Universidad Católica de Temuco

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Teorema de Equivalencia de Lax-Richtmyer y su aplicación al estudio de Convergencia del Método de Diferencias Finitas

por

Cecilia Charlotte Fuentes Fuentes

Profesor Guía

Dr. Emilio Cariaga López

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de

Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco, 5 de junio de 2025

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

.....

Dr. Emilio Cariaga López

Profesor informante:

.....

Dr. Paulo Zúñiga Oyarzo

Profesor informante:

.....

Dr. Ramón Bécar Collao

Director del Programa (Ministro de fe):

.....

Dr. Osvaldo Venegas Torres

Temuco, 5 de Junio de 2025

Perfil de egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas.
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional postgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas dinámicos y evolutivos. Específicamente:

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes de sistemas dinámicos y evolutivos.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Desarrolla y/o utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales en sistemas dinámicos y evolutivos.

Comunica información científico-matemática con rigurosidad técnica y claridad en el ámbito de la matemática aplicada.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme iniciar este gran desafío, por no dejarme bajar los brazos hasta llegar a esta última etapa, sin importar la dificultad que tuve que enfrentar en el proceso.

Agradecer al Doctor Emilio Cariaga López, mi profesor guía, que sin duda fue un apoyo fundamental, un honor ser su estudiante. Es una gran persona, excelente profesional, perfeccionista y de una gran vocación.

Agradezco a mi marido, mi familia, seres queridos, amigos colegas y lugar de trabajo, que estuvieron apoyando, en todo momento, diciendo cada día, que podía y que los sueños son para cumplirlos. Mi razón de vivir, mi hija, que llego a enseñarme, que todo lo que realice servirá como ejemplo para ella y que todo es posible en la vida.

Agradecer a mi padre, que me vio iniciar esta hermosa etapa y que ahora me acompaña desde el cielo.

Mención especial a Paulina Ale, ex estudiante y egresada del magíster, que me ayudo e incentivo a postular al magíster.

Finalmente agradecer, a las profesoras que creyeron e hicieron las cartas de recomendación para poder iniciar el magíster Sra. Valeria Carrasco Zuñiga y Sra. Pamela Alarcón Chavez .

Fue un largo proceso lleno de aprendizajes, vivencias y experiencias. Me coloco constantemente a prueba, pero las ganas y los deseos de llegar a la meta junto a mis compañeros de magíster, permitierón seguir adelante. Agradecida infinitamente, por la oportunidad.

Abstract

This study describes the Lax-Richtmyer Theorem and its application to the study of convergence of the finite difference method, for which 4 different models based on linear and nonlinear, ordinary and partial differential equations are used. After carrying out a bibliographic study, it was confirmed that there is great diversity in the way the method mentioned is presented. Moreover, it should be noted that this numerical method continues to be the basis of more advanced methods and that it is widely used in applied sciences currently. Therefore, this work stems from the need to unify and improve the presentation of this topic. Specifically, the convergence of the numerical scheme based on the finite difference method is demonstrated for two ordinary differential equations and for two partial differential equations. In each case, one equation is linear while the other is nonlinear. Finally, definitions, structure, notation, analysis, unified proofs and adaptation of the writing of the Lax-Richtmayer Theorem are provided. For future projections, the computational implementation of the cases studied is considered.

Resumen

En este estudio se describe el Teorema de Lax-Richtmyer y su aplicación al estudio de convergencia del método de diferencias finitas para lo cual se recurre a 4 modelos distintos basados en ecuación diferenciales ordinarias y parciales, lineales y no lineales. Luego de realizarse un estudio bibliográfico, se confirmó que existe una gran diversidad en la forma de presentar este método. Además, se debe destacar que este método numérico sigue siendo la base de métodos más avanzados y que es ampliamente utilizado en la actualidad en ciencias aplicadas. Específicamente, se demuestra la convergencia del esquema numérico basado en el método de diferencias finitas para dos ecuaciones diferenciales ordinarias y para dos ecuaciones diferenciales parciales, en cada caso una ecuación es lineal y la otra es no lineal. Finalmente, se aportan definiciones, estructura, notación, análisis, demostraciones unificadas y adaptación de la escritura del Teorema Lax-Richtmayer. Para proyecciones futuras, se considera la implementación computacional de los casos estudiados.

Índice

1. Introducción **1**

2. Objetivos **4**

3. Preliminares Matemáticos **5**

3.1. Desarrollo en serie de Taylor. 5

3.2. Identidades para la primera y segunda derivada, vía aplicación de la serie de Taylor. 6

3.2.1. Identidades para la primera derivada 6

3.2.2. Identidad para la segunda derivada. 9

4. Método de Diferencias Finitas (MDF). **11**

4.1. Introducción 11

4.2. Ideas fundamentales 14

4.3. Definición del MDF. 16

5. Estudios de Convergencia: casos relevantes. **18**

5.1. Caso 1: EDO Lineal, 2do orden. 20

5.2. Caso 2: EDO No Lineal, 2do orden. 26

5.3. Caso 3: EDP Parabólica Lineal. 31

5.3.1. Método Explícito. 31

5.3.2. Método Implícito. 36

5.4. Caso 4: EDP Parabólica No Lineal. 40

6. Teorema de Equivalencia de Lax-Richtmyer **46**

7. Conclusiones **54**

8. Anexos **58**

8.1. Detalles representación matricial del Caso 3 para el método implícito. 58

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales son ampliamente utilizadas en la actualidad para modelar diversos y variados fenómenos naturales, siendo de interés tanto para matemáticos puros, matemáticos aplicados, y científicos aplicados en general. Normalmente los matemáticos y científicos aplicados recurren a los métodos numéricos, debido a que permiten resolver problemas complejos que no se pueden resolver analíticamente y son fundamentales para la simulación, la predicción y la optimización en áreas como la ingeniería, la ciencia y la economía. Estos métodos producen aproximaciones lo suficientemente exactas, para ser implementados en computadoras, debido a las potentes capacidades de cómputo que existen en la actualidad.

Este estudio se enfoca en el análisis de convergencia del método de diferencias finitas (MDF) y en el Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer en [10]. Este método numérico fue presentado por primera vez en un trabajo realizado por Newton y Leibnitz en 1768 en [2]. Hoy en día, el MDF se utiliza en diversas áreas de la ingeniería y de las ciencias, tales como la física, la química y la biología, debido a su capacidad para manejar problemas complejos con condiciones de frontera específicas.

La opinión especializada de analistas numéricos expertos en la solución numérica de ecuaciones diferenciales es que actualmente existen métodos numéricos más eficientes y eficaces que el MDF, debido a que la exactitud del método depende en gran medida de la elección del tamaño de su malla y del orden del esquema de diferencias finitas utilizado, lo que puede ser difícil de implementar para geometrías complejas, problemas con gradientes pronunciados o discontinuidades, puede tener dificultades para producir resultados precisos si no se emplea técnicas especificas, como el refinamiento de malla adaptativo. Además, los métodos implícitos, aunque estables, a menudo requieren la solución de grandes sistemas de ecuaciones, lo que puede requerir un gran esfuerzo computacional.

Una de sus principales ventajas es que se puede aplicar fácilmente a una amplia gama de problemas y sus conceptos fundamentales se pueden comprender con relativa facilidad en comparación con métodos numéricos más complejos, el MDF puede manejar geometrías irregulares y condiciones de contorno de manera efectiva, lo que

permite que su uso sea adecuado para aplicaciones del mundo real. La capacidad de aprovechar los recursos computacionales existentes, como el procesamiento paralelo, mejora su eficiencia, permitiendo la simulación de problemas a gran escala que serían impensables con métodos analíticos. Sin embargo, se debe mencionar que al interior de la comunidad de científicos aplicados el MDF goza de gran popularidad, especialmente en contextos de modelación matemática. Evidencia de esto es la amplia literatura sobre el MDF existente en la actualidad, tanto en libros de texto 2024, tales como [7], [8], y [16], y en artículos científicos 2025 tales como [1], [13], y [15].

Este método consiste en obtener una solución aproximada de ecuaciones diferenciales. Lo primero que se realizará para la aplicación del método es definir el dominio donde ha de calcular el valor de la función incógnita a resolver, luego se discretizará en un número variable de puntos formando una malla. Estos puntos serán llamados nodos. La aplicación del método de MDF sobre el dominio dará como resultado conocer el valor de la función incógnita en cada uno de esos nodos. El número de nodos a utilizar dependerá de la exactitud que se desea en la solución aproximada. El número de términos del desarrollo, a considerar, será el suficiente para que junto con las condiciones de contorno y las condiciones iniciales sea posible eliminar las derivadas y obtener, de este modo, una ecuación que nos permita conocer el valor de la función en cada nodo. Dicha ecuación, como se verá más adelante, relaciona el valor de la función en un nodo con el valor de la función en los nodos adyacentes. El proceso anterior se repite para cada uno de los nodos, obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicos lineales y no lineales, cuya solución conduce a la obtención de la solución aproximada que se está buscando.

En este trabajo se consideran cuatro ecuaciones diferenciales. Dos ecuaciones diferenciales ordinarias y, dos ecuaciones diferenciales parciales. En ambos casos, una es lineal y la otra es no lineal. En todo lo que sigue estas cuatro ecuaciones se denominaran caso 1, caso 2, caso 3 y caso 4, respectivamente. Asimismo se presentan el Teorema Fundamental de los Métodos de Diferencias Finitas y el Teorema de Equivalencia de Lax, los cuales permitirán establecer condiciones necesarias y/o suficientes para que un esquema numérico basado en el MDF sea convergente.

Específicamente, los casos a estudiar son los siguientes. El caso 1 que consiste en una

ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden [3]. El caso 2, consiste en una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden con valores de frontera [4]. El caso 3 consiste en una ecuación diferencial parcial parabólica lineal, para la cual se consideran esquemas numéricos explícitos e implícitos [9] y por último el caso 4, consiste en una ecuación diferencial parabólica de segundo orden no lineal [14].

El documento tiene la siguiente estructura en el tercer capítulo se presenta los preliminares matemáticos basados en el desarrollo en serie de Taylor. Luego, en el cuarto capítulo se presenta el MDF y sus fundamentos. En el quinto capítulo se presenta el estudio de convergencia de los cuatro casos ya mencionados. En el sexto capítulo se presenta el Teorema de Equivalencia de Lax [10], y finalmente se presentan las conclusiones y proyecciones a futuro.

2. Objetivos

Objetivo general

Describir el Teorema de Lax-Richtmyer y su aplicación al estudio de convergencia del método de diferencias finitas.

Objetivos específicos

1. Presentar la demostración del Teorema de Lax-Richtmyer.

2. Demostrar la convergencia del método de diferencias finitas para dos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, una lineal y otra no lineal.

3. Demostrar la convergencia del método de diferencias finitas para dos tipos de ecuaciones diferenciales parciales, una lineal y otra no lineal.

3. Preliminares Matemáticos

En este capítulo se presentan las aproximaciones fundamentales para las derivadas de orden 1 o 2, las cuales se deducen del teorema de Taylor. La presentación sigue la forma del libro [3].

