y} + h_{2} k_{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x \partial y} + \frac{h_{2}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x^{2}} + \frac{k_{2}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial y^{2}}$$
(53)

$$u(x_{s}, y_{s}) - u(x_{0}, y_{0}) = h_{s} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial x} + k_{s} \frac{\partial u(x_{0}, y_{0})}{\partial y} + h_{s} k_{s} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x \partial y} + \frac{h_{s}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial x^{2}} + \frac{k_{s}^{2}}{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0}, y_{0})}{\partial y^{2}}$$
(55)
(56)

que consta de 5 variables y s ecuaciones. Para encontrar la solución de mínimos cuadrados del problema, se debe resolver el sistema cuadrado asociado

$$H^T H d = H u \tag{57}$$

(52)

La solución del sistema anterior provee una razonable aproximación de las derivadas haciendo uso de la información proporcionada por los s puntos alrededor de (x_0, y_0) .

4.4 Mínimos cuadrados con factores peso

÷

Al plantear un sistema sobredeterminado, se puede utilizar el método de mínimos cuadrados para su resolución y así obtener aproximaciones a las derivadas. En este caso, cada punto proporciona información con el mismo grado de confiabilidad para poder cálcular los valores de las incógnitas del sistema. Sin embargo, del análisis se sabe que una aproximación hecha por series de Taylor es menos confiable cuando el punto central donde se construye la serie está lejos (bajo algún criterio) del punto en el cual se quiere aproximar la función, de modo que el error por truncar la serie en un término de grado particular se agranda. Es natural pensar entonces que cuando se utilizan varios puntos de apoyo para aproximar una derivada, aquellos puntos que estén más lejos del punto central deberían ser considerados datos menos importantes dado que la información es menos confiable. Este último hecho no lo considera el ajuste usual por mínimos cuadrados de un conjunto de datos, por tanto es importante barajar una modificación en el procedimiento que tenga en cuenta este hecho.

Con el fin de reducir el efecto que tienen sobre los cálculos aquellos datos que estén más lejos, se ocupa una técnica modificada del ajuste por mínimos cuadrados que introduce a la suma cuadrada de errores los factores de peso. Estos factores de peso es en realidad una función cuyo propósito es cuantificar la importancia del dato en el ajuste y eventualmente hacer que efectivamente reduzca su contribución a la hora de resolver el sistema. Esta función, comúnmente denotada por w, es una función no negativa y la forma concreta que adopta algebraicamente queda a criterio de quién realice el ajuste.

Como el objetivo es reducir la contribución de aquellos datos que estén más alejados del centro, entonces se debe optar por alguna función que dependa de la distancia radial y que sea inversamente proporcional a ésta. Algunos autores como [11] recomiendan usar funciones como

$$e^{-r_i}, \quad \frac{1}{r_i}, \quad \frac{1}{r_i^3}$$
 (58)

donde $r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$.

De forma general, el error con peso a considerar es de la forma

$$e_{i} = w_{i} \left(u(x_{i}) - u(x_{0}) + h_{i} \frac{\partial u(x_{0})}{\partial x} + k_{i} \frac{\partial u(x_{0})}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_{i}^{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0})}{\partial x^{2}} + k_{i}^{2} \frac{\partial^{2} u(x_{0})}{\partial y^{2}} + 2h_{i} k_{i} \frac{\partial^{2} u(x_{0})}{\partial x \partial y} \right) \right)$$

$$(59)$$

y en consecuencia la suma cuadrada de errores es

$$S_w = \sum_{i=1}^{S} w_i^2 \left(u(x_i) - u(x_0) + h_i \frac{\partial u(x_0)}{\partial x} + k_i \frac{\partial u(x_0)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x \partial y} \right) \right)^2$$
(60)

que es la función a minimizar mediante el método de mínimos cuadrados. Las soluciones obtenidas mediante este procedimiento son diferentes al ajuste usual por mínimos cuadrados, debido al desbalance obtenido con la introducción de la función $w(x_i)$. En ocasiones, estos resultados no llegan a ser tan distintos a un ajuste normal, pero se obtiene un cierto grado de mejora controlando el factor distancia en el ajuste, especialmente en coeficiente de determinación R^2 del ajuste. Se puede hacer una revisión más profunda de esta técnica en el texto de Canavos [10].

4.5 Planteamiento de GFDM para ecuaciones parabólicas

En lo que sigue, se va a plantear el GFDM aplicadas a ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólicas inspirado en las ideas de Gavete, Ureña, Benito, García, Ureña y Salete en [11] y [13]. Primero, el término temporal de primer orden del operador diferencial en la ecuación de Richards se aproxima mediante un esquema sencillo de dos puntos dado por (36). De esta manera, la parte espacial del operador más complicada queda a ser aproximada por el método de diferencias finitas generalizadas, lo cual en un esquema explícito queda muy sencillo trabajar en términos computacionales. Aún así se planteará la forma general de un esquema implícito en el caso de la ecuación de Richards para tener en consideración.

Considere el siguiente problema no lineal, donde $D = [0, T] \times \Omega$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L[U] \tag{61}$$

donde L es un operador diferencial no lineal que involucra derivadas espaciales, Γ es el borde de Ω , junto a las condiciones

$$U_{\Gamma} = f(t) \tag{62}$$

$$U(x, y, 0) = g(x, y)$$
 (63)

Se
a $M = \{ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N \}$ una discretización de Ω co
nNpuntos, los cuales se llaman nodos. Para cada nodo
 \boldsymbol{x}_0 de M, se define la E_s -estrella como

$$E_s = \{ \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{01}, \boldsymbol{x}_{02}, ..., \boldsymbol{x}_{0s} \} \subset M$$
(64)

que se forma en base a distintos criterios basados en distancia y dirección. Se dice que el centro de la estrella es \mathbf{x}_0 .

La expansión en series de Taylor para dos variables de una función U es

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$
(65)

donde $U_i = U(\boldsymbol{x}_{0i})$ para $1 \leq i \leq s$ y $U_0 = U(\boldsymbol{x}_0)$. Asumiendo que U_i es conocido para todo i y tratando las derivadas $\frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y}$ como incógnitas. Se define la función

$$B(U) = \sum_{i=1}^{S} \left[\left((U_0 - U_i) + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) \right)^2 w_i^2 \right]$$
(66)

que es la función objetivo a minimizar con respecto a las derivadas parciales, donde w_i es una función de peso, que distintos autores [11, 13] sugieren que sea una función decreciente en dirección radial tomando como centro a x_0 . Derivando la función B en (64) con respecto a cada derivada parcial e igualando a cero, se puede escribir un sistema de ecuaciones lineales a resolver de la forma

$$A(h_r, k_r, w_r)D = b(h_r, k_r, w_r, U_0, U_r)$$
(67)

 con

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_S \\ \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_2^2}{2} & \cdots & \frac{h_S^2}{2} \\ \frac{k_1^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & \cdots & \frac{k_S^2}{2} \\ h_1k_1 & h_2k_2 & \cdots & h_Sk_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & k_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{k_1^2}{2} & h_1k_1 \\ h_2 & k_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & h_2k_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_S & k_S & \frac{h_S^2}{2} & \frac{k_S^2}{2} & h_Sk_S \end{pmatrix}$$
(68)

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} & \frac{\partial U_0}{\partial z} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial z} \end{pmatrix}^T$$
(69)

$$b = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_S \\ \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_2^2}{2} & \cdots & \frac{h_S^2}{2} \\ \frac{k_1^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & \cdots & \frac{k_S^2}{2} \\ h_1k_1 & h_2k_2 & \cdots & h_Sk_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 - U_0 \\ U_2 - U_0 \\ \vdots \\ U_S - U_0 \end{pmatrix}$$
(70)

donde $h_r = x_r - x_0$, $k_r = y_r - y_0$ para $1 \le r \le S$ y $S \ge 5$.

Al obtener los valores aproximados de las derivadas, éstos se pueden utilizar posteriormente en un esquema implícito o explícito para generar la solución numérica de la EDP planteada en (59). Cabe destacar que las derivadas espaciales a aproximar se calcularán para puntos interiores del dominio, ya que las condiciones de borde se encargarán de generar para en distintos valores de tiempo para los puntos en la frontera.

En [11] se prueba que la solución del sistema (65) puede ser escrito como combinación lineal de puntos de la estrella. En efecto, si se nombra

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_1k_1 & h_2k_2 & \cdots & h_Sk_S \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix}$$
(71)

De esta forma, la matriz A mencionada en (66) se puede escribir como $A = HWH^T$ la cual es definida positiva, pues $w_i^2 > 0$ para todo *i* de modo que *W* se puede escribir como producto de una matriz diagonal denotada \sqrt{W} cuyos elementos en la diagonal son los valores $w_i > 0$. Es decir, $W = \sqrt{W}\sqrt{W}$. Se tiene entonces que

$$A = HWH^T = H\sqrt{W}\sqrt{W}H^T = PP^T \tag{72}$$

donde $P = H\sqrt{W}$. Es sabido del álgebra lineal que si $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ entonces $A = BB^T$ es definida positiva si y sólo si B tiene rango fila completo. Dado que la matriz H tiene todos sus vectores fila linealmente independientes, entonces las filas de P también lo son. Luego, A es definida positiva.

Todo lo anterior indica evidentemente que A^{-1} existe y por tanto se tiene que

$$D = A^{-1}b = A^{-1}HW(u - u_0\mathbf{1})$$
(73)

donde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_S)^T$ y $\boldsymbol{1} = (1, 1, ..., 1)^T$. De esta forma se tiene entonces que

$$D = A^{-1}PW\boldsymbol{e}_1u_1 + \dots + A^{-1}PW\boldsymbol{e}_Su_S - A^{-1}PW(\boldsymbol{e}_1 + \dots + \boldsymbol{e}_S)u_0 = \sum_{i=1}^S \boldsymbol{m}_i u_i - \boldsymbol{m}_0 u_0 \quad (74)$$

donde $\mathbf{m}_i = A^{-1}PW\mathbf{e}_i u_i$ y \mathbf{e}_i son los vectores de la base canónica para todo $i \in \{1, 2, ..., S\}$. La expresión (72) muestra que el valor de las derivadas en \mathbf{x}_0 es una combinación lineal de los valores de u en los puntos de la estrella.

4.6 Generación de la Malla

Al mallar el dominio espacial de una ecuación diferencial parcial se debe tener en cuenta dos cosas: la geometría del borde y los puntos donde la función crece o decrece de manera más violenta. En los mallados comunes donde se utilizan rectángulos formados por puntos equiespaciados en sus ejes, estos hechos no se toman en consideración, de modo que las aproximaciones generadas no son tan buenas en comparación a otras que sí lo utilizan. El Método de Diferencias Finitas Generalizadas es un método perteneciente a la familia de *Meshless Methods* o métodos sin malla, que no dependen de la geometría utilizada para distribuir los puntos sobre el dominio. En particular, se adopta el paradigma de que existe una cantidad finita de puntos distribuidos de manera arbitraria, y que no pretenden teselar una superficie de forma regular o siguiendo un patrón.

