

Facultad de Ingeniería

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Modelamiento matemático de un sistema suelo raíz agua bajo condiciones de sequía

Por

Leonardo Antonio Vásquez Gajardo

Profesor Guía

Dr. Emilio Cariaga López

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas (Profesional).

Temuco - 7 de marzo de 2016

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISION EVALUADORA

Profesor Guía:

Dr. Emilio Cariaga

Evaluador externo:

Dr. Jorge Jerez

Profesor informante:

Dra. Ximena Petit-Breuilh

Profesor informante:

Dr. Billy Peralta

(Ministro de fe):

Dr. Osvaldo Venegas

Temuco ·····

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

Agradecimientos

A los académicos del departamento de Ciencias Matemáticas y Física, quienes guiaron mi camino a través del programa. A mi director de la actividad formativa equivalente, Dr. Emilio Cariaga, por su paciencia, preocupación y generosidad. Al Dr. Jorge Jerez, quien me entrego los insumos necesarios para lograr los resultados deseados. Por último y no por eso menos importante, a mis compañeros del programa (Versión 1 Magíster Matemáticas Aplicadas), quienes me ayudaron en diferentes aspectos en el transcurso del proceso fórmativo.

A mis padres, Elizabeth Gajardo Guitierrez y Joel Vásquez Lastra. A mi Esposa e Hijo, Ximena Pérez Ríos y Matías Vásquez Pérez.

Abstract

Currently, water use is a relevant fact, due to ongoing climate change and the lack of rain during the year, issues in agriculture can not be let go, because of their direct influence on the production of a particular culture.

For this reason , optimize irrigation is a constant challenge , especially in times of drought , with the need to determine the appropriate rate of irrigation , which is a complex challenge product of the number of variables involved in the phenomenon (moisture , pressure, porosity , soil type , vegetation and others). One way to address the problem of irrigation is through computer simulation of water saturation in farm soil , considering the consumption made the roots of plants. Therefore, in this paper, a mathematical model is introduced in one dimension (1D) of the hydrodynamics of a root- soil - water system in a time of drought. Addressing water absorption by the roots through a source S term that is incorporated into the flow equation , taking a blueberry bush as for simulation and capturing the phenomenon in moments of sprouting or summer.

The conceptual model is based on physical considerations of the theory of porous media in the unsaturated zone , which is where there are largely the roots and in the case of blueberries , as a shrub , the root system is shallow ground. The mathematical model is based on the equation of Richards amended, which arises from the combination of the Law of Darcy - Buckingham and the continuity equation , which the source term S , which is based on the model Feddes to integrate the water absorption through the roots. At the upper limit of the domain (ground level) Dirichlet condition or Neuman (irrigation and transpiration) and the lower limit of Neuman (free drainage) is assumed.

The model is solved numerically using as a means computer software hydrus 1D , performing computer simulations of the phenomenon for different soil types , obtaining : the solution of the mathematical model in time and space , the curves of surface pressure , pressure in the area root , the real rate of t_a perspiration and transpiration rate potential T_p . With these, it seeks to define an irrigation program , setting times and flows, but without neglecting the level of stress that is induced in moments of irrigation saturation of the pore in the root zone , for the purpose of approximating or even T_p and t_a , through the variation of the parameters of irrigation.

In the simulation, it was equaled T_a and T_p in clay soil and an approach in the sandy loam soil, two areas that are recommended for blueberry plant. Moreover, the simulations allowed to establish appropriate rates for the needs of absorption by the roots of the plant under the conditions raised.

Keywords: Root water uptake, unsaturated porous medium, transpiration, Surface pressure head , uptake water stress.

Resumen

En la actualidad, el aprovechamiento del agua es un hecho relevante, debido a los continuos cambios climáticos y la falta de lluvia durante el año, temas que en el área agrícola no se pueden dejar pasar, por su influencia directa en la producción de un determinado cultivo.