3.1. Desarrollo en serie de Taylor.

En todo lo que sigue $C[a,b]$ representa el conjunto de funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$ y $C^m[a,b]$ es el conjunto de funciones continuas hasta la derivada del orden $m = 1, 2, 3, ...$ sobre el intervalo $[a,b]$.
Sea $m \in \mathbb{N}$ un número natural, sea $\phi \in C^m[a,b]$ una función y sea $x \in]a,b[$ un número real, entonces, el desarrollo en serie de Taylor de la función $\phi(y)$ alrededor de x está dado por,

$$\phi(y) = \phi(x) + (y-x)\phi'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\phi''(x) + ... + \frac{(y-x)^m}{m!}\phi^{(m)}(\xi), \qquad (1)$$

donde $x, y \in]a,b[$ y ξ está entre x e y. Además, como se asume $\phi^{(m)} \in C[a,b]$, existe una constante $C_m > 0$ tal que,

$$\max_{z\in[a,b]} |\phi^{(m)}(z)| \leq C_m.$$

3.2. Identidades para la primera y segunda derivada, vía aplicación de la serie de Taylor.

3.2.1. Identidades para la primera derivada

Usando (1) se deducen algunos desarrollos que permitirán obtener aproximaciones para las derivadas de la función ϕ. Consideremos primeramente $\phi \in C^2[a,b]$. Para $h > 0$ y $m = 2$ se evalúa (1) en el punto $y = x + h$ para obtener,

$$\phi(x+h) = \phi(x) + h\phi'(x) + \frac{h^2}{2}\phi''(\xi).$$

De esta última relación se puede despejar la primera derivada de $\phi(x)$, lo que da,

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} - \frac{h}{2}\phi''(\xi). \tag{2}$$

para algún $\xi \in]x, x+h[$. Como $\phi \in C^2[a,b]$, entonces existe $C_2 > 0$ tal que,

$$|\frac{h}{2}\phi''(\xi)| \leq C_2\frac{h}{2}$$

con $\text{máx}_{z\in[a,b]}|\phi''(z)| \leq C_2$.

Si usamos (2) para aproximar la primera derivada de $\phi(x)$ mediante el cuociente de diferencias (note que $h = (x+h) - x$), es decir el término

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}, \tag{3}$$

entonces, el error cometido en esta aproximación se acota como sigue,

$$|\phi'(x) - \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}| = |\frac{h}{2}\phi''(\xi)| \leq Ch,$$

donde $C = \frac{C_2}{2}$ es una constante.

La cota Ch anterior indica que el error tiende a cero cuando h tiende a cero. Para indicar el cuociente (3) aproxima a $\phi'(x)$ con un error acotado por una constante que multiplica a h escribiremos,

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} + O(h), \tag{4}$$

y diremos que el cuociente (3) es una aproximación de orden h para ϕ'. Análogamente se deduce que

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x) - \phi(x-h)}{h} + O(h).$$

Considerando nuevamente el desarrollo en Serie de Taylor de ϕ alrededor de x, pero esta vez supongamos $m = 3$ y que $\phi \in C^3[a, b]$. Entonces, de (1) se obtiene,

$$\phi(y) = \phi(x) + (y - x)\phi'(x) + \frac{(y - x)^2}{2}\phi''(x) + \frac{(y - x)^3}{3!}\phi'''(\xi_1), \tag{5}$$

para ξ entre x e y. Evaluando la expresión (5) en $y = x + h$, resulta lo siguiente,

$$\phi(x + h) = \phi(x) + h\phi'(x) + \frac{h^2}{2}\phi''(x) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(\xi_1), \tag{6}$$

para algún $\xi_1 \in]x, x + h[$. Evaluando en seguida (5) en $y = x - h$, para obtener,

$$\phi(x - h) = \phi(x) - h\phi'(x) + \frac{h^2}{2}\phi''(x) - \frac{h^3}{3!}\phi'''(\xi_2), \tag{7}$$

para $\xi_2 \in]x - h, x[$. Restando (6)-(7) nos queda,

$$\phi(x + h) - \phi(x - h) = 2h\phi'(x) + \frac{h^3}{3}(\frac{\phi'''(\xi_1) + \phi'''(\xi_2)}{2}). \tag{8}$$

Como $\phi''' \in C[a, b]$, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $\xi \in]x - h, x + h[$ tal que,

$$\phi'''(\xi) = \frac{\phi'''(\xi_1) + \phi'''(\xi_2)}{2}.$$

Luego, al despejar de (8) la primera derivada ϕ' resulta,

$$\phi'(x) = \frac{\phi(x + h) - \phi(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}\phi'''(\xi) \tag{9}$$

para algún $\xi \in]x - h, x + h[$. Además, existe $C_3 > 0$ tal que,

$$| - \frac{h^2}{6}\phi'''(\xi)| \leq C_3\frac{h^2}{6}$$

con $\text{máx}_{z\in[a,b]}|\phi'''(z)| \leq C_3$. Por lo tanto, $\phi'(x)$ puede aproximarse por el cuociente de diferencias,

$$\frac{\phi(x + h) - \phi(x - h)}{2h},$$

y se puede escribir como:

$$\boxed{\phi'(x) = \tfrac{\phi(x+h)-\phi(x-h)}{2h} + O(h^2)}. \tag{10}$$

Identidades para la derivada parcial de orden 1.

Las fórmulas de aproximación deducidas en la sección anterior también se pueden aplicar a las derivadas parciales de primer orden. Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + O(\Delta x). \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{u(x,y) - u(x-\Delta x, y)}{\Delta x} + O(\Delta x). \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x-\Delta x, y)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \tag{13}$$

ó

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y} + O(\Delta y). \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{u(x,y) - u(x, y-\Delta y)}{\Delta y} + O(\Delta y). \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y-\Delta y)}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \tag{16}$$

Una de las aplicaciones usuales de las fórmulas anteriores en el campo de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales evolutivas es la primera derivada parcial respecto del tiempo. Al menos se pueden distinguir dos tipos:

a) Fórmula de Diferencias finitas hacia delante (forward):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1).$$

b) Fórmula de Diferencias finitas hacia atrás (backward):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n} - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_2). \tag{17}$$

Observación: La $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n)$ se considera la solución numérica respecto de u en el punto de la malla, el nodo espacial j y temporal n.

3.2.2. Identidad para la segunda derivada.

En lo que sigue se aplica la Serie de Taylor para obtener una aproximación de segundo orden para la segunda derivada $\phi''(x)$. Sea el desarrollo de Taylor de orden $m = 4$:

$$\phi(y) = \phi(x) + (y-x)\phi'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}\phi''(x) + \frac{(y-x)^3}{3!}\phi'''(x) + \frac{(y-x)^4}{4!}\phi^{(4)}(\xi), \quad (18)$$

para algún $\xi \in]x, y[$. Evaluando (18) en el punto $y = x + h$ se obtiene

$$\phi(x+h) = \phi(x) + h\phi'(x) + \frac{h^2}{2}\phi''(x) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(x) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(\xi_1), \quad (19)$$

para algún $\xi_1 \in]x, x+h[$. Ahora evaluando (18) en $y = x - h$, se obtiene,

$$\phi(x-h) = \phi(x) - h\phi'(x) + \frac{h^2}{2}\phi''(x) - \frac{h^3}{3!}\phi'''(x) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(\xi_2), \quad (20)$$

para algún $\xi_2 \in]x-h, x[$. Sumando (19) y (20), reordenando,

$$\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h) = h^2\phi''(x) + \frac{h^4}{12}\left(\frac{\phi^{(4)}(\xi_1) + \phi^{(4)}(\xi_2)}{2}\right). \quad (21)$$

Como $\phi^{(4)} \in C[a, b]$, existe $\xi \in]x-h, x+h[$ tal que,

$$\phi^{(4)}(\xi) = \frac{\phi^{(4)}(\xi_1) + \phi^{(4)}(\xi_2)}{2}.$$

Entonces, al despejar de (21) la segunda derivada de ϕ se obtiene,

$$\phi''(x) = \frac{\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\phi^{(4)}(\xi), \quad (22)$$

para algún $\xi \in]x-h, x+h[$. Ya que $\phi^{(4)}$ es continua en $]a, b[$, existe $C_4 > 0$ tal que,

$$|-\frac{h^2}{12}\phi^{(4)}(\xi)| \leq C_4\frac{h^2}{12} \ . \quad (23)$$

con $\text{máx}_{z\in[a,b]}|\phi^{(4)}(z)| \leq C_4$. Por lo tanto, de (22) vemos que $\phi''(x)$ se puede aproximar por el cuociente,

$$\frac{\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2},$$

y que esta aproximación de diferencias, de tipo centradas, es de orden h^2 según (23). Finalmente,

$$\boxed{\phi''(x) = \frac{\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)}{h^2} + O(h^2)}. \quad (24)$$

Identidades para las derivadas parciales de segundo orden.

Aplicando la formula (24) a las derivadas parciales de 2do orden, se puede escribir lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x,y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

o

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n). \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x,y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2).$$

Observación:

En todo lo que sigue se utilizan principalmente esquemas numéricos basados en el Método de Diferencias Finitas, centrados y de segundo orden, tanto para las derivadas parciales de primer orden, como para las de orden dos. Específicamente,

$$u_x(x,y) = \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x-\Delta x, y)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

$$u_y(x,y) = \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y-\Delta y)}{2\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

$$u_{xx} = \frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x,y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2).$$

$$u_{yy} = \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x,y) + u(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2).$$

4. Método de Diferencias Finitas (MDF).

4.1. Introducción

Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación cuya incógnita es una función, y además dicha función aparece derivada al menos una vez. Si la función incógnita depende sólo de una variable independiente entonces la ED se dice Ordinaria (EDO), y si depende de dos o más variables independientes la ED se dice Parcial (EDP).

El estudio de las ED, tanto EDO como EDP, posee una gran tradición en la historia de la matemática, siendo actualmente un área de intensa investigación tanto pura como aplicada.

Los métodos para resolver una ED se pueden agrupar en tres grandes grupos: métodos analíticos, métodos numéricos y métodos cualitativos. Por otro lado, métodos numéricos clásicos para resolver ED son: el método de diferencias finitas (MDF), el método de volúmenes finitos, y el método de elementos finitos.

Dado que un método numérico esencialmente aproxima la solución exacta de la ED, un problema matemático relacionado es cuantificar el error cometido. Y si, por otro lado, el objeto matemático utilizado para aproximar es una sucesión de funciones, el otro problema matemático relacionado es el de la convergencia de la solución numérica a la solución exacta o analítica de la ED.

En esta AFE el foco es el estudio de la convergencia del MDF cuando se aplica para resolver numéricamente una ED.

La idea base del MDF es aproximar directamente la(s) derivadas presentes en la ED aplicando fórmulas obtenidas a partir del desarrollo en serie de Taylor de la función incógnita, tal como se presentó en el capítulo anterior.

De acuerdo a la opinión especializada de los analistas numéricos expertos en la solución numérica de EDP actualmente existen muchos métodos numéricos más eficientes y eficaces que el MDF. Sin embargo, también es cierto que dentro de la comunidad de científicos aplicados que recurren a métodos numéricos para resolver una EDP el MDF goza de gran popularidad. Especialmente en contextos de modelación matemática. Prueba de esto es la amplia literatura sobre el MDF existente en la actualidad, tanto libros de texto 2024, como artículos científicos publicados en revistas de buen nivel científico 2025.

Ejemplos de libros sobre el MDF año 2024, son [8], [16] y [7], siendo este último enfocado en ingenieros, investigadores y estudiantes que intentan utilizar eficazmente métodos numéricos para resolver problemas complejos. Dimensiones de Codificación y el Poder de los Métodos de Elementos Finitos, Volumen y Métodos de Diferencia, ofrece una comprensión integral y una experiencia práctica con métodos numéricos, lo que le permite superar los límites de la innovación. Proporciona ejemplos prácticos de codificación y aplicaciones del mundo real, sugiere que tanto profesionales como estudiantes estarán preparado para abordar con confianza sistemas dinámicos, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales y otras simulaciones matemáticas.