Es sabido que siempre se puede generar una teselación de triángulos con cualquier distribución de puntos en un plano, sin embargo, estos triángulos no tienen porqué ser semejantes de alguna forma. La manera en que se distribuyen los puntos sobre el dominio del problema podría ser de manera totalmente aleatoria, lo que no indica nada *a priori* acerca de la precisión de las aproximaciones. Sin embargo, los puntos deben cumplir *algo* de regularidad para poder generar de manera precisa las soluciones, ya que en el entorno de un punto se necesita saber el comportamiento de la función en todas las direcciones radiales que se puedan generar a partir del punto en sí. Claramente, en problemas unidimensionales no queda más opciones que mirar a la izquierda y derecha de un punto, pero este efecto se hace fuertemente notorio en problemas con dimensiones iguales o mayores a dos.

De todas formas, si el dominio en los bordes presenta una cierta regularidad, no hay pecado alguno en utilizar mallas regulares. En lo que respecta a este escrito, se trabajará en dominios regulares con mallados rectangulares, es decir, el intervalo correspondiente a cada variable será dividido en una cantidad finita de segmentos de la misma longitud.

En concreto, considérese $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con

$$\Omega = [x_{1i}, x_{1f}] \times [x_{2i}, x_{2f}] \times \dots \times [x_{ni}, x_{nf}]$$

$$\tag{75}$$

donde x_{ki} y x_{kf} constantes para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Por tanto, todo punto $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ cumple

$$x_{ki} \le x_k \le x_{kf}, \quad \forall k \tag{76}$$

Al escoger un tamaño de segmento Δ_k para el intervalo de la variable x_k , se escogen entonces puntos $x_{k0}, x_{k1}, ..., x_{kn_k}$ de forma que

$$x_{ki} = x_{k0} < x_{k1} < \dots < x_{kn_k} = x_{kf} \tag{77}$$

de forma que $x_{k(j+1)} - x_{kj} = \Delta_k$ constante para $0 \le j \le n_k - 1$. Se dice entonces que $M_k = \{x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{kn_k}\}$ es una partición del intervalo $[x_{ki}, x_{kf}]$ de $n_k + 1$ puntos y n_k subintervalos de longitud Δ_k .

Realizando este tipo partición sobre cada variable x_k , se obtiene una partición M de Ω que es simplemente un subconjunto con una cantidad finita de puntos representantes de Ω que son de interés para resolver la ecuación diferencial parcial asociada. De lo anterior se sabe que M tiene una cantidad de $\prod_{k=1}^{n} n_k$ puntos y se define como

$$M = \{ (p_1, p_2, ..., p_n) \mid p_k \in M_k \text{ para } 1 \le k \le n \}$$
(78)

5 Teoremas de Convergencia

Lo que sigue es un resumen de algunos resultados de convergencia para el método de diferencias finitas generalizadas para ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales. Esta recopilación se basa completamente en el trabajo que han realizado Ureña, Gavete, García, Benito y Vargas en [11] y [12].

5.1 Ecuaciones parabólicas no lineales

Considérese en primer lugar las siguientes definiciones:

- Una ecuación diferencial parcial es **semi-lineal** si los coeficientes de las derivadas más altas son funciones de las variables espaciales solamente.
- Una ecuación diferencial parcial es cuasi-lineal si es lineal en sus derivadas de orden más altas.

Los teoremas de convergencia que se enuncian a continuación, están basados en el siguiente resultado probado en [13]:

La solución del sistema que aproxima las derivadas de un nodo central \mathbf{x}_0 depende de una combinación lineal de los valores de la función en cada uno de los s puntos de la estrella con nodo central \mathbf{x}_0 .

Se denota por $m_0, m_1, m_2, ..., m_s$ a los coeficientes de dicha combinación lineal. Estos coeficientes dependen de la distancia entre los puntos respecto del nodo central y la función de peso usada en la función de mínimos cuadrados. Este resultado es bastante útil ya que provee de una expresión matricial sencilla para calcular la solución del sistema sobredeterminado puesto para las derivadas.

El problema no lineal, donde
$$D = [0, T] \times \Omega$$
, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_{\Omega}[U] \tag{79}$$

donde L es un operador diferencial no lineal que involucra derivadas espaciales, Γ es el borde de Ω , junto a las condiciones

$$U_{\Gamma} = f(t) \tag{80}$$

$$U(x, y, 0) = g(x, y)$$
 (81)

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = h(x, y) \tag{82}$$

donde f,gy hson tres funciones conocidas y U_{Γ} es la función Uevaluada en los puntos de la frontera.

Se utiliza la siguiente aproximación para la derivada temporal

$$\frac{\partial U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t} \approx \frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\Delta t}$$
(83)

y todas las derivadas espaciales se aproximan mediante el método de diferencias finitas generalizadas.

En [11] se expone con demostración resultados de convergencia para ecuaciones diferenciales no lineales de tipo parábolicas mediante el método de diferencias finitas generalizadas. Un primer resultado es el siguiente

Teorema. Consideremos la ecuación semilineal $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F(U)$ donde F(U) es una función diferenciable. El esquema no lineal explícito

$$\frac{U_0^{n+1} - U_0^n}{\Delta t} = L_{[\Omega]}U$$

es convergente si

1.
$$\frac{\partial F(U)}{\partial U} + \sum_{i=1}^{N} |m_i| - m_0 < 0$$

2.
$$\Delta t < \frac{2}{\sum_{i=1}^{N} |m_i| + m_0 - \frac{\partial F(U)}{\partial U}}$$

Del mismo esquema también se hace notar que es estable, es decir, que pequeñas perturbaciones a los datos iniciales provocarán pequeñas diferencias en la solución en un tiempo posterior. Respecto del esquema implícito para este tipo de ecuaciones se enuncia el mismo resultado por parte de los autores.

Teorema. Consideremos la ecuación semilineal $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F(U)$ donde F(U) es una función diferenciable. El esquema no lineal implícito es convergente

Al igual que en el caso anterior, los argumentos del porqué este esquema es estable se proveen en el mismo documento al finalizar la demostración del teorema recién enunciado.

También se trata el caso de dos tipos de ecuaciones cuasi-lineales de las formas

•
$$\frac{\partial U}{\partial t} = K(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$$
, llamado cuasi-lineal tipo A.
• $\frac{\partial U}{\partial t} = K(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + F(U)$, llamado cuasi-lineal tipo B

Los resultados son los que se enuncian a continuación.

Teorema. Consideremos la ecuación cuasilineal $\frac{\partial U}{\partial t} = K(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$ donde K(U) es una función diferenciable. El esquema no lineal explícito es convergente si

1.
$$-R + m_0 K(U_0^n) > |K(U_0^n)| \sum_{i=1}^N |m_i|$$

2.
$$\Delta t < \frac{1}{m_0 K(U_0^n) - R}$$

donde $R = \frac{\partial K}{\partial U} \left(-m_0 U_0^n + \sum_{i=1}^N m_i U_i^n \right)$

Teorema. Consideremos la ecuación cuasilineal $\frac{\partial U}{\partial t} = K(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + F(U)$ donde F(U) y K(U) es una función diferenciable. El esquema no lineal explícito es convergente si

$$1. -R - \frac{\partial F}{\partial U} + m_0 K(U_0^n) > |K(U_0^n)| \sum_{i=1}^N |m_i| \Leftrightarrow -R - \frac{\partial F}{\partial U} > 0$$
$$2. \ \Delta t < \frac{1}{m_0 K(U_0^n) - R - \frac{\partial F}{\partial U}}$$
$$donde \ R = \frac{\partial K}{\partial U} \left(-m_0 U_0^n + \sum_{i=1}^N m_i U_i^n \right)$$

De todos los resultados anteriores se puede ver que los coeficientes de la combinación lineal dada en la estrella para aproximar las derivadas es relevante para obtener una condición de convergencia en los esquemas explícitos. Esto parece ser un poco confuso si la estrella de cada punto es distinta y por tanto cambian los coeficientes. En este caso, el problema se puede resolver tomando la menor cota para Δt que cumpla la segunda desigualdad en los teoremas enunciados previamente. Esa menor cota se logra revisando todas las cotas posibles para todas las estrellas de los puntos.

5.2 Ecuaciones hiperbólicas no lineales

Considere el siguiente problema no lineal, donde $D = [0, T] \times \Omega$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = L_{\Omega}[U] \tag{84}$$

donde L es un operador diferencial no lineal que involucra derivadas espaciales, Γ es el borde de Ω , junto a las condiciones

$$U_{\Gamma} = f(t) \tag{85}$$

$$U(x, y, 0) = g(x, y)$$
 (86)

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = h(x, y) \tag{87}$$

donde f, g y h son tres funciones conocidas. Al igual que en el caso de estudio de ecuaciones parabólicas, aquí U_{Γ} es simplemente la función U evaluada en la frontera.

Se utiliza la siguiente aproximacón para aproximar la segunda derivada temporal

$$\frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} \approx \frac{U_0^{n+1} - 2U_0^n + U_0^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$
(88)

y todas las derivadas espaciales se aproximan mediante el método de diferencias finitas generalizadas.

Los resultados de convergencia que se enuncian a continuación se exponen de manera detallada en [12] y constituyen notables aportes al estudio de convergencia del GFDM en ecuaciones diferenciales parciales no lineales de tipo hiperbólicas.

Teorema. Consideremos la ecuación cuasilineal $L_{\Omega}[U] = c(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + F(U)$ donde $c(U) \ y \ F(U)$ son dos funciones diferenciables. El esquema no lineal explícito

$$\frac{U_0^{n+1} - 2U_0^n + U_0^{n+1}}{\Delta t^2} = c(U_0^n) \left(\sum_{i=1}^S m_i U_i^n - m_0 U_0^n\right) + F(U_0^n)$$

es consistente.

Respecto de las ecuaciones semilineales hiperbólicas se tiene

Teorema. Consideremos la ecuación semilineal $L_{\Omega}[U] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F(U)$ donde F(U) es una función diferenciable. El esquema no lineal explícito

$$\frac{U_0^{n+1} - 2U_0^n + U_0^{n+1}}{\Delta t^2} = \sum_{i=1}^S m_i U_i^n - m_0 U_0^n + F(U_0^n)$$

es condicionalmente estable.

Teorema. Consideremos la ecuación cuasilineal $L_{\Omega}[U] = c(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + F(U)$ donde $c(U) \ y \ F(U)$ son dos funciones diferenciables. El esquema no lineal explícito

$$\frac{U_0^{n+1} - 2U_0^n + U_0^{n+1}}{\Delta t^2} = c(U_0^n) \left(\sum_{i=1}^S m_i U_i^n - m_0 U_0^n\right) + F(U_0^n)$$

es condicionalmente estable.

Al igual que en el caso de las ecuaciones no lineales parabólicas de la sección anterior, los coeficientes de la combinación lineal vuelven a jugar un rol clave para la convergencia en los esquemas explícitos. Al respecto se recomienda revisar [12] para más información acerca de los resultados y verificación de los mismos en términos numéricos.