También se destacan artículos sobre el MDF año 2025, entre ellos [1] que presenta un implementación computacional".tridimensional (3D) de diferencias finitas para flujos magnetohidrodinámicos bajo el supuesto de convección de Boussinesq en una capa plana. En [13] que trata de estudiar las estimaciones de error a posteriori de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales integro-parciales parabólicas (PIDEs) que describen modelos de precios de opciones de difusión por salto en finanzas. El [15] que presenta el Estudio computacional sobre la generación de entropía en el flujo de nanofluidos de Casson con microorganismos girotácticos móviles utilizando el método de diferencias finitas. Al nombrar y analizar estos libros y revistas, se puede señalar que a pesar de los años de que se creo, sigue estando presente en las publicaciones actuales, adaptándose a diferentes temas de investigación.

El método de diferencias finitas consiste en obtener una solución aproximada de ecuaciones diferenciales. El primer paso para la aplicación del método es definir el dominio donde a de calcular el valor de la función incógnita a resolver, se discretiza en un número variable de puntos formando una malla. Estos puntos son llamados nodos. La aplicación del método de MDF sobre el dominio dará como resultado conocer el valor de la función incógnita en cada uno de esos nodos. El número de nodos depende de la exactitud que se desea en la solución aproximada.

El número de términos del desarrollo, que se tendrán en cuenta, será el suficiente para que junto con las condiciones de contorno y las condiciones iniciales sea posible eliminar las derivadas y obtener, de este modo, una ecuación que nos permita conocer el valor de la función en cada nodo. Dicha ecuación, como se verá más adelante, relaciona el valor de la función en un nodo con el valor de la función en los nodos adyacentes. El proceso anterior se repite para cada uno de los nodos, obteniéndose un sistema de ecuaciones algebraicos lineales y no lineales, cuya solución conduce a la obtención de la solución aproximada que se está buscando. La solución de dicho sistema de ecuaciones algebraicas requiere la aplicación de métodos estándares, tales como: Método de Factorización, Método Iterativos clásicos, Método del Gradiente Conjugado, o el Método de Newton para el caso no lineal (cf. [6] y [12]).

En general, el método MDF considera esencialmente las siguientes etapas:

1) Discretización del dominio.
2) Discretización del problema diferencial.
3) Solución del problema discretizado.
4) Implementación computacional
5) Análisis teórico de convergencia
6) Estimación teórica del error.

4.2. Ideas fundamentales

Con el objetivo de presentar las ideas fundamentales del método de diferencias finitas, se considera la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de 2do orden,

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x) \quad con\ x \in]a, b[, \tag{26}$$

sujeta a las condiciones de frontera,

$$u(a) = \alpha \tag{27}$$

$$u(b) = \beta, \tag{28}$$

en donde las funciones p, q, r, se asumen conocidas y con las regularidades adecuadas. Reemplazando las fórmulas (9) y (22), esto es,

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi),$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta),$$

en (24), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta) &= p(x)(\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \\ &- \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi)) + q(x)u(x) + r(x), \end{aligned}$$

o reordenando,

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} &- p(x)(\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}) \\ &- q(x)u(x) + p(x)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

En lo que sigue se establecen las definiciones fundamentales que permitirán establecer adecuadamente un esquema numérico de diferencias finitas:

Definición 1:

Se define el ***operador continuo*** L como,

$$L(u)(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - p(x)(\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}) \quad - \\ q(x)u(x) + p(x)\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta).$$

Definición 2:

Se define el ***operador discreto de diferencias finitas*** L_h como,

$$L_h(u)(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - p(x)(\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}) - q(x)u(x).$$

Definición 3:

Se define el ***error de truncación*** τ, de la discretización L_h de L como,

$$\tau = \tau(x,h) := h^2(\frac{(u^{(4)}(\eta)}{12} - \frac{p(x)u^{(3)}(\xi)}{6}).$$

Con estas definiciones la ecuación continua (26) se puede escribir como,

$$L(u)(x) = L_h(u)(x) - \tau(x,h) = r(x). \tag{29}$$

A partir de esta última igualdad, en la siguiente sección, se definirán los conceptos de Estabilidad, Consistencia y Convergencia, y lo que se entenderá por un esquema numérico basado en el método de diferencias finitas (MDF).

4.3. Definición del MDF.

En esta subsección se define el método de diferencias finitas para el problema continuo (26):

Definición 4:

Se define la ***función de aproximación*** por el método de diferencias finitas del problema continuo (26)-(28) a la función U que satisface $L_h(U)(x_j) = r_j$, esto es,

$$L_h(U)(x_j) = \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} - (\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h})p_j - q_j U_j = r_j, \qquad (30)$$

para la partición uniforme,

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_j < x_{j+1} < ... < x_n = b,$$

con parámetro de malla $h = x_{j+1} - x_j$, con $j = 1, ..., n-1$, y además, $U_l = U(x_l), l = 0, 1, ..., n$, $U_0(a) = \alpha$ y $U_n(b) = \beta$.

Observación en la definición 4, la función U depende del parámetro de malla h esto es $U = U(h)$, Sin embargo, por razones de simplicidad notacional, se anotará esta dependencia sólo cuando sea necesario. Finalmente, con el objetivo de estudiar las propiedades matemáticas del esquema de diferencias finitas establecido anteriormente en la definición 4 se definen a continuación los conceptos de Consistencia, Estabilidad, y Convergencia, en donde $||.||$ denota una norma funcional adecuada.

Definición 5:

El esquema de discretización de diferencias finitas dado por L_h se dice ***consistente*** con el operador L ssi:

$$\lim_{h \to 0} ||\tau(x, h)|| = 0,$$

para cualquier partición arbitraria del intervalo $[a, b]$.

Definición 6:

Sea u la solución del problema continuo (26)- (28), y sea U la solución del esquema discreto (30) basado en el esquema de diferencias finitas. Se define el ***error global de aproximación*** como

$$e(h) = U(h) - u.$$

Con esto el esquema numérico se dice ***estable*** ssi existe una constante $M > 0$, independiente del parámetro h, tal que

$$||e(h)|| \leq M.$$

Definición 7:

Sea u la solución del problema continuo, y sea U la solución del esquema discreto basado en el esquema de diferencias finitas. Se dice que este esquema numérico es ***convergente*** a la solución u del problema continuo ssi:

$$\lim_{h \to 0} ||e(h)|| = 0,$$

para cualquier partición arbitraria del intervalo $[a, b]$.

5. Estudios de Convergencia: casos relevantes.

En este capítulo se presentan 4 aplicaciones del método de diferencias finitas, dos para ecuaciones diferenciales ordinarias, y dos para ecuaciones diferenciales parciales, y en cada caso una ecuación es lineal y la otra es no lineal. En cada caso, el objetivo es demostrar la convergencia del esquema numérico propuesto.

El Caso 1, se hace referencia al libro [3], consiste en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, con valores de frontera. Para realizar el estudio de convergencia respectivo, se utiliza el modelo matemático

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x),$$

con $x \in [a, b]$.

En el Caso 2, se hace referencia [5], consiste en una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden con valores de frontera. Para realizar el estudio de convergencia respectivo, se estudia el modelo matemático

$$u'' = f(x, u, u'),$$

con $x \in [a, b]$.

El Caso 3, se utiliza de referencia al libro [9], en cual se presentan dos modelos matemáticos cada uno con su condición inicial y de frontera, el primer modelo matemático

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

es una ecuación diferencial parcial parabólica lineal, que se resuelve a través del método explícito, y el segundo modelo matemático:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = s(x, t),$$

es una ecuación diferencial parabólica de segundo orden no lineal, se resuelve mediante el método implícito.

Finalmente, se analiza el Caso 4, hace referencia al libro [14], es una ecuación diferencial parabólica de segundo orden no lineal, sujeto a condición inicial y de frontera. El modelo matemático

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Se analiza mediante el método explícito.

5.1. Caso 1: EDO Lineal, 2do orden.

Para escribir y construir este capítulo se utilizó como referencia el libro [3]. Específicamente se considera una Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de Segundo Orden, con valores de frontera, (26) a (28) la cual presentamos en el capítulo 4 "Método de Diferencias Finitas" :

Modelo Matemático

El problema continuo a resolver consiste en determinar la función u tal que:

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x) \text{ con } x \in]a, b[,$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$u(a) = \alpha,$$

$$u(b) = \beta.$$

Se asume que $p, q, r \in C[a, b]$, con $p(x)$ siempre positiva, o bien siempre negativa, en todo su dominio. Además se supone que existe una constante Q tal que $q(x) \geq Q > 0$ para todo x de $[a, b]$. En general, este problema de contorno no puede ser resuelto analíticamente para cualquier terna de funciones p, q y r. Ante esta dificultad, tenemos la ventaja de poder encontrar una *solución aproximada* para el problema definido por las ecuaciones (26) a (28).

Esquema de Diferencias Finitas

Se presenta una partición de la variable espacial dada por

$$0 = x_0 < x_1 .... < x_j < x_{j+1} < ...x_m = L$$

con parámetro de malla

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j.$$

Discretización del problema diferencial.

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\xi_1)$$
$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_2)$$

luego reemplazando en el modelo matemático,

$$u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x) \text{ con } x \in]a, b[,$$

se establece que

$$\begin{aligned} L(u)(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_2) &- p(x)[\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \\ &- \frac{h^2}{6}u'''(\xi_1)] - q(x)u(x) \\ &= r(x). \end{aligned}$$

entonces queda representado por,

$$L_h(U)(x_j) = \frac{U(x_{j+1}) - 2U(x_j) + U(x_{j-1})}{h^2} - p(x_j)(\frac{U(x_{j+1}) - U(x_{j-1})}{2h}) - q(x_j)U(x_j) = r(x_j), \tag{31}$$

$\forall\ j = 1, ..., n-1.$

Las ecuaciones (31) constituyen un *sistema de ecuaciones lineales* en las incógnitas $U(x_1), ...U(x_{n-1})$

Para visualizar mejor este sistema notemos que, multiplicando la ecuación (31) por $-h^2/2$, nos queda lo siguiente,

$$-\frac{h^2}{2}L_h(U)(x_j) = \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{-2} + \frac{h}{4}p_j(U_{j+1} - U_{j-1}) + \frac{h^2}{2}q_jU_j = -\frac{h^2}{2}r_j, \ \ \forall\ j = 1, ..., n-1.$$

donde hemos introducido la notación,

$$U_j := U(x_j), \quad p_j := p(x_j), \quad q_j := q(x_j), \quad r_j := r(x_j).$$

Reordenando los términos, llegamos a

$$-\frac{h^2}{2}L_h(U)(x_j) = -\frac{1}{2}(1+\frac{p_jh}{2})U_{j-1} + (1+\frac{q_jh^2}{2})U_j - \frac{1}{2}(1-\frac{p_jh}{2})U_{j+1} = -\frac{h^2}{2}r_j, \ \ \forall\ j = 1, ..., n-1.$$

Si ahora definimos,

$$b_j := \frac{1}{2}(1 + \frac{p_j h}{2}), \;\; a_j := (1 + \frac{q_j h^2}{2}), \;\; c_j := \frac{1}{2}(1 - \frac{p_j h}{2}),$$

entonces, el sistema lineal, se transforma en,

$$-\frac{h^2}{2} L_h(U)(x_j) = -b_j U_{j-1} + a_j U_j - c_j U_{j+1} = -\frac{h^2}{2} r_j,$$

para $j = 1, ..., n-1$ con $U_0 = u(a)$ y $U^n = u(b)$ conocidas de las condiciones de contorno (27) y (28).

Representación matricial: esta última identidad se puede escribir en forma alternativa como

$$A \cdot U = b, \tag{32}$$

en donde,

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & & & & 0 \\ -b_2 & a_2 & -c_2 & & & \\ & -b_3 & a_3 & -c_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & -b_{n-2} & a_{n-2} & -c_{n-2} \\ & & & & -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$U := \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1\alpha \\ 0 \\ . \\ . \\ c_{n-1}\beta \end{pmatrix} - \tfrac{h^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ r_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde $\alpha = U_0 = u(a)$ y $\beta = U_n = u(b)$.

Estudio de Convergencia y Error

Proposición: Suponga que h satisface $hp/2 < 1$. Entonces existe una constante $M > 0$ independiente de h tal que,

$$|U_j - u(x_j)| \leq Mh^2, \forall j = 1.., n-1.$$

Demostración.

Reemplazando $x = x_j$ en $L(u)(x_j) = L_h(u)(x_j) - \tau = r(x)$,

$$L(u)(x_j) = L_h(u)(x_j) - \tau_j = r_j,$$

de donde

$$L_h(u)(x_j) = r_j + \tau_j,$$

restando esta última identidad de $L_h(U)(x_j) = r(x_j) \forall j = 1, \cdots, n-1$. y considerando la linealidad de L_h. Se obtiene

$$L_h(U)(x_j) - L_h(u)(x_j) = -\tau_j.$$

recordando la función error como $e := U - u$, obtenemos que,

$$L_h(e)(x_j) = -\tau_j$$

y multiplicando por $-h^2/2$, encontramos,

$$-\tfrac{h^2}{2} L_h(e)(x_j) = \tfrac{h^2}{2} \tau_j, \forall j = 1, ..., n-1.$$

Usando en seguida

$$-\tfrac{h^2}{2} L_h(U)(x_j) = -b_j U_{j-1} + a_j U_j - c_j U_{j+1} = -\tfrac{h^2}{2} r_j.$$

$$-\tfrac{h^2}{2} L_h(u)(x_j) = -b_j u_{j-1} + a_j u_j - c_j u_{j+1} = -\tfrac{h^2}{2} r_j.$$

para la ecuación,

$$-\tfrac{h^2}{2} L_h(e)(x_j) = \tfrac{h^2}{2} \tau_j, \forall j = 1, ..., n-1,$$

obteniendo

$$-b_j e_{j-1} + a_j e_j - c_j e_{j+1} + \frac{h^2}{2}\tau_j, \forall j = 1, ..., n-1,$$

Despejando $a_j e_j$ para obtener,

$$a_j e_j = b_j e_{j-1} + c_j e_{j+1} + \tfrac{h^2}{2}\tau_j$$

Aplicando valor absoluto y la desigualdad triangular a la identidad anterior se obtiene

$$|a_j e_j| \leq |b_j||e_{j-1}| + |c_j||e_{j+1}| + \frac{h^2}{2}|\tau_j|.$$

Definiendo y aplicando $e := \text{máx}_j |e_j|$ al lado derecho de la desigualdad anterior

$$|a_j||e_j| \leq (|b_j| + |c_j|)e + \frac{h^2}{2}|\tau_j|.$$

Recordando que por hipótesis: $p > 0$, $1 - \frac{ph}{2} > 0$, con lo cual $b_j, c_j > 0$, y por lo tanto

$$|b_j| + |c_j| = b_j + c_j = (\frac{1}{2} + \frac{p_j h}{4}) + (\frac{1}{2} - \frac{p_j h}{4}) = 1,$$

y

$$|a_j||e_j| \leq e + \frac{h^2}{2} \cdot \tau$$

con $\tau := \text{máx}_j \tau_j$. Respecto del factor $|a_j|$ en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, recordar que por hipótesis $q(x) \geq Q > 0; \forall x \in [a, b]$, con lo cual

$$|a_j| = |1 + q_j \tfrac{h^2}{2}| = 1 + \tfrac{q_j h^2}{2} \geq 1 + \tfrac{Q}{2}h^2.$$

Por lo tanto, teniendo presente que si la desigualdad anterior es válida para todo e_j también será válida para e se obtiene

$$(1 + \frac{Q}{2}h^2)|e_j| \leq e + \frac{h^2}{2}\tau$$

$$(1 + \frac{Q}{2}h^2)e \leq e + \frac{h^2}{2}\tau$$

$$\frac{Q}{2}h^2 e \leq \frac{h^2}{2}\tau$$

$$e \leq \frac{\tau}{Q}.$$

En está última desigualdad resta acotar el factor τ. Para tal efecto recuerde que τ_j esta definido por

$$\tau_j = h^2 \left[\frac{1}{12}u^{(4)}(\eta_j) - 2\frac{1}{12}u^{(3)}(\xi_j)p_j\right],$$

en donde, luego de aplicar valor absoluto se obtiene

$$|\tau_j| \leq \frac{h^2}{12}\left[M_4 + 2M_3 p\right]$$

donde, $M_i = \text{máx}_{x\in[a,b]}|u^{(i)}(x)|$ para $i = 3, 4$. Luego

$$\tau = \operatorname*{máx}_j |\tau_j| \leq \frac{h^2}{12}(M_4 + 2M_3 p)$$

con lo cual

$$e \leq \frac{1}{Q}\frac{h^2}{12}(M_4 + 2M_3 p) \leq Ch^2,$$

siendo $C > 0$ una constante que no depende de h. Finalmente tomando

$$\operatorname*{lím}_{h\to 0}|e| \leq \operatorname*{lím}_{h\to 0} C \cdot h^2$$

$$\operatorname*{lím}_{h\to 0}|e| = 0.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que el método de diferencias finitas propuesto para esta ecuación es convergente.

5.2. Caso 2: EDO No Lineal, 2do orden.

En la siguiente sección la fuente utilizada para el estudio de convergencia corresponde a [4] para una Ecuación Diferencial Ordinaria No Lineal de Segundo Orden con valores de frontera.

Modelo Matemático

Él problema continuo a estudiar consiste en resolver

$$u'' = f(x, u, u') \quad x \in [a, b] \tag{33}$$

sujeto a las condiciones de Fronteras

$$u(a) = \alpha, \; u(b) = \beta \tag{34}$$

Esquema de Diferencias Finitas

Se establece una partición de la variable espacial dada por

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_j < x_{j+1} < ...x_m = b$$

con parámetro de malla $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ el cual se anotará en lo que sigue como $h = \Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ suponiendo una partición uniforme. Aplicando (9) y (22) y anotando $\xi_1 = \eta_1$ y $\xi_2 = \eta_2$, se tienen las expresiones usuales:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta_1)$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\eta_2)$$

Entonces, reemplazando en (33), se obtiene:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\eta_2) = f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta_1)),$$

en donde, $u_{j+1} = u(x_j + h)$, $u_j = u(x_j)$ y $u_{j-1} = u(x_j - h)$. Reordenando

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta_1)) + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\eta_2) \tag{35}$$

Aplicando el teorema $g(x) = g(x_0) + g'(\eta) \cdot (x - x_0)$, con η entre x y x_0, y haciendo el cambio de notación $\tilde{x} = x_0 - x$ y reemplazando en la igualdad anterior se obtiene la expresión alternativa

$$g(x_0 - \tilde{x}) = g(x_0) + g'(\eta) \cdot (-\tilde{x}). \tag{36}$$

Ahora bien, identificando $g(z) = f(x_j, u_j, z)$, $x_0 = \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}$, y $\tilde{x} = \frac{h^2}{6} \cdot u^{(3)}(\eta_1)$ en (36) se obtiene

$$f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta_1)) = f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) + f_z(x_j, u_j, \eta) \cdot [-\frac{h^2}{6} \cdot u^{(3)}(\eta_1)] \tag{37}$$

y reemplazando (37) en (35)

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) + f_z(x_j, u_j, \eta) \cdot [-\frac{h^2}{6} \cdot u^{(3)}(\eta_1)] + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\eta_2),$$

o sea

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) + \tau_j \tag{38}$$

con

$$\tau_j = \frac{h^2}{12}[u^{(4)}(\eta_2) - 2f_z(x_j, u_j, \eta) \cdot u^{(3)}(\eta_1)].$$

Discretización del problema diferencial.

Motivado por la igualdad (38) se define el esquema numérico como

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = f(x_j, U_j, \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}) \tag{39}$$

$$U_0 = \alpha, U_m = \beta$$

en donde $m = 1, 2, ..., m - 1$.

Restando (38) de (39)

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} - \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j, U_j, \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}) - [f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) + \tau_j]$$

Reordenando

$$\frac{U_{j+1} - u_{j+1} - 2(U_j - u_j) + U_{j-1} - u_{j-1}}{h^2} = f(x_j, U_j, \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h}) - f(x_j, u_j, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) - \tau_j \tag{40}$$

Como al lado derecho de la igualdad anterior no se puede restar con normalidad, debido a que es una EDO no lineal, se definen $y_1 := U_j$, $y_2 := u_j$, $z_1 := \frac{U_{j+1}-U_{j-1}}{2h}$, $z_2 := \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}$, para usar la propiedad:

$$g(x_j, y_1, z_1) - g(x_j, y_2, z_2) = g_y(x_j, \xi_1, z_2)(y_1 - y_2) + g_z(x_j, y_2, \xi_2)(z_1 - z_2).$$

Aplicando propiedad en el lado derecho de (40) y reordenado el lado izquierdo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1} - u_{j+1} - 2(U_j - u_j) + U_{j-1} - u_{j-1}}{h^2} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, \xi_1, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) \cdot (U_j - u_j) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_j, u_j, \xi_2) \cdot \frac{(U_{j+1} - u_{j+1}) - (U_{j-1} - u_{j-1})}{2h} - \tau_j. \end{aligned}$$

Recordando que el error esta dado por: $e_j = U_j - u_j$, con $j = 1, 2, ..., m-1$, se obtiene que la última igualdad se puede escribir como

$$\frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, \xi_1, \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}) \cdot e_j + \frac{\partial f}{\partial z}(x_j, u_j, \xi_2) \cdot \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{2h} - \tau_j. \tag{41}$$

Estudio de Convergencia

Definiendo $q_j := \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, \xi_1, \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h})$ y $p_j := \frac{\partial f}{\partial z}(x_j, u_j, \xi_2)$, en (41), se obtiene

$$\frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = q_j \cdot e_j + p_j \cdot \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{2h} - \tau_j.$$

Amplificando y reordenado:

$$\frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = \frac{e_{j+1} - e_{j-1}}{2h} \cdot p_j + e_j q_j - \tau_j / (\cdot) \frac{h^2}{2}$$

$$\frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{2} = \frac{h}{4}(e_{j+1} - e_{j-1})p_j + \frac{h^2}{2} e_j q_j - \frac{h^2}{2} \cdot \tau_j$$

$$e_j + \frac{h^2}{2} q_j e_j = \frac{1}{2} e_{j-1} + \frac{h}{4} p_j e_{j-1} + \frac{1}{2} e_{j+1} - \frac{h}{4} p_j e_{j+1} + \frac{h^2}{2} \tau_j$$

$$(1 + \frac{h^2}{2} q_j) e_j = \frac{1}{2}(1 + \frac{h}{2} p_j) e_{j-1} + \frac{1}{2}(1 - \frac{h}{2} p_j) e_{j+1} + \frac{h^2}{2} \tau_j.$$