Según el conjunto de resultados nombrados anteriormente se creería que también hay un conjunto de resultados para ecuaciones elípticas no lineales de segundo orden, lo cual no es así. En [13] los mismos autores indagan respecto del desempeño del método de diferencias finitas generalizadas con ecuaciones elípticas, sin embargo, no se exponen resultados de convergencia respecto del método. El trabajo particularmente se centra esencialmente en exponer resultados numéricos para una diversa variedad de ecuaciones elípticas no lineales.

Una forma alternativa a la ecuación de Richards presentada en (23) y en forma bidimensional es

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + D(\theta) \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) + D(\theta) \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - R(\theta)$$
(89)

En esta forma la ecuación (87) separa en distintos sumandos los términos diferenciales, lo cual permitiría expresar mejor la diferencia entre la solución numérica y la verdadera solución. En [11] y [13] la técnica de demostración para los distintos resultados presentados anteriormente se basa en el uso de desigualdades sobre normas, lo cual es una técnica factible a usar en este caso. El contratiempo en la ecuación (87) lo representan las derivadas de primer orden al cuadrado, términos que aparecen frecuentemente en operadores elípticos. Estos términos no aparecen considerados en ninguno de los resultados para ecuaciones parabólicas.

Sin embargo, si se pudiera prescindir de los términos difíciles de tratar, entonces se trabajaría con una versión simplificada de la ecuación de Richards como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D(\theta) \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) + D(\theta) \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} - R(\theta)$$
(90)

En caso de ser así, esta última coincide más con la forma cuasi-lineal tipo B mostrada en los resultados de convergencia para ecuaciones parabólicas. Si bien existe un término de primer orden dado por la derivada parcial de θ respecto de z, este término al igual que el operador laplaciano puede ser escrito como combinación lineal de los valores de la función θ evaluada en la estrella del nodo central. Esto conduce a concluir que los argumentos lógicos para acotar la derivada parcial de primer orden son análogos al caso de los términos de segundo orden.

Lo expuesto anteriormente implica que la ecuación (87) puede ser identificada en la forma (2211 - 2211) = (2111)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + G(U) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) + H(U)$$
(91)

donde se considera

$$U = \theta$$

$$F(U) = D(\theta)$$

$$G(U) = -\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}$$

$$H(U) = -R(\theta)$$

(92)

En este punto, debería ser suficiente adaptar las condiciones de convergencia del teorema 4 a la ecuación (89) para poder calcular un Δt apropiado y así asegurar la convergencia de un esquema explícito.
6 Solución Numérica

Utilizando las ideas presentadas en el capítulo 4, se procede a presentar los problemas a resolver y los respectivos esquemas de aproximación numérica a usar.

6.1 Ecuación de Richards unidimensional

Al considerar la función θ como una función unidimensional que sólo depende de z, la ecuación de Richards se reduce a

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right) = 0 \tag{93}$$

donde t es el tiempo, z es la profundidad del suelo considerando hacia abajo el sentido positivo, h es la presión del agua del suelo y K es la conductividad hidráulica. Al tomar la directriz de Hayek (2016), se puede tener en cuenta casos particulares de K y h para la posterior resolución de (22). Al considerar

$$\theta = e^{\frac{ah}{n}} \tag{94}$$

donde $\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$ es la saturación efectiva de carácter adimensional, *a* es un parámetro positivo y *n* un exponente adimensional positivo relacionado a la distribución del tamaño de los poros. Asumiendo además que $K = k_s k_r$ y $k_r = \theta^n = e^{ah}$, se pueden utilizar todas estas relaciones [20, pág. 663] para transformar la ecuación de Richards en

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\Theta)}{\partial z}$$
(95)

Las condiciones iniciales del problema son

$$\Theta(z,0) = \theta_r, \quad z \in [0, z_{max}] \tag{96}$$

$$\Theta(0,t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(1 - e^{\frac{-a(n-1)Vt}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad t \in [0, t_{max}]$$

$$\tag{97}$$

Adicionalmente, se considera una condición de tipo estabilizadora para el extremo derecho del intervalo al que pertenece la variable z. Esto no solamente permite estabilizar la solución en un valor particular, sino que facilita la aproximación de los valores en el borde para cualquier tiempo posterior al inicial. Esta condición se plantea de la forma siguiente:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z}(z_{max}, t) = 0, \quad t \in [0, t_{max}]$$
(98)

Para la resolución de la ecuación (29) se empieza por discretizar el dominio del problema. Sea $\{z_0, z_1, ..., z_M\} \subset [0, z_{max}]$ con $z_i < z_{i+1}, 1 \leq i \leq M - 1$ y $\{t_0, t_1, ..., t_N\} \subset$

 $[0, t_{max}]$ con $t_j < t_{j+1}, 1 \le j \le N-1$. La función u_i^j será la aproximación de Θ en el punto (z_i, t_j) .

Una aproximación razonable y justificada para $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ es

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(z_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{t_{j+1} - t_j} \tag{99}$$

De esta manera, la ecuación de Richards unidimensional con $R(\theta)=0$ tiene el siguiente esquema de aproximación

$$u_i^{j+1} = u_i^j + (t_{j+1} - t_j) \left(\frac{\partial D(\Theta_i^j)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Theta_i^j}{\partial z} \right)^2 + D(\Theta_i^j) \frac{\partial^2 \Theta_i^j}{\partial z^2} - \frac{\partial K(\theta_i^j)}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta_i^j}{\partial z} \right)$$
(100)

donde las derivadas se aproximan mediante el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_2^2}{2} & \cdots & \frac{h_s^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & \frac{h_1^2}{2} \\ h_2 & \frac{h_2}{2} \\ \vdots & \vdots \\ h_S & \frac{h_s^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_2^2}{2} & \cdots & \frac{h_s^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 - U_0 \\ U_2 - U_0 \\ \vdots \\ U_S - U_0 \end{pmatrix}$$
(101)

donde U_r para $0 \le r \le S$ es el valor de la función u en los puntos de la estrella $E_{i,j} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_S\}$ del punto (z_i, t_j) donde $\mathbf{x}_0 = (z_i, t_j)$.

Las condiciones de borde en forma discretizada quedan como

$$u_i^0 = \theta_r, \quad \forall i \tag{102}$$

$$u_0^j = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(1 - e^{\frac{-a(n-1)Vt_j}{n}} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$
(103)

En el caso de la condición (27), ésta reduce el sistema en (30) a una sola incógnita, de modo que la elección de la estrella en los puntos $(zmax, t_j)$, $\forall j$ requiere que $S \ge 1$.

6.2 Ecuación de Richards Bidimensional

En este caso, se pondrán los esfuerzos para resolver la ecuación (22) en dos dimensiones espaciales, cuya expresión es

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + D(\theta)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + D(\theta)\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} - R(\theta)$$
(104)

con $0 \le \theta \le 1$, $0 \le x \le x_0$, $t \ge 0$ y $z \ge 0$. Esta ecuación es la versión adimensional presentada en [21] de la ecuación de Richards con término fuente no lineal. La ecuación (93) debe ser dotada necesariamente de condiciones de borde adecuadas para su efectiva resolución numérica. En Broadbridge (2017) se detallan condiciones de borde correspondientes a distintos problemas de carácter físico, sin embargo el correspondiente a analizar en este escrito es el segundo de tal trabajo.

Considérese un sistema formado por surcos de riego poco profundos dispuestos sobre el eje x (z = 0) de ancho $2x_0$ y dispuestos sucesivamente bajo un periodo de largo 2l, con $l > x_0$, como muestra la figura 1.



Figura 9: Esquema de surcos irrigación

La ecuación que describe el contenido volumétrico de agua adimensional θ en función de x, z, t para un elemento típico del sistema descrito por la figura 1 es la ecuación. En [21] se construye una solución analítica de (104) de la forma

$$\theta = \frac{1}{m} ln(1 + (e^m - 1)\mu)$$
(105)

que es el contenido de humedad volumétrico adimensional en los poros y m un parámetro empírico proveniente del modelo de Gardner. La función μ es una función obtenida de la solución por una reducción de la ecuación de Richards a una ecuación de tipo Kirchoff-Helmholtz de la forma

$$\frac{1}{D(\mu)}\frac{\partial\mu}{\partial t} = L\mu - R(\mu) \tag{106}$$

Para simplificar la solución de la ecuación se escoge una combinación de $D(\mu)$ y $R(\mu)$ de forma que la expresión anterior sea reducible a una expresión de tipo $-\kappa\mu$ con $\kappa \in \mathbb{R}$ constante. En este caso la función μ es de la forma

$$\mu = e^{At} \Phi(x, z) \tag{107}$$

que corresponde a una solución de tipo separable y donde A es un parámetro de atenuación temporal para $\Phi(x, z)$. No es difícil ver que la condición inicial, es decir para t = 0, es $\Phi(x, z)$.

Al resolver para Φ se obtiene

$$\Phi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \frac{e^{-\left(\sqrt{1+4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 4\kappa} - 1\right)\frac{z}{2}}}{1+\sqrt{1+4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 4\kappa}}$$
(108)

 con

$$A_0 = \frac{F_0 x_0}{l} \tag{109}$$

y para $n \ge 1$

$$A_n = \frac{2}{n\pi} F_0 \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) \tag{110}$$

Según lo expuesto anteriormente, las condiciones de borde del problema a resolver a usar en este trabajo son

$$\theta(x, z, 0) = \Phi(x, z) \tag{111}$$

$$\theta(x,0,t) = e^{At} \Phi(x,0) \tag{112}$$

$$\theta_x(0,z,t) = \theta_x(l,z,t) = 0 \tag{113}$$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} = 0 \tag{114}$$

La última condición constituye una reinterpretación de un requisito muy usado en las soluciones de este tipo de problemas, y que corresponde a una estabilización o convergencia de la función θ para valores muy grandes de z.

Se comienza por particionar los respectivos dominios de las variables del problema, en este caso, sea $\{x_0, x_1, ..., x_N\} \subset [0, x_0] \text{ con } x_i < x_{i+1}, 1 \leq i \leq N-1, \{z_0, z_1, ..., z_M\} \subset [0, z_{max}] \text{ con } z_j < z_{j+1}, 1 \leq j \leq M-1 \text{ y } \{t_0, t_1, ..., t_P\} \subset [0, t_{max}] \text{ con } t_k < t_{k+1}, 1 \leq k \leq P-1 \text{ . Es necesario mencionar que aunque el problema tenga intervalos de largo infinito para z y t, la solución numérica efectiva se hace utilizando valores de tope que en este caso corresponden a <math>z_{max}$ y t_{max} . Como convención se denota $\theta(x_i, z_j, t_k) = \theta_{i,j}^k$ y por u(x, z, t) la solución generada por el método de diferencias finitas generalizadas, es decir, $\theta \approx u$.

En el caso de la derivada temporal $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ se utilizará una aproximación de primer orden de un paso

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x_i, z_j, t_k) \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{t_{k+1} - t_k} \tag{115}$$

ya que la ecuación tiene una componente parabólica y una sola condicíon inicial para t.

La iteración de diferencias finitas para $u_{i,j}^{k+1}$ es de la forma

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k} + (t_{k+1} - t_k) \left(\frac{\partial D(u_{i,j}^k)}{\partial \theta} \left(\left(\frac{\partial \theta_{i,j}^k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_{i,j}^k}{\partial z} \right)^2 \right) + D(u_{i,j}^k) \left(\frac{\partial^2 \theta_{i,j}^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_{i,j}^k}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial K(u_{i,j}^k)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta_{i,j}^k}{\partial z} - R(u_{i,j}^k) \right)$$
(116)

donde $\frac{\partial \theta_{i,j}^k}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z}(x_i, z_j, t_k)$. El esquema (105) constituye un esquema **explícito** de aproximación, de modo que se utilizan los valores en t_k para generar los valores en t_{k+1} .

Se puede construir un esquema implícito de iteración utilizando lo demostrado en (72). La diferencia respecto del esquema explícito es que el lado derecho del esquema iterativo en (105) depende del valor temporal siguiente, que es el que se buscando. Dado que cada valor de las derivadas hasta segundo orden en x_0 es una combinación lineal de la función u en los puntos de la estrella, se tiene entonces lo siguiente: Si la estrella del punto (x_i, z_j) es

$$\{(x_i, z_j), (x_{i_1}, z_{j_1}), (x_{i_2}, z_{j_2}), \dots, (x_{i_S}, z_{j_S})\}$$
(117)

se puede escribir cada derivada de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{i,j}^{k+1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_{i,j}^{k+1}}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \theta_{i,j}^{k+1}}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \theta_{i,j}^{k+1}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \theta_{i,j}^{k+1}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \theta_{i,j}^{k+1}}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,2} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,2} u_{i,j}^{k+1} \\ \sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,3} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,3} u_{i,j}^{k+1} \\ \sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,4} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,4} u_{i,j}^{k+1} \\ \sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,5} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,5} u_{i,j}^{k+1} \end{pmatrix}$$
(118)

donde los valores u_{i_l,j_l}^{k+1} son los valores de u en los puntos de la estrella de (x_i, z_j) .

De este forma, el esquema implícito de aproximación es

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^{k} + (t_{k+1} - t_k) \left(\frac{\partial D(u_{i,j}^{k+1})}{\partial \theta} \left(\left(\sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,1} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,1} u_{i,j}^{k+1} \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,2} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,2} u_{i,j}^{k+1} \right)^2 \right) + D(u_{i,j}^{k+1}) \left(\sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,4} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,4} u_{i,j}^{k+1} + \sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,5} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,5} u_{i,j}^{k+1} \right) - \frac{\partial K(u_{i,j}^{k+1})}{\partial \theta} \left(\sum_{l=1}^{S} \boldsymbol{m}_{i_l,j_l,2} u_{i_l,j_l}^{k+1} - \boldsymbol{m}_{i,j,2} u_{i,j}^{k+1} \right) - R(u_{i,j}^{k+1}) \right)$$
(119)

Al plantear la expresión anterior para cada nodo interior, se obtiene un sistema de ecuaciones para los valores de u en el valor temporal k+1. Este sistema se resuelve mediante algún método de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales como por ejemplo el Método de Newton. Si bien el sistema no lineal resultante para el esquema implícito parece más difícil de escribir, es bien sabido que los métodos implícitos tienen mejores resultados en cuanto a la convergencia.

El método de diferencias finitas generalizadas busca aproximar por separado todas las derivadas espaciales de la ecuación (43) en el punto (x_i, z_j, t_k) mediante la selección de una estrella $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_S\} \subset [x_0, \dots, x_N] \times [z_0, \dots, z_M]$, donde $\bar{x}_0 = (x_i, z_j, t_k)$. Posteriormente se utiliza esta información para resolver el sistema lineal

$$A(h_r, l_r, w_r)D = b(h_r, l_r, w_r, \theta_0, \theta_r)$$
(120)

 con

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_S \\ \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_2^2}{2} & \cdots & \frac{h_s^2}{2} \\ \frac{l_1^2}{2} & \frac{l_2^2}{2} & \cdots & \frac{l_s^2}{2} \\ h_1 l_1 & h_2 l_2 & \cdots & h_S l_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & l_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{l_1^2}{2} & h_1 l_1 \\ h_2 & l_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{l_2^2}{2} & h_2 l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_S & l_S & \frac{h_S^2}{2} & \frac{l_s^2}{2} & h_S l_S \end{pmatrix}$$
(121)

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{i,j}^{k}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_{k}^{k}}{\partial z} \\ \frac{\partial^{2} \theta_{i,j}^{k}}{\partial x^{2}} \\ \frac{\partial^{2} \theta_{i,j}^{k}}{\partial z^{2}} \\ \frac{\partial^{2} \theta_{i,j}^{k}}{\partial z^{2}} \\ \frac{\partial^{2} \theta_{i,j}^{k}}{\partial x \partial z} \end{pmatrix}$$
(122)

$$b = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_S \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_S \\ \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_2^2}{2} & \cdots & \frac{h_s^2}{2} \\ \frac{l_1^2}{2} & \frac{l_2^2}{2} & \cdots & \frac{l_s^2}{2} \\ h_1 l_1 & h_2 l_2 & \cdots & h_S l_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_S^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 - \theta_0 \\ \theta_2 - \theta_0 \\ \vdots \\ \theta_S - \theta_0 \end{pmatrix}$$
(123)

donde $h_r = x_r - x_0$, $l_r = z_r - z_0$ para $1 \le r \le S$ y $S \ge 5$.

Las condiciones iniciales en forma discretizada quedan como sigue

$$u(x_i, z_j, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2A_n \cos\left(\frac{n\pi x_i}{l}\right) \frac{e^{-\left(\sqrt{1+4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 4\kappa} - 1\right)\frac{z_j}{2}}}{1+\sqrt{1+4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 4\kappa}}, \quad \forall i, j$$
(124)

$$u(x_i, z_0, t_k) = 2e^{At_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - 4\kappa}}, \quad \forall i, k$$
(125)

Las condiciones (36) y (37), hacen que el sistema (40) tenga menos incógnitas a buscar para poder generar el valor en el borde correspondiente. Se fija los valores

$$\frac{\partial \theta_{0,j}^k}{\partial x} = \frac{\partial \theta_{N,j}^k}{\partial x} = 0, \quad \forall j,k$$
(126)

lo cual implica que

$$u(x_0, z_j, t_k) = u(x_1, z_j, t_k), \quad \forall j, k$$
(127)

$$u(x_N, z_j, t_k) = u(x_{N-1}, z_j, t_k), \quad \forall j, k$$
(128)

y la condición

$$\frac{\partial \theta_{i,M}^k}{\partial z} = 0, \quad \forall i,k \tag{129}$$

permite escribir

$$u(x_i, z_M, t_k) = u(x_i, z_{M-1}, t_k), \quad \forall i, k$$
(130)

7 Experimentos computacionales

7.1 Caso unidimensional

Se utiliza el software MATLAB 2021 para correr los algoritmos de diferencias finitas generalizadas. En todos los casos se utilizan mallas regulares debido a que los dominios son esencialmente rectangulares. Para el problema unidimensional tratado por Hayek (2016) se utiliza S = 2 y w(h) = 1, de modo que coincide con el método de diferencias finitas usuales. Las figuras 10, 11, 12, 13, 14 y 15 describen la solución del problema en distintos valores de t.





Figura 12: Perfil de concentración para t=6



Figura 13: Perfil de concentración para $t=18\,$



7.2 Caso bidimensional con término fuente no lineal

Al resolver el problema descrito por Broadbrige (2017), se utiliza S = 2 y w(h) = 1, y se varía en dos combinaciones de parámetros y funciones D, K y R, descritas en la siguiente tabla:

Caso	A	m	κ	D(heta)	$K(\theta)$	R(heta)
Ι	-0,0021	3	$-3,\!31\cdot 10^{-5}$	$\frac{me^{m\theta}}{e^m-1}$	$\tfrac{e^{m\theta}-1}{e^m-1}$	$\frac{\kappa(e^{m\theta}-1)}{e^m-1} + \frac{A(1-e^{-m\theta})}{m}$
II	-0,0035	5	$-4,\!68\cdot 10^{-6}$	$\frac{me^{m\theta}}{e^m-1}$	$\tfrac{e^{m\theta}-1}{e^m-1}$	$\frac{\kappa(e^{m\theta}-1)}{e^m-1} + \frac{A(1-e^{-m\theta})}{m}$
III	-0,0021	3	$-3,\!31\cdot 10^{-5}$	$\frac{mcosh(m\theta)}{sinh(m)}$	$\frac{\sinh(m\theta)}{\sinh(m)}$	$\frac{\kappa sinh(m\theta)}{senh(m)} + \frac{Atanh(m\theta)}{m}$
IV	-0,0035	5	$-4,\!68\cdot 10^{-6}$	$\frac{mcosh(m\theta)}{sinh(m)}$	$\frac{\sinh(m\theta)}{\sinh(m)}$	$\frac{\kappa sinh(m\theta)}{senh(m)} + \frac{Atanh(m\theta)}{m}$

Cuadro 1: Tabla de descripción de casos a resolver

Las figuras 5,6,7 y 8 grafican la concentración en distintos tiempos para los casos I y II, y las figuras 9,10,11 y 12 lo hacen para los casos III y IV.

En la figura (16) se puede ver el perfil inicial para t = 0 de la solución, cuando se utiliza una malla de rectangular de n = 100 puntos, construida por la división del intervalo [0, 1] en 10 puntos para x y la división del intervalo [0, 3] en 10 puntos para z también. Para la convergencia del método se tomó una cantidad de 40001 puntos equiespaciados del intervalo [0, 500] para t. Aquí $t_0 = 0$ y $t_f = 500$ que son los instantes inicial y final respectivamente. En la misma gráfica se muestra la evolución de la concentración de humedad en los poros para tres instantes en particular, t = 0, 250 y t = 500. Se puede observar en las figuras 16 a 23 que la solución analítica tiene el mismo comportamiento y sus gráficas son prácticamente las mismas para los mismos valores de t graficados para el GFDM. Al observar las gráficas de forma cualitativa se puede concluir que el método de diferencias finitas generalizadas.

La medida de error a utilizar para comparación son la norma dos al cuadrado y la diferencia máxima en valor absoluto. En concreto, si $\theta_{i,j}^k$ y $u_{i,j}^k$ son los valores reales de θ por la



Figura 16: Perfil de concentración para distintos t con el método GFDM en el caso I.



Figura 18: Perfil de concentración para distintos t con el método GFDM en el caso II.



Figura 17: Perfil de concentración para distintos t con la solución analítica de Broadbridge en el mismo caso.