Definiendo,

$$a_j := (1 + \frac{h^2}{2} q_j), \;\; b_j := \frac{1}{2}(1 + \frac{h}{2} p_j), \;\; c_j := \frac{1}{2}(1 - \frac{h}{2} p_j),$$

se obtiene,

$$a_j e_j = b_j e_{j-1} + c_j e_{j+1} + \frac{h^2}{2} \tau_j. \tag{42}$$

Aplicando valor absoluto y la desigualdad triangular en (42) se obtiene

$$|a_j e_j| \leq |b_j||e_{j-1}| + |c_j||e_{j+1}| + \frac{h^2}{2} |\tau_j|.$$

Definiendo y aplicando $e := \text{máx}_j |e_j|$ al lado derecho de la desigualdad anterior

$$|a_j||e_j| \leq (|b_j| + |c_j|)e + \frac{h^2}{2} |\tau_j|.$$

En este punto asumimos que sobre cualquier mallado arbitrario la función p_j satisface las siguientes hipótesis: $p_j > 0$, y $(1 - p_j \cdot \frac{h}{2}) > 0$, con lo cual $b_j, c_j > 0$, por lo tanto

$$|b_j| + |c_j| = b_j + c_j = (\frac{1}{2} + \frac{p_j h}{4}) + (\frac{1}{2} - \frac{p_j h}{4}) = 1,$$

y

$$|a_j||e_j| \leq e + \frac{h^2}{2} \cdot \tau.$$

con $\tau := \text{máx}_j |\tau_j|$. Por otro lado, respecto del factor $|a_j|$, en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, se establece la hipótesis de que existe una constante $Q > 0$ tal que $q_j \geq Q > 0$. Con lo cual

$$|a_j| = |1 + q_j \tfrac{h^2}{2}| = 1 + \tfrac{q_j h^2}{2} \geq 1 + \tfrac{Q}{2} h^2.$$

Por lo tanto,

$$(1 + \frac{Q}{2} h^2)|e_j| \leq e + \frac{h^2}{2}\tau.$$

Note que está última desigualdad es válida para e_j arbitrario, y que por lo tanto también es válida para su valor máximo e. Con lo cual se obtiene,

$$(1 + \frac{Q}{2} h^2)e \leq e + \frac{h^2}{2}\tau.$$

Esto es,

$$e \leq \frac{\tau}{Q}. \tag{43}$$

En está última desigualdad resta acotar el factor τ. Para tal efecto recuerde que τ_j está definido por

$$\tau_j = \frac{h^2}{12}[u^{(4)}(\eta_2) - 2f_z(x_j, u_j, \eta) \cdot u^{(3)}(\eta_1)].$$

En este punto es necesario asumir que existen constantes M_3, M_4 y C_1, todas positivas, tales que $M_i := \text{máx}_{x\in[a,b]}|u^{(i)}(x)|$ para $i = 3, 4$, y $|f_z| \leq C_1$. Con lo cual

$$|\tau_j| \leq \frac{h^2}{12}\left[M_4 + 2 \cdot C_1 \cdot M_3\right].$$

Note que está última desigualdad es válida para τ_j arbitrario, y que por lo tanto también es válida para su valor máximo τ. Con lo cual se obtiene,

$$\tau \leq \frac{h^2}{12}\left[M_4 + 2 \cdot C_1 \cdot M_3\right].$$

Aplicando a la desigualdad (43) se obtiene,

$$e \leq \frac{h^2}{12 \cdot Q} \cdot \left[M_4 + 2 \cdot C_1 \cdot M_3\right].$$

Finalmente, tomando límite a ambos lados con $C_2 := \frac{1}{12 \cdot Q}\left[M_4 + 2 \cdot C_1 \cdot M_3\right] > 0$, constante independiente del parámetro de malla, se obtiene:

$$\lim_{h\to 0}|e| \leq \lim_{h\to 0} C_2 \cdot h^2$$

$$\lim_{h\to 0}|e| = 0,$$

independientemente de la malla utilizada. Por lo tanto, se ha demostrado que el método de diferencias finitas propuesto para esta ecuación es convergente.

5.3. Caso 3: EDP Parabólica Lineal.

En esta sección se estudia la convergencia del método MDF, cuando se aplica a una ecuación diferencial parcial parabólica lineal. Se consideran esquemas numéricos explícitos e implícitos. La principal fuente de referencia utilizada para esta sección es [9].

5.3.1. Método Explícito.

Modelo Matemático.

El modelo matemático considerado para el esquema explicito consiste en determinar una función $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{44}$$

Sujeto a la condición inicial

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L;$$

y a la condición de frontera

$$u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t); \quad t > 0.$$

Esquema de Diferencias Finitas

Se establece una partición de la variable espacial dada por

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j < x_{j+1} < ... < x_m = L$$

y una partición de la variable temporal

$$0 = t^0 < t^1 .... < t^n < t^{n+1} < ...t^F$$

siendo parámetros de malla $\Delta x = x_{j+1} - x_j$, y $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. En lo que sigue se asume que ambas particiones son uniformes. Aplicando las fórmulas para la primera (17) y segunda derivada (25) se define el siguiente esquema explícito

$$\frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{U_{j+1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2}, \tag{45}$$

en donde $U_j^n = U(x_j, t^n)$ y $U_j^0 = f(x_j)$.

Definiendo el parámetro de malla

$$\lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

la igualdad anterior equivale a

$$U_j^n = (1 - 2\lambda)U_j^{n-1} + \lambda(U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}), \tag{46}$$

con $n = 1, 2, ...$ y $j = 1, .., m - 1$.

Estudio de Convergencia.

En lo que sigue se demuestra que si $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, entonces el esquema numérico (46) es convergente.

Aplicando el Teorema de Taylor (17) y (25), para el Modelo Matemático,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^{n-1}) = \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Reemplazando en el Modelo Matemático

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - (\frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1})) = 0$$

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1})$$

es decir, despejando u_j^n y amplificando por Δt, nos queda:

$$u_j^n - u_j^{n-1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta t \Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Recordando que $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, y reemplazando

$$u_j^n - u_j^{n-1} = \lambda(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta t \Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Despejando

$$u_j^n = u_j^{n-1} + \lambda u_{j+1}^{n-1} - 2\lambda u_j^{n-1} + \lambda u_{j-1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta t \Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Reordenando

$$u_j^n = u_j^{n-1} - 2\lambda u_j^{n-1} + \lambda u_{j+1}^{n-1} + \lambda u_{j-1}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta t \Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Factorizando y obteniendo

$$u_j^n = (1 - 2\lambda)u_j^{n-1} + \lambda(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta t \Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Factorizando

$$u_j^n = (1 - 2\lambda)u_j^{n-1} + \lambda(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \Delta t[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1})].$$

$$u_j^n = (1-2\lambda)u_j^{n-1} + \lambda(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) + \Delta t \cdot \tau_j^n. \tag{47}$$

En donde,

$$\tau_j^n := \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1}).$$

Con la definición del error local:

$$e_j^n = U_j^n - u_j^n. \tag{48}$$

Restando (47) de (46):

$$U_j^n - u_j^n = (1-2\lambda)U_j^{n-1} - (1-2\lambda)u_j^{n-1} + \lambda(U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}) - \lambda(u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) - \Delta t\tau_j^n$$

$$U_j^n - u_j^n = (1-2\lambda)(U_j^{n-1} - u_j^{n-1}) + \lambda[(U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}) - (u_{j+1}^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})] - \Delta t\tau_j^n$$

$$U_j^n - u_j^n = (1-2\lambda)(U_j^{n-1} - u_j^{n-1}) + \lambda[(U_{j+1}^{n-1} - u_{j+1}^{n-1}) + (U_{j-1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1})] - \Delta t\tau_j^n$$

Reemplazando por (48) en la última igualdad, se obtiene:

$$e_j^n = (1-2\lambda)e_j^{n-1} + \lambda(e_{j+1}^{n-1} + e_{j-1}^{n-1}) - \Delta t\tau_j^n \tag{49}$$

De $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, entonces $(1-2\lambda) \geq 0$ y con la definición

$$E^n := \sup_j |e_j^n|, \quad \tau := \sup_{j,n} |\tau_j^n|, \tag{50}$$

En la ecuación (49) aplicando valor absoluto y la desigualdad triangular se obtiene.

$$|e_j^n| \leq (1-2\lambda)|e_j^{n-1}| + \lambda(|e_{j+1}^{n-1}| + |e_{j-1}^{n-1}|) + \Delta t|\tau_j^n| \tag{51}$$

Aplicando en (51) las definiciones (50) se obtiene:

$$|e_j^n| \leq (1-2\lambda)E^{n-1} + \lambda(E^{n-1} + E^{n-1}) + \Delta t \cdot \tau$$

$$|e_j^n| \leq E^{n-1} - 2\lambda E^{n-1} + 2\lambda E^{n-1} + \Delta t \cdot \tau,$$

por cancelación, obtenemos

$$|e_j^n| \leq E^{n-1} + \Delta t \cdot \tau,$$

en donde,

$$|\tau_j^n| := |\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1})| \leq \frac{\Delta t}{2} \cdot C_2 + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot C_4 =: \tau,$$

en donde, $C_2 := \sup|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1)|$ y $C_4 := \sup|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^{n-1})|$. Como esta desigualdad es válida para todo j también lo es para E^n. Luego.

$$E^n \leq E^{n-1} + \Delta t \cdot \tau.$$

Por lo tanto, por una aplicación recursiva, se obtiene

$$E^n \leq E^0 + n\Delta t\tau = E^0 + t^n \cdot \tau \leq E^0 + t^F \cdot \tau$$

con $t^n = n \cdot \Delta t$. Esto es, por su definición

$$\sup_j |e_j^n| \leq \sup_j |e_j^0| + t^F \cdot \tau.$$

$$\sup_j |U(x_j, t^n) - u(x_j, t^n)| \leq \sup_j |U(x_j, 0) - u(x_j, 0)| + t^F \cdot \tau$$

$$|U(x_j, t^n) - u(x_j, t^n)| \leq \sup_j |U(x_j, t^n) - u(x_j, t^n)| \leq \sup_j |U(x_j, 0) - u(x_j, 0)| + t^F \cdot \tau$$

$$|U(x_j, t^n) - u(x_j, t^n)| \leq t^F \cdot \tau.$$

Note que esta última desigualdad se cumple para x_j, t^n arbitrarios, por lo tanto, también es válida para $x \in [0, L]$ y $t \in [0, t^F]$. Además, $\sup_j |U(x_j, 0) - u(x_j, 0)| = \sup_j |f(x_j) - f(x_j)| = 0$. Por lo tanto,

$$|e(x, t)| \leq t^F \cdot \tau.$$

Finalmente, tomado limite

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)} |e(x, t)| \leq \lim_{(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)} t^F \cdot \tau.$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)} |e(x, t)| \leq 0.$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)} |e(x, t)| = 0.$$

Note que $\lim_{(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)} \tau = 0$. Finalmente, se concluye que el esquema numérico explícito es condicionalmente convergente para $\lambda \in]0, \frac{1}{2}]$.

Observación: Para demostrar que $\lambda \notin]0, 1/2]$ entonces Diverge, se sugiere consultar el libro [9] sección 4, pág.503.

5.3.2. Método Implícito.

Modelo Matemático.

Luego de haber resuelto la Ecuación del Calor sin termino fuente y con un método explícito. En esta sección se considera la misma ecuación, pero con término fuente y se resuelve con un esquema numérico implícito. El problema continuo consiste en determinar la función u tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = s(x,t) \quad x \in]0, L[, \quad t > 0, \tag{52}$$

sujeto a la condición inicial

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L,$$

y a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t), \quad t \geq 0.$$

Esquema de Diferencias Finitas.