Figura 19: Perfil de concentración para distintos t con la solución analítica de Broadbridge en el mismo caso.

solución analítica y la solución aproximada por el método de diferencias finitas generalizadas respectivamente, entonces se definen los errores como

$$E_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left(\theta_{i,j}^k - u_{i,j}^k \right)^2$$
(131)

$$E_{max} = \max_{1 \le i \le N, 1 \le j \le M} |\theta_{i,j}^k - u_{i,j}^k|$$
(132)

El método de diferencias finitas generalizadas se probará también para distintas mallas para ir observando el comportamiento del error y convergencia en cada caso. Los resultados obtenidos se resumen en las siguientes tablas para cada caso estudiado:



Figura 20: Perfil de concentración para distintos t con el método GFDM en el caso III.



Figura 22: Perfil de concentración para distintos t con el método GFDM en el caso IV.



Figura 21: Perfil de concentración para distintos t con la solución analítica de Broadbridge en el mismo caso.



Figura 23: Perfil de concentración para distintos t con la solución analítica de Broadbridge en el mismo caso.

Caso	N	M	P	E_2	E_{max}
Ι	10	10	40001	0,0027	0,0092
Ι	16	16	1000001	0,0020	0,0072

Cuadro 2: Tabla de resultados para el caso I

Caso	N	M	P	E_2	E_{max}
II	10	10	40001	$7,2045 \cdot 10^{-4}$	0,0061
II	16	16	120001	0,0103	0,0081

Cuadro 3: Tabla de resultados para el caso II

Caso	N	M	P	E_2	E_{max}
III	10	10	40001	0,0033	0,0098
III	16	16	1000001	0,0030	0,0079

Cuadro 4: Tabla de resultados para el caso III

Caso	N	M	P	E_2	E_{max}
IV	10	10	40001	$7,1577 \cdot 10^{-4}$	0,0059
IV	16	16	120001	0,0101	0,0080

Cuadro 5: Tabla de resultados para el caso IV

Una idea utilizada en [21] para estudiar y concluir acerca de lo solución son la gráficas de contorno para distintos valores de θ . Las siguientes figuras representan gráficas de contorno de la solución por el método de diferencias finitas generalizada así como de la solución analítica.



Figura 24: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con el método GFDM en el caso I.



Figura 25: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con la solución dada por Broadbridge [21] en el caso I.



Figura 26: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con el método GFDM en el caso II.



Figura 28: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con el método GFDM en el caso III.



Figura 27: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con la solución dada por Broadbridge [21] en el caso II.



Figura 29: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con la solución dada por Broadbridge [21] en el caso III.



Figura 30: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con el método GFDM en el caso IV.



Figura 31: Gráficas de contorno para distintos valores de θ en $t = t_f$ con la solución dada por Broadbridge [21] en el caso IV.

8 Discusión

Como se puede apreciar en los resultados de la sección anterior, el método de diferencias finitas es un método que en primera instancia converge a las soluciones con éxito. Esto, sin embargo, no quiere decir que no haya ciertos aspectos del método a tener consideración a la hora de resolver un problema con valores en la frontera.

En primera instancia el problema presentado por Hayek en [20] parece ser bastante bien aproximado por el método de diferencias finitas generalizadas. Si bien la ecuación resuelta en este caso no tiene término fuente no lineal, es útil la comparación para entender la forma en que funciona el método. Es cierto que el problema en una dimensión espacial reduce significativamente la dificultad a la hora de programar el método, ya que la estrella de cada punto queda fácilmente determinada. De hecho en estos casos ni siquiera hay que preocuparse por utilizar un criterio determinado para elegir los puntos de apoyo para aproximar la derivada pues hay solamente dos direcciones posibles. La ventaja de plantear el m étodo de diferencias finitas generalizadas en una dimensión, es el hecho de poder construir un método que actué sobre la partición de un intervalo que no sea equidistante y por lo tanto permita la posibilidad de tener puntos a distintas distancia. Esto es especialmente útil en algunas ecuaciones diferenciales parciales donde la norma del gradiente (o pendiente de la derivada si corresponde) toma valores muy altos, lo cual indica que la función en esas zonas crece de manera más violenta. La idea a plantear ante esta situación es refinar la malla en esas zonas, es decir, agregar más puntos que estén más cercanos entre ellos de modo que se puede reducir el error de aproximación de las derivadas.

En cuanto a la solución construida por Hayek, la comparación gráfica muestra que el GFDM aproxima y reproduce muy bien la solución del problema. En [20] se muestra el siguiente gráfico que da a entender el comportamiento de la función θ .

En esta caso la función buscada es una que muestre la saturación efectiva de los poros cuando existe irrigación constante a lo largo del eje z que tiende a aumentar con el



Figura 32: Solución presentada en [20] para la ecuación de Richards unidimensional

tiempo hasta un valor máximo. La figura (32) muestra este proceso a medida que avanza el tiempo, pues los poros que se encuentran a mayor profundidad comienzan a saturarse hasta lograr un valor máximo con el frente de irrigación usado. La curva en rojo de la figura, y por tanto los valores correspondiente a ésta, corresponden con la solución presenta por Hayek en 2016. La curva en azul es un segundo caso que usa de distintos valores para los parámetros pero que presenta el mismo comportamiento con el anterior.

En el caso de la ecuación de Richards bidimensional presentada en [21], el comportamiento natural de la solución analítica $\theta(x, z, t)$ cuando se hace variar t, es el de una superficie que en términos generales mantiene su forma y comienza a bajar hasta el plano x - z. Esto se puede apreciar con todo el análisis hecho en el escrito sobre la solución analítica encontrada.

Es relevante remarcar también que en el caso de los esquemas explícitos no existe una libertad absoluta en la partición para que el esquema iterativo converja efectivamente. Esto queda en evidencia especialmente en el problema solucionado por Broadbridge en [21] con las magnitudes de las particiones que se tuvo que tomar en todos los casos estudiados, ya que la cantidad de puntos a tomar para la variable t es muy grande comparado con la cantidad de puntos tomados para x y z. Sin embargo, no hay que olvidar considerar el valor máximo tomado para t, el cual es de 500 en comparación con los valores máximos considerado para x y z que son de 1 y 3 respectivamente. La razón por la que se toma un valor tan grande de t es por el hecho de que para valores pequeños de t no se puede apreciar una diferencia en los valores de θ tanto gráfica como numéricamente. Esto se debe a que la constante A que aparece en el exponente del término exponencial es muy chico para una variación pequeña de t. De hecho, para valores de t en el intervalo [0, 10], el término e^{At} es muy parecido a 1, haciendo que la superficie final $\phi(x, z)$ baje muy poco.

Es evidente que la solución obtenida por el método de diferencias finitas generalizada reproduce el comportamiento de la solución analítica propuesta en [21], ya que a medida que evoluciona en el tiempo se produce una atenuación de la superficie inicial en t = 0, atenuación producida por el término exponencial e^{-At} . Las gráficas de contorno muestran también una gran coincidencia, aunque en este caso si parece resaltar las pequeñas diferencias numéricas de ambas soluciones. Aún as_i la diferencia en términos absolutos no es demasiado grande y tampoco afecta esto a la tendencia o comportamiendo de la solución generada por el GFDM. Este trabajo en particular se puede contrastar con otro que también ha tenido un objetivo similar, que es el de Chávez-Negrete, Domínguez-Mota y Santana-Quinteros en [22]. En tal escrito se presenta la solución de la ecuación de Richards sin término fuente no lineal pero en dos dimensiones espaciales, que son las mismas consideradas en este trabajo y en la solución encontrada por Broadbridge. La conclusión del escrito es que los resultados muestran que el método de diferencias finitas generalizadas obtienen un buen desempeño al resolver la ecuación de Richards considerada. Este desempeño se mide no en comparación a una solución analítica encontrada en algún otro trabajo previo, sino que más bien se compara respecto del método de elementos finitos. El software usado para comparar en tal instancia es FlexPDE 6 de PDE Solutions Inc, y éste implementa el método de elementos finitos de tipo triangular que además contempla un refinado adaptativo de la malla para minimizar el error en zonas donde la norma del gradiente tenga muy altos valores. Los resultados mostrados de forma gráfica y numéricas son buenos y consistentes respecto del método de elementos finitos.

Si bien los resultados mostrados son buenos, es útil mencionar las diferencias que contiene este trabajo respecto de tal publicación. La primera diferencia ya fue resaltada en el párrafo anterior, y es el hecho de que se haya trabajado la ecuación de Richards sin un término fuente no lineal. Este término agrega una complejidad extra a la ecuación y claramente interviene en la convergencia de cualquier esquema de aproximación numérica. Si bien no se especifica particularmente qué tipo de criterio se utiliza para formar la estrella de cada punto, aún así este hecho no parece influir mucho siempre y cuando se haya hecho mediante alguno de los criterios mencionados anteriormente y considerando las ventajas y desventajas de cada uno. Otra diferencia notable es qué tipo de expresión se utiliza para aproximar la derivada temporal de primer orden. El esquema usado es tipo Crank-Nicolson implícito para aproximar la primera derivada temporal. Si bien este tipo de expresiones es menos sencilla que la presentada acá, ésta tiende a ganar orden de precisión para el término que reemplaza.

Un punto en común es el hecho de que se utiliza una malla de tipo rectangular para trabajar el problema presentado. Esta decisión es coherente ya que el dominio no presenta ningún tipo de irregularidad ni geometría especial, aunque en realidad el modelo corresponda a una situación diferente.

9 Conclusiones

En este trabajo se presenta el método de diferencias finitas generalizadas y su aplicación a problemas propuestos en primera instancia a la ecuación de Richards unidimensional y en segunda instancia a la ecuación de Richards bidimensional con término fuente no lineal. La convergencia del método es verificada para distintos tamaños de malla y sus resultados son coherentes con lo presentado en la literatura. Se utilizan los datos, casos y soluciones presentadas en [20] y [21] con el fin de contrastar los resultados obtenidos por el GFDM. Estos resultados se presentan tanto de forma gráfica como numérica, lo cual muestra en ambos casos una gran coincidencia con las soluciones analíticas.

Cabe destacar que este trabajo se presenta de forma novedosa con la idea de ser un aporte a nuevos conocimientos, ya que en otros trabajos como el de [22] se utiliza e implementa el mismo método trabajado en este escrito, pero se hace sobre la ecuación de Richards sin término fuente y con una comparación de tipo numérica.

Por último, se plantean dos ideas a seguir desarrollando en trabajos posteriores; la primera es la implementación del método de diferencias finitas generalizadas mediante un esquema implícito de resolución para la ecuación de Richards bidimensional. La segunda es el desarrollo de condiciones de convergencia para los esquemas explícito e implícito de resolución numérica para la ecuación de Richards, cuya dificultad se encuentra aún en el manejo controlado del error de la parta elíptica del operador diferencial de la ecuación.

10 Bibliografía

Referencias

- VERRUIJT, A. (1970). Theory of Groundwater Flow. Macmillan Civil Engineering Hydraulics Series, MacMillan Education, ISBN 978-1-349-00177-4
- [2] BEAR, J., CHENG, A.H.-D. (2010). Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport. Springer Science+Business Media B.V., Springer, ISBN 978-1-4020-6681-8
- [3] SEARS, F., ZEMANSKY, M. (2009) Física universitaria volumen 1, Décimosegunda edición, Pearson educación, ISBN 978-607-442-288-7 (2009)
- [4] RITZEMA, H.P. (1994). Drainage Principles and Applications. International Institute for Land Reclamation and Improvement (ILRI), Publication 16, second revised edition, Wageningen, The Netherlands, pág. ISBN 90 70754 3 39
- [5] RICHARDS, L. A. (1931) Capillary conduction of liquids through porous mediums *Physics*, American Institute of Physics, Vol. 1 (1931) 318-333
- [6] JENSEN, P. S. (1972) Finite difference techniques for variable grids Computer and Structures, Pergamon Press, Vol. 2 (1972) 17-29
- [7] PERRONE, N., KAO, R. (1975) A general Finite Difference Method for arbitrary Meshes Computer and Structures, Pergamon Press, Vol. 5 (1975) 45-58
- [8] LISZKA, T., ORKISZ, J. (1980) The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics *Computer and Structures*, Pergamon Press, Vol. 11, pp. 83-95
- [9] BECK, A. (2014) Introduction to nonlinear optimization. Theory, Algorithms and Applications with Matlab, First Edition, MOS-SIAM, ISBN 978-1-611973-64-8 (2014)
- [10] CANAVOS, G.C. (1988) Probalidad y Estadística. Aplicaciones y métodos, Primera edición, Mc-Graw Hill, ISBN 968-451-856-0 (1988)
- [11] UREÑA F., GAVETE L., GARCÍA A., BENITO J.J., VARGAS A.M. (2019) Solving second order non-linear parabolic PDEs using generalized finite difference method (GFDM) *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 354 (2019) 221-241
- [12] UREÑA F., GAVETE L., GARCÍA A., BENITO J.J., VARGAS A.M. (2020) Solving second order non-linear hyperbolic PDEs using generalized finite difference method (GFDM) *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 363 (2020) 1-21
- [13] UREÑA F., GAVETE L., GARCÍA A., BENITO J.J., VARGAS A.M., SALETE E. (2017) Solving second order non-linear elliptic partial differential equations using generalized finite difference method *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, 318 (2017) 378-387
- [14] SMITH, G.D. (1985) Numerical solution of partial differential equations: Finite Difference Methods, Third Edition, Oxford applied Mathematics and Computing Science series, ISBN 0-19-859641-3 (1985)

- [15] THOMAS, J.W. (1995) Numerical Partial Differential Equations, Finite Difference Methods Springer Science+ Business Media, Springer (1995)
- [16] STRIKWERDA, J.C. (2004) Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition, SIAM, ISBN 0-89871-567-9 (2004)
- [17] CHENEY, W., KINCAID, D. (2012) Numerical Mathematics and Computing, Seventh Edition, Cengage Learning, ISBN-13: 978-1-133-10371-4 (2012)
- [18] NAYROLES, B., TOUZOT, G., VILLON, P., Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics* 10, 307-318 (1992).
- [19] OÑATE, E., IDELSOHN, S., ZIENKIEWICZ, O.C. AND TAYLOR, R.L., A finite point method in Computational Mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering 39, 3839-3866 (1996).
- [20] HAYEK, M. (2016) An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear Richard's equation for modeling infiltration with special hydraulic functions *Journal of Hidrology*, Elsevier, 535 (2016) 662-670
- [21] BROADBRIDGE, P., DALY, E., GOARD, J. (2017) Exact Solutions of the Richards Equation With Nonlinear Plant-Root Extraction Water Resources Research, Agu Publications, 53 (2017) 9679-9691
- [22] CHÁVEZ-NEGRETE, C., DOMÍNGUEZ-MOTA, F.J., SANTANA-QUINTEROS, D. (2018) Numerical solution of Richard's equation of water flow by generalized finite differences *Computer and Geotechnics*, Elsevier, 101 (2018) 168-175

11 Anexos

11.1 Diferencias finitas generalizadas en \mathbb{R}^3

Ahora se presentará el método de diferencias finitas generalizadas para una función de tres variables en su forma más general. Sea f = f(x, y, z) una función $C^r(U)$, $r \in \mathbb{N}$, para cierta bola abierta U de \mathbb{R}^3 . Es sabido del cálculo multivariable que es posible generar un polinomio de Taylor centrado en un punto $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para aproximar el valor de f en un punto X = (x, y, z) mediante la expresión:

$$f(X) = f(X_0) + (\nabla \cdot H) f(X_0) + \frac{(\nabla \cdot H)^2 f(X_0)}{2} + \dots + \frac{(\nabla \cdot H)^{(r-1)} f(X_0)}{(r-1)!} + \frac{(\nabla \cdot H)^{(r)} f(\Lambda)}{(r)!}$$
(133)

donde $\nabla \cdot H$ es el operador $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, $l = z - z_0$ y $\Lambda = tX + (1 - t)X_0$ para cierto $t \in (0, 1)$. Notemos que si f = f(x, y) entonces el operador $\nabla \cdot H$ se convierte en $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)$, y se recupera la fórmula de Taylor para una función de dos variables.

Si ahora se conoce la función en una cantidad de finita de puntos, se puede utilizar esta información para aproximar todas las derivadas en un punto hasta el orden r que se necesiten. En general, si se necesita aproximar hasta la derivada r-ésima para una función de n variables, la cantidad de incógnitas involucradas en el sistema se obtiene sumando todas las derivadas posibles en las n variables desde orden uno hasta orden n. Este problema de tipo combinatorio no es un problema trivial y ha sido tratado en distinto trabajos y fuentes bibliográficas. En particular, si se necesita conocer de cuántas formas se puede derivar r veces una función de n variables, se necesita calcular el número $p_n(r)$ que es la partición de un número entero positivo en la suma de n enteros positivos. Una forma poderosa de establecer este resultado es mediante el uso de series generadoras.

Si $m = \sum_{i=1}^{r} p_n(i)$, se puede usar entonces m puntos distintos de X_0 , digamos X_1, X_2, \ldots, X_m , para aproximar todas sus derivadas hasta las de orden r resolviendo el sistema:

$$(\nabla \cdot H_1) f(X_0) + \frac{(\nabla \cdot H_1)^2 f(X_0)}{2} + \dots + \frac{(\nabla \cdot H_1)^{(r)} f(X_0)}{r!} = f(X_1) - f(X_0)$$
(134)
$$(\nabla \cdot H_2) f(X_0) + \frac{(\nabla \cdot H_2)^2 f(X_0)}{2} + \dots + \frac{(\nabla \cdot H_2)^{(r)} f(X_0)}{r!} = f(X_2) - f(X_0)$$
$$\vdots$$
$$(\nabla \cdot H_m) f(X_0) + \frac{(\nabla \cdot H_m)^2 f(X_0)}{2} + \dots + \frac{(\nabla \cdot H_m)^{(r)} f(X_0)}{r!} = f(X_m) - f(X_0)$$

donde $H_i = X_i - X_0$. En el caso de r = 2, se puede aproximar las 9 derivadas de orden menor o igual a 2 en el punto $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, utilizando 10 puntos incluyendo X_0 y formando un sistema lineal de 9 ecuaciones y 9 incógnitas. Considérese $X_0, X_1, X_2, ..., X_9$ puntos distintos y por simplicidad denotaremos $f_i = f(X_i)$. Así las cosas, se puede escribir

$$\begin{pmatrix} h_1 & k_1 & l_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{k_1^2}{2} & \frac{l_1^2}{2} & h_1k_1 & h_1l_1 & k_1l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & \frac{l_2^2}{2} & h_2k_2 & h_2l_2 & k_2l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 & \frac{h_3^2}{2} & \frac{k_3^2}{2} & \frac{l_3^2}{2} & h_3k_3 & h_3l_3 & k_3l_3 \\ h_4 & k_4 & l_4 & \frac{h_4^2}{2} & \frac{k_4^2}{2} & \frac{l_4^2}{2} & h_4k_4 & h_4l_4 & k_4l_4 \\ h_5 & k_5 & l_5 & \frac{h_5^2}{2} & \frac{k_5^2}{2} & \frac{l_5^2}{2} & h_5k_5 & h_5l_5 & k_5l_5 \\ h_6 & k_6 & l_6 & \frac{h_6^2}{2} & \frac{k_6^2}{2} & \frac{l_6^2}{2} & h_6k_6 & h_6l_6 & k_6l_6 \\ h_7 & k_7 & l_7 & \frac{h_7^2}{2} & \frac{k_7^2}{2} & \frac{l_7^2}{2} & h_7k_7 & h_7l_7 & k_7l_7 \\ h_8 & k_8 & l_8 & \frac{h_8^2}{2} & \frac{k_8^2}{2} & \frac{l_8^2}{2} & h_8k_8 & h_8l_8 & k_8l_8 \\ h_9 & k_9 & l_9 & \frac{h_9^2}{2} & \frac{k_9^2}{2} & \frac{l_6^2}{2} & h_9k_9 & h_9l_9 & k_9l_9 \end{pmatrix}$$

$$(135)$$

donde $h_i = x_i - x_0$, $k_i = y_i - y_0$ y $l_i = z_i - z_0$. Cabe destacar que este sistema se podría haber planteado con más de 9 puntos, logrando obtener un sistema sobredeterminado para las 9 variables involucradas. En este caso, la solución no es exacta y pasa por buscar la mejor aproximación de las incógnitas del sistema, es decir, los valores que minimicen la suma cuadrática de errores.

En este punto, es interesante estudiar cuando el sistema (3) tiene solución única o no, lo que conduce a ver en qué casos el determinante de la matriz de coeficientes en el miembro izquierdo de la ecuación (3) es 0. Veamos que el determinante de esa matriz, a la cual llamaremos A, no puede ser cero por proporcionalidad entre filas. En efecto, si fuese así existen dos índices distintos i y j, y existe $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que:

$$h_i = ph_j, \quad k_i = pk_j, \quad l_i = pl_j \tag{136}$$

$$h_i^2 = ph_j^2, \quad k_i^2 = pk_j^2, \quad l_i^2 = pl_j^2$$
 (137)

$$h_i k_i = p h_j k_j, \quad h_i l_i = p h_j l_j, \quad k_i l_i = p k_j l_j \tag{138}$$

Claramente, si $X_j \neq X_0$ entonces al menos una de las coordenadas de X_j es distinta a la respectiva coordenada de X_0 . Asumamos sin pérdida de generalidad que tal coordenada es la primera, de modo que $h_j \neq 0$. Así, de la primera igualdad de (4) se obtiene que $p = \frac{h_i}{h_j}$ y reemplazando esta expresión en la primera igualdad de (6) se obtiene que

$$h_i (k_i - k_j) = 0 \Rightarrow h_i = 0 \text{ ó } k_i = k_j$$

Si $h_i = 0$, entonces p = 0 lo que contradice la hipótesis inicial. Si $k_i = k_j$ entonces p = 1 y $h_i = h_j$ y $l_i = l_j$ de modo que $X_i = X_j$, lo cual contradice el hecho de que todos los puntos considerados son distintos.