Se establece una partición para la variable espacial dada por

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j < x_{j+1} < ...x_m = L$$

y una partición para la variable temporal dada por

$$0 = t^0 < t^1 < ... < t^n < t^{n+1} < ...t^F,$$

con parámetros de malla uniforme $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ y $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Además se define el parámetro de malla

$$\lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Por lo tanto, el esquema numérico implícito basado en el método de diferencias finitas, esta dado por

$$\frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} + s_j^n, \tag{53}$$

en donde,$s_j^n = s(x_j, t^n)$, y $U_j^n = U(x_j, t^n)$. Además,

$$U(x_j, 0) = U_j^0 = f(x_j) = f_j, \qquad 0 \leq x_j \leq L;$$

$$U(0,t^n) = U_0^n = g(t^n) = g^n, \qquad U(L,t^n) = U_m^n = h(t^n) = h^n. \tag{54}$$

Reordenando (53) de manera algebraica se obtiene:

$$(1+2\lambda)\cdot U_j^n = U_j^{n-1} + \lambda\cdot(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) + \Delta t\cdot s_j^n. \tag{55}$$

con $j = 1, ..., m-1$, y $n = 1, ..., F$. Matricialmente (55), para $n = 1, ..., F$, $<$, donde F corresponde a el tiempo final. La ecuación equivale a

$$\boxed{AU^n = U^{n-1} + \lambda b^n + \Delta t s^n,} \tag{56}$$

en donde,

$$A := I + \lambda D, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$U^n := \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{m-1}^n \end{pmatrix}, \quad b^n := \begin{pmatrix} U_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h^n \end{pmatrix}, \; s^n := \begin{pmatrix} s_1^n \\ s_2^n \\ \vdots \\ s_{m-1}^n \end{pmatrix}, \; f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{pmatrix},$$

I es la matriz identidad de orden $m-1$, y D es una matriz de orden $(m-1)\times(m-1)$, el cuál sí se puede resolver.

Note que el sistema (56) es de orden $(m-1)\times(m-1)$, y que el vector b^n es de orden $(m-1)\times 1$. Además, U_0^n, y U_m^n, no se incluyen como incógnitas pues son conocidas por las condiciones de frontera.

Estudio de Convergencia.

En esta sección se demuestra que el esquema numérico implícito definido por (53) es incondicionalmente convergente. Reemplazando las fórmulas del Teorema de Taylor (17) y (25), esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2),$$

reemplazando en el modelo continuo (52) se obtiene,

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1) - (\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2)) = s_j^n.$$

Aplicando propiedades algebraicas elementales y utilizando el parámetro de malla λ se obtiene

$$(1+2\lambda)u_j^n = u_j^{n+1} + \lambda(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \Delta t[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1) - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2)] + \Delta t s_j^n. \quad (57)$$

Aplicando la definición

$$\tau_j^n := \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi_1) - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_2).$$

en (57) se obtiene

$$(1+2\lambda)u_j^n = u_j^{n+1} + \lambda(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \Delta t\tau_j^n + \Delta t s_j^n. \quad (58)$$

Restando (58) de (55), y aplicando la definición del error local $e_j^n = U_j^n - u_j^n$, se obtiene

$$(1+2\lambda)e_j^n = e_j^{n-1} + \lambda(e_{j+1}^n + e_{j-1}^n) - \Delta t\tau_j^n.$$

Utilizando valor absoluto y desigualdad triangular:

$$(1+2\lambda)|e_j^n| \leq |e_j^{n-1}| + \lambda(|e_{j+1}^n| + |e_{j-1}^n|) + \Delta t|\tau_j^n|. \quad (59)$$

En esta última desigualdad se acota aplicando las definiciones $E^n := \text{máx}_j|e_j^n|$, y $\tau := \sup_{j,n}|\tau_j^n|$, se obtiene:

$$(1+2\lambda)|e_j^n| \leq E^{n-1} + 2\lambda E^n + \Delta t \cdot \tau.$$

Dado que el lado izquierdo es valido para todo e_j^n, también es válido para su valor máximo E^n se obtiene

$$(1+2\lambda)E^n \leq E^{n-1} + 2\lambda E^n + \Delta t \cdot \tau,$$

con lo cual

$$E^n \leq E^{n-1} + \Delta t \cdot \tau.$$

Así, mediante la técnica de recursividad habitual,

$$E^n \leq E^0 + n\Delta t \cdot \tau = E^0 + t^n \cdot \tau \leq E^0 + t^F \cdot \tau,$$

con $t^n = n \cdot \Delta t$, y $t^n \leq t^F$.

En este punto se aplica la misma argumentación matemática utilizada en el caso explícito por lo cual, no será repetida. Con esto se obtiene,

$$|e(x,t)| \leq t^F \cdot \tau.$$

Finalmente, tomado limite

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t)\to(0,0)} |e(x,t)| \leq \lim_{(\Delta x, \Delta t)\to(0,0)} t^F \cdot \tau.$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t)\to(0,0)} |e(x,t)| \leq 0.$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t)\to(0,0)} |e(x,t)| = 0.$$

Note que $\lim_{(\Delta x, \Delta t)\to(0,0)} \tau = 0$. Finalmente, se concluye que el esquema numérico implícito es incondicional estable, es decir, λ es arbitraria.

5.4. Caso 4: EDP Parabólica No Lineal.

En esta sección se considera una ecuación diferencial parabólica de segundo orden no lineal. La fuente utilizada para el estudio de convergencia es [14].

Modelo Matemático.

Específicamente, el problema continuo a considerar consiste en determinar una función $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ tal que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{60}$$

sujeto a la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

y a la condición de frontera

$$\lim_{x\to\infty} |u(x,t)| = 0,$$

uniformemente sobre $t \geq 0$.

Esquema de Diferencias Finitas

Se considera una partición de la variable espacial dada por

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j < x_{j+1} < ... < x_M = L,$$

y una partición de la variable temporal

$$0 = t^0 < t^1 < .... < t^n < t^{n+1} < ... < t^F,$$

con parámetros de malla $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ y $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, donde se ha supuesto que ambas particiones son uniformes. Para el modelo matemático (60) se propone el siguiente esquema numérico explícito basado en el método de diferencias finitas:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = b(U_j^n)[\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}], \tag{61}$$

o

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} b(U_j^n)(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n), \tag{62}$$

en donde $U_j^n = U(x_j, t^n)$, y $U_j^0 = f(x_j)$.

Estudio de convergencia.

En primer lugar se hace notar que la solución exacta u evaluada en el punto nodal (x_j, t^n), esto es, $u_j^n = u(x_j, t^n)$ satisface la identidad.

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda \cdot b(u_j^n) \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \cdot T_j^n, \tag{63}$$

con

$$\lambda := \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

En efecto evaluando en el punto nodal (x_j, t^n), la ecuación (60)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = b(u_j^n)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n).$$

En esta última igualdad reemplazamos sus derivadas por las fórmulas, (17) y (25):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) = b(u_j^n)[\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)]$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = b(u_j^n)\cdot\frac{1}{(\Delta x)^2}\cdot(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - b(u_j^n)\cdot\frac{\Delta x^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)] + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda\cdot b(u_j^n)\cdot(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - b(u_j^n)\cdot\frac{\Delta x^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)]$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda b(u_j^n)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \cdot T_j^n,$$

con $T_j^n := \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi_1) - b(u_j^n)\cdot\frac{\Delta x^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)$. Con lo cual se ha demostrado (63). Aplicando la propiedad

$$f(x) = f(a) + f'(\gamma)(x - a)$$

con $x := u_j^n, a := U_j^n, f := b$, $q_j^n := b'(\gamma_j)$, con γ_j entre x y a,. se obtiene

$$b(u_j^n) = b(U_j^n) + b'(\gamma_j)(u_j^n - U_j^n) = b(U_j^n) - e_j^n \cdot q_j^n$$

Reemplazando esta última igualdad se obtiene

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda[b(U_j^n) - e_j^n \cdot q_j^n] \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \cdot T_j^n.$$

Restando las ecuaciones (62) y (63)

$$e_j^{n+1} = e_j^n + \lambda \cdot b(U_j^n) \cdot (e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n) + \lambda \cdot e_j^n \cdot q_j^n \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \Delta t \cdot T_j^n$$

Factorizando

$$e_j^{n+1} = [1-2\lambda \cdot b(U_j^n)]e_j^n + \lambda \cdot b(U_j^n) \cdot (e_{j+1}^n + e_{j-1}^n) + \lambda \cdot e_j^n \cdot q_j^n \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \Delta t \cdot T_j^n$$

Aplicando valor absoluto y desigualdad triangular

$$|e_j^{n+1}| \leq |1-2\lambda \cdot b(U_j^n)||e_j^n| + \lambda \cdot |b(U_j^n)|[|e_{j+1}^n| + ||e_{j-1}^n|] + \lambda |e_j^n| \cdot |q_j^n||u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n| + \Delta t \cdot |T_j^n|$$

Asumiendo:

1. $b \geq 0$ y acotada en su dominio.
2. $1 - 2\lambda b(U_j^n) \geq 0$.
3. $|q_j^n| = |b'(\eta_j)| \leq k$, con $k > 0$ constante independiente de los parámetros de malla.

Definiendo $E^n := \sup_j |e_j^n|$ se obtiene,

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq (1 - 2\lambda b(U_j^n)) \cdot E^n + \lambda b(U_j^n)(E^n + E^n) + \lambda \cdot E^n \cdot k \cdot |u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n| + \Delta t \cdot |T_j^n| \\ &= E^n + E^n \cdot k \cdot \lambda \cdot |u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n| + \Delta t \cdot |T_j^n| \end{aligned}$$

Pero como esta desigualdad es válida para cada j en e_j^{n+1} también es válida para E^{n+1}. Luego,

$$E^{n+1} \leq E^n \cdot [1 + k \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot |u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n|] + \Delta t \cdot |T_j^n| \tag{64}$$

En lo que sigue se acotan los factores:

i) $|u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n|$

ii) $|T_j^n|$

En primer, lugar respecto de $|u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n|/\Delta x^2$ se aplica la identidad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n),$$

para obtener

$|u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)|/\Delta x^2 =$

$|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)| \leq |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n)| + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot |\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)|.$

$$\leq C_1 + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot C_2,$$

en donde, $C_1 := \sup|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\eta, t^n)|$ y $C_2 := \sup|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)|$, siendo ambas constantes positivas e independientes de los parámetros de malla.

En segundo lugar, respecto de $|T_j^n|$:

$$|T_j^n| = |\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi) - b(u_j^n)\frac{\Delta x^2}{12} \cdot |\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)|$$

$$\leq \frac{\Delta t}{2} \cdot |\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi)| + b(u_j^n)\frac{\Delta x^2}{2} \cdot |\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\eta, t^n)|$$

$$\leq \frac{\Delta t}{2} \cdot C_3 + b(u_j^n)\frac{\Delta x^2}{2} \cdot C_2,$$

en donde, $C_3 := |\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \xi)|$ constante positiva e independiente de los parámetros de malla. Por lo tanto, volviendo a la desigualdad (64) y aplicando las dos desigualdades calculadas anteriormente

$$E^{n+1} \leq E^n \cdot [1 + k \cdot \Delta t \cdot (C_1 + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot C_2)] + \Delta t[\frac{\Delta t}{2} \cdot C_3 + b(u_j^n) \cdot \frac{\Delta x^2}{2} \cdot C_2]$$

Definiendo,

$C_4 := C_4(\Delta x^2) = C_1 + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot C_2$, y

$C_5 := C_5(\Delta x^2, \Delta t) = \frac{\Delta t}{2} \cdot C_3 + b(u_j^n) \cdot \frac{\Delta x^2}{2} \cdot C_2$, se obtiene

$$E^{n+1} \leq [1 + k \cdot \Delta t \cdot C_4)] \cdot E^n + \Delta t \cdot C_5$$

$$E^{n+1} \leq A \cdot E^n + B; n = 0, 1, 2, ...$$

en donde $A := 1 + k \cdot \Delta t \cdot C_4$ y $B := \Delta t \cdot C_5$.