De esta forma, sólo se puede aceptar que el determinante se anula debido a proporcionalidad entre columnas. Si se agrupa las columnas de A en tres grupos, $G_1 = \{A_{.1}, A_{.2}, A_{.3}\}, G_2 = \{A_{.4}, A_{.5}, A_{.6}\}$ y $G_3 = \{A_{.7}, A_{.8}, A_{.9}\}$, donde $A_{.j}$ es la columna j de A para $1 \le j \le 9$, se puede estudiar en qué casos el sistema no tiene solución única, de modo de echar un vistazo general a las situaciones que se deben evitar a la hora de escoger la estrella de puntos alrededor de X_0 a usar en el sistema.

Considérese ahora proporcionalidad entre elementos del mismo grupo, digamos entre A_1 y A_2 para el grupo G_1 , es decir, existe $p \neq 0$ tal que

$$h_i = pk_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$
 (139)

Una breve reflexión lleva a concluir que los puntos deben todos ser parte del plano $x = p(y - y_0) + x_0$, de modo que elegir todos los puntos en un mismo plano donde el vector normal tiene un cero en la tercera componente hace que el sistema puesto en (4) no se pueda solucionar. Se hacen conclusiones similares para cuando otras dos columnas de G_1 son múltiplos escalares.

Si ahora existe $p \neq 0$ tal que $A_{.4}$ y $A_{.5}$ son múltilplos escalares

$$h_i^2 = pk_i^2, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 9\}$$
(140)

lo que lleva a concluir que los puntos no pueden pertenecer a planos asintóticos para una hipérbola que se abre de forma paralela al plano xy. Una vez más se pueden hacer conclusiones similares para otras columnas de G_2 .

Para G_3 vemos que si $A_{.7}$ y $A_{.8}$ son proporcionales, tenemos

$$h_i k_i = p h_i l_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 9\}, \quad p \neq 0$$
(141)

y por tanto los punto pertenecen al plano $x = x_0$ o al plano $y = p(z - z_0) + y_0$.

Si ahora la proporcionalidad fuese entre columnas de distinto grupo, digamos G_1 y G_2 , y en particular entre $A_{\cdot 1}$ y $A_{\cdot 5}$, se tendría que

$$h_i = pk_i^2, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 9\}, \quad p \neq 0$$
 (142)

concluyendo que los puntos no pueden pertenecer a la parábola $x = p(y - y_0)^2 + x_0$.

Se podría seguir estudiando los casos para las interacciones entre columnas de G_1 y G_3 , y G_2 y G_3 , llegando a conclusiones similares para distintos planos, parábolas e incluso conos elípticos como podría suceder para cuando hay proporcionalidad entre las columnas 5 y 8 de A, sin embargo, se deja entrever lo que sucedería dado lo hecho anteriormente.

Si se quiere evitar que los puntos formen alguno de los planos o figuras en general de las que se mencionó en los párrafos anteriores, parece primordial elegir los puntos de la estrella de X_0 en distintas secciones de los octantes que define ese mismo punto.

En general, además de saber cuándo se anula el determinante del sistema, se tiene que considerar si la matriz está mal condicionada o no, ya que este hecho puede influir directamente en la resolución del sistema, independientemente del método que se utilice para resolver. Con esta idea en mente, se debe seleccionar de manera cuidadosa los puntos que se utilicen para aproximar las derivadas en un punto central X_0 . Existen distintos métodos de control propuestos por diversos autores, para asegurar que los puntos usados son útiles a la hora de aproximar las derivadas.

11.2 Código de GDFM para la ecuación de Richards con solución presentada por Hayek 2016 (Eduardo Contrera)

%RICHARDS 1-D POR DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS HAYEK 2016

```
clc
clear all
%Definicion de constantes
n = 3.5;
a = 0.1;
os = 0.4;
or = 0.06;
ks = 1;
n2 = 1.9269;
a2 = 0.1525;
ks2 = 1.1147;
%Discretizacion del dominio de z y t
z = linspace(0, 50, 51);
t = linspace(0, 45, 1501);
dt = (t(2) - t(1));
%Valores parametros del modelo
D0 = ((n * ks) / (a * (os - or)));
K0=(ks)/(os-or);
V = K0 * (os)^{(n-1)};
D02 = ((n2*ks2)/(a2*(os-or)));
K02 = (ks2) / (os - or);
V2 = K02 * (os)^{(n2-1)};
%Condiciones iniciales
```

U=or * ones (1, length(z));U=or * ones (1, length(z));

%Aproximacion de derivadas con respecto a z mediante diferencias finitas %generalizadas.

```
for j=2:length(t)

U(j,:)=zeros(1, length(z));

U(j,1)=or+(os-or)*(1-exp(-(a*(n-1)*V*t(j))/n))^(1/(n-1)); %condicion
```

```
para z=0

U(j, length(z))=U(j-1, length(z))+dt*((2*D0*(U(j-1, length(z)))^(n-1)*

(U(j-1, length(z)-1)-U(j-1, length(z))))/((z(length(z)-1)-z(length(z)))^2));

%condicion para z=M

for i=2:(length(z)-1)

h1=z(i-1)-z(i);

h2=z(i+1)-z(i);

A=[h1,(h1)^2/2;h2,(h2)^2/2];

b=[U(j-1,i-1)-U(j-1,i);U(j-1,i+1)-U(j-1,i)];

D=A\b;

U(j,i)=U(j-1,i)+dt*(D0*(n-1)*(U(j-1,i))^(n-2)*(D(1))^(2)+D0*(U(j-1,i))^(n-1)*D(2)-K0*n*(U(j-1,i))^(n-1)*D(1));

end
```

```
end
```

```
for j=2:length(t)
    U2(j,:) = zeros(1, length(z));
    U_{2(j,1)} = or + (os - or) * (1 - exp(-(a^{2} * (n^{2} - 1) * V^{2} * t(j))/n^{2}))^{(1/(n^{2} - 1))};
    %condicion para z=0
    U_{2(j, length(z))} = U_{2(j-1, length(z))} + dt * ((2*D02*(U_{2(j-1, length(z))}))^{(n2-1)})
     (U2(j-1, length(z)-1)-U2(j-1, length(z))))/((z(length(z)-1)-z(length(z)))^2));
     for i = 2:(length(z)-1)
    h1=z(i-1)-z(i);
    h2=z(i+1)-z(i);
    A = [h1, (h1)^{2}/2; h2, (h2)^{2}/2];
    b = [U2(j-1,i-1)-U2(j-1,i);U2(j-1,i+1)-U2(j-1,i)];
    D=A \setminus b;
    U2(j, i) = U2(j-1, i) + dt * (D02*(n2-1)*(U2(j-1, i))^{(n2-2)}*(D(1))^{(2)} + D02*
     (U2(j-1,i))^{(n2-1)*D(2)-K02*n2*(U2(j-1,i))^{(n2-1)*D(1)});
    end
end
```

```
GRAFICOS DE LAS FUNCIONES
```

```
for j=1:length(t)
    figure(1);
    clf;
    plot(z,U(j,:))
    hold on
    plot(z,U2(j,:),'r')
    axis([-5,55,0,1])
    drawnow
    pause(0.001)
end
```

```
%plot(z,U(1401,:))
%hold on
```

```
%axis([-5,55,0,0.5])
%plot(z,U2(1401,:),'r')
%legend('a=0.1, n=3.5, Ks=1','a=0.1525, n=1.9269, Ks=1.1147')
%title('Concentracion de agua')
%xlabel('Profundidad z')
%ylabel('Concentracion theta')
```

11.3 Código de GFDM para la ecuación de Richards con término fuente no lineal (Eduardo Contrera)

%PROGRAMA DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS PARA RESOLVER LA ECUACION %DE RICHARDS PRESENTADA EN BROADBRIDGE 2017 clear all clc a=0; %Limite inferior en x b=1; %Limite superior en x c=0; %Limite inferior en z d=3; %Limite superior en z px=10; %Cantidad de puntos en x pz=10; %Cantidad de puntos en z dx=(b-a)/(px-1); %Delta x dz=(d-c)/(pz-1); %Delta z tf=500; %Tiempo final r=40001; %Cantidad de puntos para tiempo dt=tf/r; %Delta tiempo %LOS SIGUIENTES SON PARAMETROS PROPIOS DEL PROBLEMA $x_0 = 0.25;$ l = 1;%SET 1 PARAMETROS m=3:A0 = -0.0021;F0 = 2.3605;ke = -0.0000331;%SET 2 PARAMETROS % m=5;% A0 = -0.0035;% F0=2.3605; % ke = -0.00000468;%MALLA RECTANGULAR x=linspace(a,b,px); z = linspace(c, d, pz);[X,Z] = meshgrid(x,z);t = linspace(0, tf, r);malla = [];for i=1:length(x)for j=1: length(z)

```
malla(end+1,:) = [x(i), z(j)];end
```

end

```
lm2 = length(malla(:,1));
```

%ordena la malla lexicograficamente empezando por la primera componente

```
for i = 1:lm2-1
     peq=i;
     for j=i+1:lm2
           if malla(j,1) < malla(peq,1)
                peq=j;
           end
     end
     aux=malla(peq,:);
     malla(peq,:) = malla(i,:);
      malla(i,:) = aux;
end
% ahora ordena la segunda componente
\operatorname{con}=1:
\operatorname{con} 2 = 1;
while (\operatorname{con}<\operatorname{lm}2)\&(\operatorname{con}2<=\operatorname{lm}2)
      if malla (con, 1) = = b
           \lim = \lim 2;
      else
           for j=con+1:lm2
                 if malla(j,1)<sup>~</sup> = malla(con,1)
                      \lim_{j \to j} -1;
                      break
                end
           end
     end
      for k=con:lim-1
                pq=k;
           for p=k+1:lim
                 if malla(p,2) < malla<math>(pq,2)
                      pq=p;
                end
           end
           aux2=malla(pq,:);
           malla(pq,:) = malla(k,:);
           malla(k,:) = aux2;
     end
     con2=con2+1;
```

```
con=lim+1; \% REVISAR
```

end

```
% CONDICION INICIAL DADA POR BROADBRIDGE
N=2000;
theta=broad(ke,F0,m,A0,b,px,d,pz,tf,r,N);
U=[];
ini=[];
stheta=size(theta(:,:,1));
for j=1:stheta(2)
    for i=1:stheta(1)
        ini(stheta(1)*(j-1)+i)=theta(i,j,1);
    end
end
U=ini';
```

%CREACION DE LA MATRIZ DE DISTANCIAS

```
 \begin{array}{l} D = z \operatorname{eros} (\operatorname{lm2}); \\ \text{for } i = 1: \operatorname{lm2} \\ & \text{for } j = i + 1: \operatorname{lm2} \\ & D(i, j) = \operatorname{sqrt} ((\operatorname{malla}(i, 1) - \operatorname{malla}(j, 1))^{(2)} + (\operatorname{malla}(i, 2) - \operatorname{malla}(j, 2))^{(2)}); \\ & D(j, i) = D(i, j); \\ & \text{end} \end{array}
```

end

D;

%
ESTRUCTURA DE CONTROL QUE ELIGE LA ESTRELLA POR CADA PUNTO
 $\mathbf{V}\!=\![\,]\,;$

```
for j=1:lm2
j
if (malla(j,1)==a)|(malla(j,1)==b)|(malla(j,2)==c)|(malla(j,2)==d)
%esta sentencia evita los nodos del borde
V(j,:)=zeros(1,8);
continue
else
if sum(1,8);
if sum(1,8);
if sum(1,8);
if sum(1,8);
if sum(1,8);
if sum(1,8);
if sum(1,1)==malla(1,1))==2
continue
elseif (malla(1,1)=malla(1,1))&(malla(1,2))=malla(1,2))
```

```
I(length(I)+1)=k;
    elseif (malla(k,1) \leq malla(j,1)) \& (malla(k,2) > malla(j,2))
         II(length(II)+1)=k;
    elseif (malla(k,1) < malla(j,1))\&(malla(k,2) <= malla(j,2))
         III (length (III)+1)=k;
    else
        IV(length(IV)+1)=k;
    end
end
Id = [];
IId = [];
IIId = [];
IVd = [];
%Ordena ahora los puntos del cuadrante I
for l=1:length(I)
    Id(length(Id)+1)=D(I(l),j); %crea el vector de distancias
    para los indices en I
end
iI = [];
[I(2,:), iI] = sort(Id);
Iaux = [];
for l=1:length(iI)
    Iaux(1) = I(1, iI(1));
end
I(1,:) = Iaux
%Ordena ahora los puntos del cuadrante II
for l=1:length(II)
    IId (length (IId)+1)=D(II(l),j); %crea el vector de distancias
    para los indices en II
end
i I I = [];
[II(2,:), iII] = sort(IId);
IIaux = [];
for l=1:length(iII)
    IIaux(1) = II(1, iII(1));
```

```
end
```

II(1,:) = IIaux

```
%Ordena ahora los puntos del cuadrante III
IIIaux = [];
for l=1:length(III)
    IIId (length (IIId)+1)=D(III(l),j); %crea el vector de distancias
    para los indices en III
end
iIII = [];
[III(2,:), iIII] = sort(IIId);
for l=1:length(iIII)
     IIIaux(1) = III(1, iIII(1));
end
III(1,:) = IIIaux
%Ordena ahora los puntos del cuadrante IV
for l=1:length(IV)
    IVd(length(IVd)+1)=D(IV(l),j); %crea el vector de distancias
    para los indices en IV
end
iIV = [];
[IV(2,:), iIV] = sort(IVd);
IVaux = [];
for l=1:length(iIV)
    IVaux(1) = IV(1, iIV(1));
end
IV(1,:) = IVaux
vec = [];
g = 0;
while (length(vec) < 8)
    aux=mod(g,4)+1;
     \operatorname{conjf} = [1, 2, 3, 4; \operatorname{length}(I), \operatorname{length}(II), \operatorname{length}(III), \operatorname{length}(IV)];
     if conjf(2, aux) = = 0
          g=g+1;
          continue
     else
```

```
switch aux
                       case 1
                            vec(length(vec)+1) = I(1,1);
                            I(:, 1) = [];
                       case 2
                            vec(length(vec)+1) = II(1,1);
                             II(:,1) = [];
                       case 3
                             \operatorname{vec}(\operatorname{length}(\operatorname{vec})+1) = \operatorname{III}(1,1);
                             III(:, 1) = [];
                       case 4
                            vec(length(vec)+1)=IV(1,1);
                            IV(:, 1) = [];
                 end
                 g=g+1;
           end
     end
     V(j,:) = vec;
end
```

```
end
```

%AHORA APROXIMA LAS DERIVADAS MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS

```
for p=1:r-1
    U(:, p+1) = z eros (lm2, 1);
    for j=1:lm2
         if V(j,1) = = 0
             continue
         else
             A = [];
             b1 = [];
             W=eye(8);
             for l=1:8
                  aux = [];
                  h=malla(V(j, l), 1) - malla(j, 1);
                  k=malla(V(j,1),2)-malla(j,2);
                  W(1, 1) = (\exp(-\operatorname{sqrt}(h^2+k^2)))^2;
                  aux = [h, k, (h^2)/2, (k^2)/2, h*k]; %crea matriz de coeficientes
                  A(1,:) = aux;
                  b1(1)=U(V(j,1),p)-U(j,p);
             end
             A1=A'*W*A;
             b2=A'*W*b1';
             dxy=A1 b2;
             func=c1richards(U(j,p),m,A0,ke);
             %Se realiza la aproximacion en el tiempo siguiente
```

```
 \begin{array}{c} U(j,p+1)=\!\!U(j,p)+dt*(func(1)*((dxy(1))^{(2)}+(dxy(2))^{(2)})+\\ func(2)*(dxy(3)+dxy(4))-func(2)*dxy(2)-func(3));\\ end \end{array}
```

end

```
for j=1:lm2

if (malla(j,2)==c)

U(j,p+1)=theta(1,floor(j/px)+rem(j,px),p+1);

elseif (malla(j,1)==a) & (malla(j,2)>c) & (malla(j,2)<d)

U(j,p+1)=U(pz+j,p+1);

elseif (malla(j,1)==b) & (malla(j,2)>c) & (malla(j,2)<d)

U(j,p+1)=U(j-pz,p+1);

elseif (malla(j,2)==d)

U(j,p+1)=U(j-1,p+1);

end

end
```

end

%ESTA PARTE SOLO COMPATIBILIZA EL VECTOR DE DATOS A FORMA MATRIZ PARA % GRAFICAR CON SURF O MESH

```
for p=1:3
     for i=1:length(x)
         for j=1:length(z)
              l = ((p-1)/2) * (length(t)-1)+1;
              U1(j, i, p) = U(length(z)*(i-1)+j, l);
         end
    end
     surf(z, x, U1(:, :, p))
    hold on
     axis ([0,d,0,b,0,1])
     title ('Porcentaje de humedad')
     xlabel('Eje z');
     ylabel('Eje x');
     zlabel('Eje \Theta');
     hold on
end
legend ('GFDM t=0', 'GFDM t=250', 'GFDM t=500')
U(:, end)
%ERROR BAJO NORMA 2
\operatorname{error} 2 = 0;
for j=1:px
     for i=1:pz
         error2 = error2 + (U1(i, j, end) - theta(i, j, end))^2;
```

```
end
end
error2
%ERROR MAX
errormax=0;
for j=1:px
   for i=1:pz
      new=abs(U1(i,j,end)-theta(i,j,end));
      if new>errormax
           errormax=new;
           i
           j
           end
           end
end
end
```

errormax

11.4 Código que crea la solución analítica dada por Broadbridge (Eduardo Contrera)

```
%SOLUCION ANALITICA RICHARDS BROADBRIDGE 2017
function [theta]=broad(k,F0,m,A,xf,px,zf,pz,tf,pt,N)
    %DEFINICION DE CONSTANTES
    %N=2000 %CANTIDAD DE TERMINOS DE LA SERIE
    %k = -0.0000331;
    \%F0 = 2.3605;
    l = 1;
    %A = -0.0021;
    x0 = 0.25;
    \%t f =1000;
    \%m=3;
    %DEFINICION DE MALLA
    x = linspace(0, xf, px);
    z = linspace(0, zf, pz);
    t = linspace(0, tf, pt);
    %SE ARMA LA SOLUCION CON LA SERIE. AQUI SE CREA LA FUNCION PHI MAYUSCULA
    fphi=zeros(length(z), length(x));
    for j=1:length(x)
         for i=1: length(z)
             phi=0;
             for n=0:N
```

```
if n==0
                   An = (F0 * x0) / 1;
                   phi=phi+2*An*cos((n*pi*x(j))/1)*
                   (\exp(-((\operatorname{sqrt}(1+4*((n*pi)/l)^2-4*k)-1)*z(i))/2))/
                   (1 + \operatorname{sqrt}(1 + 4*((n*pi)/l)^2 - 4*k));
               else
                   An=(2*F0*sin((n*pi*x0)/l))/(n*pi);
                   phi=phi+2*An*cos((n*pi*x(j))/1)
                   (\exp(-((\operatorname{sqrt}(1+4*((n*pi)/1)^2-4*k)-1)*z(i))/2)))/
                   (1 + \operatorname{sqrt} (1 + 4*((n*pi)/l)^2 - 4*k));
              end
         end
         fphi(i, j) = phi;
     end
end
fphi;
%CREACION DE FUNCION MU
mu = zeros(length(z), length(x), length(t));
for k=1:length(t)
     for i=1:length(z)
          for j=1:length(x)
              mu(i, j, k) = \exp(A * t(k)) * fphi(i, j);
         end
     {\rm end}
end
mu;
%CREACION DE FUNCION THETA MAYUSCULA
theta=zeros(length(z), length(x), length(t));
for k=1:length(t)
     for i=1: length(z)
          for j=1:length(x)
               theta (i, j, k) = (\log (1 + (\exp(m) - 1) * mu(i, j, k)))/m;
         end
     end
end
theta;
```

```
for k=1:length(t)
    surf(z,x,theta(:,:,k))
    axis([0,10,0,1,0,1])
    drawnow
end
```

 end
11.5 Código de funciones D, K y R usadas en el código de Broadbridge (Eduardo Contrera)

```
 \begin{array}{l} \mbox{function} \quad [D] = c1 \mbox{richards} (\, theta \, ,m,A,k) \\ D(1) = (m^{(2)} \exp(m* theta \,)) / (\, \exp(m) - 1); \ \% \ \mbox{DERIVADA} \ \ \mbox{DE DTHETA} \\ D(2) = (m* \exp(m* theta \,)) / (\, \exp(m) - 1); \ \% \ \ \mbox{DTHETA} \\ D(3) = (\, k* (\, \exp(m* theta \,) - 1)) / (\, \exp(m) - 1) + ((A*(1 - \exp(-m* theta \,))) / m); \ \ \% \ \ \ \mbox{THETA} \\ \mbox{end} \\ \mbox{end} \end{array}
```

```
 \begin{array}{l} \mbox{function} & [D] = c \, 2 \, \mbox{richards} \, (\, \mbox{theta} \, \, , m, A, k \,) \\ & D(1) = (m^{\, (2)} * \, \sinh \, (m * \, \mbox{theta} \, ) \,) \, / \, \sinh \, (m) \, ; \\ & D(2) = (m * \, \cosh \, (m * \, \mbox{theta} \, ) \,) \, / \, \sinh \, (m) \, ; \\ & D(3) = (\, k * \, \sinh \, (m * \, \mbox{theta} \, ) \,) \, / \, \sinh \, (m) \, + \, (\, (A * \, \mbox{tanh} \, (m * \, \mbox{theta} \, ) \,) \, / \, m) \, ; \\ & \mbox{end} \end{array}
```