Respecto de esta última desigualdad note que en particular,

$$E^1 \leq A \cdot E^0 + B$$

$$E^2 \leq A \cdot E^1 + B$$

$$\leq A \cdot (AE^0 + B) + B$$

$$= A^2 \cdot E^0 + (A + 1)B$$

$$E^3 \leq A \cdot E^2 + B$$

$$\leq A \cdot [A^2 E^0 + (A + 1) \cdot B] + B$$

$$= A^3E^0 + (A^2 + A + 1)B$$

$$E^4 \leq A \cdot E^3 + B$$

$$\leq A \cdot [A^3E^0 + (A^2 + A + 1) \cdot B] + B$$

$$= A^4E^0 + (A^3 + A^2 + A + 1)B + B$$

$$= A^4E^0 + (A^3 + A^2 + A + 1)B.$$

Por lo tanto, en general para $m = 1, 2, ...$

$$E^m \leq A^mE^0 + (1 + A + ... + A^{m-1}) \cdot B. \tag{65}$$

Aplicando la propiedad $(1 + x)^m \leq e^{x \cdot m}$ a A^m:

$$A^m = (1 + \Delta t \cdot k \cdot C_4)^m$$

$$\leq e^{(\Delta t \cdot k \cdot C_4)m}$$

$$\leq e^{k \cdot C_4 \cdot (m \cdot \Delta t)}$$

$$= e^{k \cdot C_4 \cdot t^m}$$

$$\leq e^{k \cdot C_4 \cdot t^F},$$

por otro lado considerando la serie geométrica

$$1 + A + A^2 + ... + A^{m-1} = \frac{1 - A^m}{1 - A} = \frac{1 - A^m}{-\Delta t \cdot k \cdot C_4}.$$

Por lo tanto,

$$(1 + A + ...A^{m-1}) \cdot B = \frac{1 - A^m}{-\Delta t \cdot k \cdot C_4} \cdot \Delta t \cdot C_5 = \frac{A^m - 1}{k \cdot C_4} \cdot C_5.$$

Finalmente, respecto de la desigualdad (65), en primer lugar note que

$$E^0 = \sup_j |e_j^0| = \sup_j |U(x_j, 0) - u(x_j, 0)| = \sup_j |f(x_j) - f(x_j)| = 0.$$

Además,

$$|e_j^m| = |U(x_j, t^m) - u(x_j, t^m)| \leq E^m.$$

Por otro lado, note que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)} \frac{A^m - 1}{k \cdot C_4} \leq C_6,$$

en donde

$$\lim_{(\Delta x,\Delta t)\to(0,0)} C_4 = C_1,$$

en donde C_1 y C_6 son constantes positivas que no dependen de los parámetros de malla. Además,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta t)\to(0,0)} C_5 = 0,$$

en donde, se ha asumido que la función $b(\cdot)$, sobre el dominio considerado para el método numérico, es acotada.

Por lo tanto,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta t)\to(0,0)} (1 + A + ... + A^{m-1}) \cdot B = 0.$$

Finalmente, se concluye que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta t)\to(0,0)} |e(x,t)| = 0,$$

uniformemente para $x \in [0, L], t \in [0, t^F]$. Esto es, el esquema numérico es convergente.

6. Teorema de Equivalencia de Lax-Richtmyer

Se inicia este capítulo con una breve semblanza del profesor Peter Lax basada en [18]. Los párrafos que siguen son una adaptación libre desde la referencia indicada. Nos situaremos en el año 1956, en los primeros días de las simulaciones por computadora de esquemas numéricos para ecuaciones diferenciales parciales. La pregunta principal era (y sigue siendo): ¿El esquema numérico converge a la solución?. La búsqueda de la verdadera solución implica la aplicación de una resolución cada vez más fina para mejorar la aproximación. ¿La aproximación calculada es estable?. Al establecer el plan, una primera pregunta es si el plan es consistente con la ecuación diferencial subyacente, es decir, ¿se aproxima a la ecuación?. Por lo tanto, están en juego tres nociones: consistencia, estabilidad y convergencia. Es a través de estas preguntas, es que se publica la demostración del Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer, en honor a Peter Lax y Robert D. Richtmyer.

El profesor Peter Lax nació el 1 de mayo de 1926, siendo un matemático que trabajó en áreas de la matemática pura y aplicada, iniciando sus contribuciones en el año 1944 con el artículo:

Proof of a conjecture of P. Erdős on the derivative of a polynomial.
Bull. Amer. Math. Soc., 50, pp.509-513.

Realizando alrededor de 227 publicaciones, siendo la última según su autobiografía el 2008:

A curious functional equation. J. Anal. Math. 105, pp.383-390.

Sus principales contribuciones van hacia los sistemas integrales, dinámica de fluidos, ondas de choques, física de solitones, leyes de conservaciones hiperbólica, y computación científica y matemática, entre otras. Por ejemplo, formuló conjeturas sobre representaciones de matrices para polinomios hiperbólicos de tercer orden. Supervisó tesis doctorales de 55 estudiantes de posgrado; de los cuales muchos se han convertido en matemáticos destacados.

Finalmente, el profesor Peter Lax es miembro de la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos, y fue premiado con la National Medal of Science en 1986, el

Premio Wolf en 1987 y el Premio Abel en 2005, por mencionar los más relevantes.

En este capítulo se presentan el Teorema Fundamental de los Métodos de Diferencias Finitas y el Teorema de Equivalencia de Lax, los cuales establecen condiciones necesarias y/o suficientes para que un esquema numérico basado en el método de diferencias finitas sea convergente. Ambos teoremas están formulados para PVF (problema con valores en la frontera) lineales. Para el caso de ecuaciones diferenciales no lineales, cada problema de convergencia debe estudiarse según la estructura de cada ecuación.

La presentación que sigue fue redactada conjuntamente con el profesor guía de esta AFE, y corresponde a una adaptación del texto

R.J. LeVeque, Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems, SIAM, 2007.

Tal como queda de manifiesto en el Capítulo 5 de esta AFE, en lo que respecta a los estudios de convergencia para los casos 1, 2, 3 y 4, la consistencia del esquema numérico se heredó naturalmente de la aplicación del teorema de Taylor y las respectivas propiedades del residuo que establece. Sin embargo, la convergencia se logró sólo luego de un exhaustivo análisis del error, para lo cual fue necesario imponer diversas hipótesis de acotamiento para los términos y factores relevantes, las cuales se pueden englobar en la propiedad de estabilidad. Justamente, su estabilidad es el ingrediente fundamental para el análisis de convergencia del método de diferencias finitas.

En el Caso 1 del Capítulo 5 se consideró un PVF Lineal consistente en una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con condiciones de frontera. Su solución exacta se anotó como $u(x)$, y su aproximación vía método de diferencias finitas, en el nodo x_j, se anotó como U_j, con $j = 1, 2, ..., m$. Como se sabe, la relación

entre ambas funciones está dada por

$$U_j \approx u(x_j).$$

A partir de estas funciones se definen los vectores columna de dimensión $m \times 1$:

$$\hat{U} = [u(x_1), u(x_2), ..., u(x_m)]',$$

y

$$U = [U(x_1), U(x_2), ..., U(x_m)]',$$

en donde $(...)'$ denota la transposición matricial usual. Con estos, además, se define el *vector error* E como

$$E := U - \hat{U}.$$

Tal como fue presentado en el Caso 1 (ver ecuación (32)) los vectores U, $\hat{U}$, y E, satisfacen las identidades matriciales

$$A \cdot U = b$$

$$A \cdot \hat{U} = b + \tau$$

y

$$A \cdot E = -\tau,$$

con $\tau = [\tau_1, \tau_2, ..., \tau_j, ..., \tau_m]'$, y A matriz de orden $m \times m$.

Observación: note que en la identidad $A \cdot E = -\tau$ los tres términos o factores involucrados, esto es, A, E, y τ, dependen funcionalmente del parámetro de malla usual $h = \Delta x_j; j = 1, 2, ..., m$. Por razones de simplicidad esta dependencia no se hará explícita en lo que sigue.

Asumiendo que la matriz A es invertible, se obtiene para el error que

$$E = -A^{-1} \cdot \tau.$$

Luego, tomando norma $|| \cdot ||$ a ambos lados de la identidad anterior,

$$||E|| = || - A^{-1} \cdot \tau|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\tau||.$$

Por lo tanto, a partir de esta última desigualdad, un par de condiciones suficientes para obtener ***convergencia***, esto es,

$$\lim_{h \to 0} ||E|| = 0,$$

son las siguientes:

- ***Consistencia:*** teniendo presente que en general $\tau = O(h^q); q = 1, 2, ...$ producto de la aplicación del desarrollo en serie de Taylor, la consistencia del esquema numérico, esto es,

  $$\lim_{h \to 0} ||\tau|| = 0,$$

  se cumple usualmente por construcción.

- ***Estabilidad:*** se dice que el esquema numérico cumple con esta propiedad ssi existe una contante $C > 0$, independiente del parámetro de malla h, tal que la noma matricial

  $$||A^{-1}|| \leq C,$$

  para h arbitrariamente cercano a 0.

  Esta definición de estabilidad es aplicable, en general, a PVF lineales. Tener presente que, en esta definición de estabilidad, las entradas de la matriz A dependen del parámetro de malla h.

Con los elementos presentados hasta este punto se ha demostrado el:

Teorema Fundamental de los Métodos de Diferencias Finitas: considere un PVF lineal, el cual ha sido discretizado según un método de diferencias finitas consistente. Entonces, el esquema numérico converge si es estable, según la definición dada anteriormente.

En el Caso 3, esto es, en el caso de una ecuación diferencial parcial de tipo parabólica lineal, la función solución exacta posee una dependencia del tipo $u = u(x,t)$ y la respectiva función de aproximación construida con el método de diferencias finitas se anotó como U_j^n, de tal modo que

$$U_j^n \approx u(x_j, t^n),$$

en donde (x_j, t^n) es un punto nodal en el plano cartesiano, fruto de particiones usuales de las variables espacial y temporal respectivamente. Al igual que en la primera parte se definen los siguientes vectores columna:

$$U^n := [U_1^n, U_2^n, ..., U_m^n]'$$

$$u^n := [u(x_1, t^n), u(x_2, t^n), ..., u(x_m, t^n)]'$$

$$\tau^n := [\tau(x_1, t^n), \tau(x_2, t^n), ..., \tau(x_m, t^n)]'$$

$$E^n := U^n - u^n.$$

Con esta notación, y asumiendo que los tamaños de paso espacial Δx y temporal Δt están relacionados de tal modo que $\Delta x = g(\Delta t)$, (esta hipótesis fue utilizada por Lax en su artículo original [10]) la ecuación diferencial y el esquema numérico se pueden reescribir en la forma

$$u^{n+1} = B \cdot u^n + d^n + \Delta t \cdot \tau^n$$

$$U^{n+1} = B \cdot U^n + d^n,$$

respectivamente, en donde, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $d^n \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, y $\tau^n \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, dependen funcionalmente sólo del tamaño de paso temporal Δt. Un ejemplo relevante de las dos identidades anteriores es [56], en donde, $B = A^{-1}$, y $d^n = A^{-1} \cdot (\lambda b^n + \Delta t s^n)$.

Con estas dos últimas identidades el vector error E^n satisface

$$E^{n+1} = B \cdot E^n - \Delta t \cdot \tau^n,$$

para $n = 0, 1, 2, ...$ Luego de aplicar esta última identidad N pasos temporales consecutivos se obtiene que

$$E^N = B^N \cdot E^0 - \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{N} B^{N-n} \cdot \tau^{n-1}.$$

Tomando norma $||\cdot||$ a ambos lados de la identidad anterior

$$||E^N|| \leq ||B^N|| \cdot ||E^0|| + \Delta t \cdot \sum_{n=1}^{N} ||B^{N-n}|| \cdot ||\tau^{n-1}||.$$

En esta última desigualdad, teniendo presente que la condición inicial satisface

$$\lim_{\Delta t \to 0} ||E^0|| = 0,$$

y que por la consistencia del esquema numérico

$$\lim_{\Delta t \to 0} \max_{1 \leq n \leq N} ||\tau^{n-1}|| = 0,$$

una condición suficiente para obtener la convergencia del esquema numérico es que el factor

$$||B^n||$$

permanezca al menos acotado. Justamente, esta es otro tipo de condición de estabilidad denominada *Estabilidad Lax-Richtmyer* la cual se define formalmente como:

Definición: Estabilidad Lax-Richtmyer. Un método numérico lineal del tipo

$$U^{n+1} = B \cdot U^n + d^n$$

se dice estable según Lax-Richtmyer, si para cada tiempo $T > 0$ existe una constante $C_T > 0$ tal que

$$||B^n|| \leq C_T,$$

para todo $\Delta t > 0$, y para todo natural n tal que $\Delta t \cdot n \leq T$.

Por lo tanto, asumiendo que el esquema numérico es estable según Lax-Richtmyer, y siguiendo con la argumentación en curso, se obtiene que

$$||E^N|| \leq C_T \cdot ||E^0|| + T \cdot C_T \cdot \operatorname*{máx}_{1 \leq n \leq N} ||\tau^{n-1}||,$$

con lo cual

$$\operatorname*{lím}_{\Delta t \to 0} ||E^N|| = 0,$$

para $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Esto es, el esquema numérico resulta ser convergente.

Observación. Hasta aquí se ha ratificado el enunciado del Teorema Fundamental de los Métodos de Diferencias Finitas, esto es, que para un PVF Lineal, consistencia y estabilidad del esquema numérico son condiciones suficientes para su convergencia. Sin embargo, para métodos lineales consistentes de la forma

$$U^{n+1} = B \cdot U^n + d^n$$

la estabilidad también resulta ser una condición necesaria. Este es justamente el contenido del

Teorema de Equivalencia de Lax. Un método lineal *consistente* de la forma

$$U^{n+1} = B \cdot U^n + d^n$$

es *convergente* **ssi** es *Lax-Richtmyer estable.*

Resta argumentar la necesidad de la condición *Lax-Richtmyer estable*, esto es, que si un esquema numérico del tipo diferencias finitas es consistente y convergente, entonces necesariamente es *Lax-Richtmyer estable.*

La demostración de esta proposición es por contradicción, es decir, se asume un esquema consistente, y convergente, pero no *Lax-Richtmyer estable*, es decir, con $||B^n||$ no acotado. Pero esto implica la existencia de una partición para la cual $||E^n||$ no tiende a cero, lo cual termina siendo contradictorio con la hipótesis de convergencia. Los detalles de este argumento, y de la demostración completa del Teorema de Equivalencia de Lax se pueden encontrar en el artículo original [10]

P.D.Lax, R.D.Richtmyer, Survey of the stability of linear finite difference equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. IX, pp. 267-293, 1956.

o en el libro de apuntes de clases [5]

R.Bürger, Análisis Numérico III, Apuntes de clases, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 2020.

7. Conclusiones

En esta actividad formativa equivalente (AFE) se consideró el problema de convergencia del método numérico de diferencias finitas aplicado a ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, lineales y no lineales. Específicamente, se consideraron cuatro modelos: dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, una lineal y otra no lineal, y dos ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólicas, una lineal y otra no lineal.

En los cuatro casos el argumento matemático consistió en la aplicación del Teorema Fundamental de Diferencias Finitas el cual establece que si el esquema numérico basado en el MDF es consistente y estable, entonces es convergente. Como se sabe la consistencia se obtiene directamente de la aplicación del teorema de Taylor, por lo que la mayor parte de la demostración es para verificar que el esquema numérico es estable.

Adicionalmente al estudio de convergencia de los cuatro casos ya mencionados en esta AFE, se enuncian el Teorema Fundamental del Método de Diferencias Finitas y el Teorema de Lax-Richtmyer, y para ambos se bosqueja su demostración. Como se sabe ambos teoremas se aplican a problemas lineales con condiciones en la frontera, y la diferencia fundamental entre ambos consiste en la definición que usan para la estabilidad del esquema numérico. En el caso del primer teorema, se establece que la consistencia y la estabilidad son condiciones suficientes para la convergencia, mientras que en el Teorema de Lax-Richtmyer se establece que la consistencia y la estabilidad son condiciones no solo suficientes sino que también necesarias para la convergencia. Se debe destacar que en ambos teoremas la definición de estabilidad es distinta, siendo la primera más general, mientras que la segunda es más restrictiva y se denomina estabilidad de Lax-Richtmyer.

Uno de los principales aportes de esta AFE consistió en hacer una presentación de los cuatro casos y de los dos teoremas mencionados, con una notación matemática unificada y comprensiva para el lector no experto en métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. En efecto, tal como se puede constatar con facilidad existe una amplia diversidad notacional para este tema tanto en libros de textos como en

artículos científicos. La autora de esta AFE espera haber logrado de manera satisfactoria este objetivo pensando fundamentalmente en aplicaciones profesionales que realizan del MDF científicos aplicados de distintas especialidades.

Finalmente, como proyecciones futuras de esta AFE se vislumbran la implementación computacional y comparativa de los esquemas numéricos analizados, y un debilitamiento de las hipótesis matemáticas requeridas para los estudios de convergencia.

Referencias

[1] Bader Sh.H., and Zhu X., AFiD-MHD: A finite difference method for magnetohydrodynamic flows, Journal of Computational Physics, Vol. 523, 2025.

[2] Benito J., y Ureña F., Algo de lo que hacemos: El Método de Diferencias Finitas Generalizadas. Ind.+ XL: industriales UNED desde 1974, 2021.

[3] Bustos M., Campos M. y Gatica G., Análisis Numérico II, Universidad de Concepción, 1995.

[4] Burden R. and Faires J., Numerical Analysis, Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.

[5] Bürger R., Análisis Numérico III, Apuntes de clases, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, 2020.

[6] Greenbaum A., Iterative methods for solving linear systems (Frontiers in applied mathematics, 17), SIAM, 1997.

[7] Hamad A.A., and Jha S., Coding Dimensions and the Power of Finite Element, Volume, and Difference Methods, IGI Global, 2024.

[8] Hou G., Chen C., Qin Sh., Gao Y., and Wang K., Computational Fluid Dynamics: Finite Difference Method and Lattice Boltzmann Method, Engineering Applications of Computational Methods, Vol. 20, Springer, 2024.

[9] Isaacson E. and Keller H., Analysis of Numerical Methods, Courier Corporation, 1994.

[10] Lax P.D., and Richtmyer R.D., Survey of the stability of linear finite difference equations, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. IX, pp.267-293, 1956.

[11] LeVeque R.J., Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems, SIAM, 2007.

[12] Trefethen Ll.N., and Bau D., Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997.

[13] Mao M., Wang W., Tian T., and Wang L., Adaptive option pricing based on a posteriori error estimates for fully discrete finite difference methods, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 460, 2025.

[14] Morton K. and Mayers D., Numerical solution of partial differential equations: an introduction, Cambridge University Press, 2005.

[15] Raza Q., Wang X., Ali B., Li Sh., Shah N.A., and Yang H., Computational study on entropy generation in Casson nanofluid flow with motile gyrotactic microorganisms using finite difference method, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 190, 2025.

[16] Reddy J.N., Computational Methods in Engineering: Finite Difference, Finite Volume, Finite Element, and Dual Mesh Control Domain Methods (Applied and Computational Mechanics), CRC Press, 2024.

[17] Trefethen Ll. and Bau D., Numerical Linear Algebra, SIAM, 2022.

[18] Holden H., and Piene R., eds. The Abel Prize: 2003-2007 The First Five Years. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010.

8. Anexos

8.1. Detalles representación matricial del Caso 3 para el método implícito.

Con el fin de mejorar la comprensión de la forma matricial, es dar valores al nodo j, pero antes recordemos la discretización

$$(1+2\lambda)U_j^n = U_j^{n-1} + \lambda(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) + \Delta t s_j^n$$

despejamos

$$(1+2\lambda)U_j^n - \lambda(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) = U_j^{n-1} + \Delta t s_j^n$$

Nodo $j = 1$

$$(1+2\lambda)U_1^n - \lambda(U_2^n + U_0^n) = U_1^{n-1} + \Delta t s_1^n$$

Resolvemos

$$(1+2\lambda)U_1^n - \lambda U_2^n - \lambda U_0^n = U_1^{n-1} + \Delta t s_1^n$$

Obtenemos la Ecuación 1:

$$(1+2\lambda)U_1^n + -\lambda U_2^n + 0U_3^n + 0U_4^n = U_1^{n-1} + \Delta t s_1^n + \lambda U_0^n$$

Nodo $j = 2$

$$(1+2\lambda)U_2^n - \lambda(U_3^n + U_1^n) = U_2^{n-1} + \Delta t s_2^n$$

Obtenemos la Ecuación 2:

$$-\lambda U_1^n + (1+2\lambda)U_2^n + -\lambda U_3^n + 0U_4^n = U_2^{n-1} + \Delta t s_2^n$$

Nodo $j = 3$

$$(1+2\lambda)U_3^n - \lambda(U_4^n + U_2^n) = U_3^{n-1} + \Delta t s_3^n$$

Obtenemos la Ecuación 3:

$$0U_1^n + -\lambda U_2^n + (1+2\lambda)U_3^n + -\lambda U_4^n = U_3^{n-1} + \Delta t s_3^n$$

Nodo $j = 4$

$$(1+2\lambda)U_4^n - \lambda(U_5^n + U_3^n) = U_4^{n-1} + \Delta t s_4^n$$

Obtenemos la Ecuación 4:

$$0U_1^n + 0U_2^n + -\lambda U_3^n + (1+2\lambda)U_4^n = U_4^{n-1} + \Delta t s_4^n + \lambda U_5^n$$

Luego, a partir de estas cuatro ecuaciones, se obtiene la representación matricial del sistema de ecuaciones dada por

$$\begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} U_1^{n-1} \\ U_2^{n-1} \\ U_3^{n-1} \\ U_4^{n-1} \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} S_1^n \\ S_2^n \\ S_3^n \\ S_4^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} U_0^n \\ 0 \\ 0 \\ U_5^n \end{pmatrix},$$

o sea,

$$\boxed{AU^n = U^{n-1} + \lambda b^n + \Delta t s^n,}$$

en donde, la matriz de coeficientes principales A está dada por

$$A = I + \lambda \cdot D,$$

con

$$D =: \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$