Por este motivo, optimizar el riego es un desafío constante, sobre todo en los momentos de sequía, surgiendo la necesidad de determinar la tasa de riego adecuada, lo cual es un desafío complejo producto de la cantidad de variables que intervienen en el fenómeno (humedad, presión, porosidad, tipo de suelo, vegetación y otros). Una forma de abordar el problema del riego, es a través de la simulación computacional de la saturación de agua en el suelo agrícola, considerando el consumo que realizan las raíces de las plantas. Para ello, en este trabajo se introduce un modelamiento matemático, en una dimensión (1D), de la hidrodinámica de un sistema suelo-raíz-agua en un instante de sequía. Abordando la absorción de agua por parte de las raíces a través de un término fuente S que se incorpora en la ecuación de flujo, tomando un arbusto como el arándano para la simulación y capturando el fenómeno en los instantes de brotación o verano.

El modelo conceptual se basa en consideraciones físicas de la teoría de medios porosos en la zona insaturada, que es donde existen en gran medida las raíces y que en el caso de los arándanos, por ser un arbusto, el sistema radical se encuentra a poca profundidad del suelo. El modelo matemático se basa en la ecuación de Richards modificada, que surge de la combinación de la Ley de Darcy-Buckingham y la ecuación de continuidad, a la cual se integra el término fuente S,quien se basa en el modelo de Feddes para la absorción del agua por medio de las raíces. En el límite superior del dominio (nivel del suelo) se asume una condición de Dirichlet o Neuman (riego y transpiración) y en el límite inferior una de Neuman (libre drenaje).

El modelo se resuelve numéricamente usando como medio de cómputo el software hydrus 1D, realizando simulaciones computacionales del fenómeno para distintos tipos de suelo, obteniendo: la solución del modelo matemático en el tiempo y el espacio, las curvas de presión superficial, presión en la zona radicular, la tasa de transpiración real T_a y tasa potencial de transpiración T_p . Con éstas, se busca definir un programa de riego, fijando tiempos y flujos, pero sin descuidar el nivel de estrés que se provoca en los momentos de riego por saturación del poro en la zona de la raíz, con el propósito de aproximar o igualar T_a y T_p , por medio de la variación de los parámetros de riego.

En la simulación, se logró igualar T_a y T_p en el suelo arcilloso y una aproximación en el suelo franco arenoso, dos terrenos que son recomendados para la planta de arándano. Por otra parte, las simulaciones permitieron establecer tasas adecuadas para las necesidades de absorción por parte de las raíces de la planta en las condiciones planteadas.

Palabras clave: absorción de agua por parte de las raíces, zona insaturada, transpiración, presión superficial ,estrés hídrico.

Índice

	Lista	Lista de figurasviii Introducción					
2	Mo	Iodelo Conceptual					
	2.1	Medio Poroso: Magnitudes físicas básicas	4				
		2.1.1 REV (representative elementary volume)	4				
		2.1.2 Porosidad	5				
		2.1.3 Saturación	6				
		2.1.4 Contenido de humedad	6				
		2.1.5 Potencial de presión o matricial	7				
		2.1.6 Conductividad hidráulica	8				
		2.1.7 Capilaridad de un medio poroso	9				
	2.2	Curvas características	11				
	2.3	Ley de Darcy-Buckingham	12				
3	Mo	delos de Absorción de agua desde la raíz	14				
-	3.1	Primera categoría: Enfoque microscópico	14				
	0.1	3.1.1 Modelo de Gardner	14				
	3.2	Segunda categoría: Enfoque macroscópico	14				
	0.1	3.2.1 Modelo de Molz v Remson	15				
		3.2.2 Modelo de Feddes	15^{-5}				
		3.2.3 Modelo de Prasad	18				
		3.2.4 Modelo de Kang	18				
	33	Transpiración	19				
	3.4	Baíz del Arándano	21				
	3.5	Consideraciones para la experimentación computacional	22				
1	Mat	torialog v métodog	<u>م</u> ر				
4	1 VIA	Fausción de Bichards	24 94				
	4.1	Les propiededes hidráulices del suele inseturede	24 96				
	4.2	4.2.1 Brooks and Coroy [1064]	20				
		4.2.1 DIOOKS and Corey $[1904]$	20				
	19	4.2.2 Van Genucitien - Mualem [1980]	21				
	4.5		21				
	4.4	L'A 1 Dispretizzación especial	20				
		4.4.1 Discretización espacial	28				
		4.4.2 Discretización temporal \dots	29				
		4.4.5 Discretización del termino fuente S	30 20				
	4 -	4.4.4 Solucion numerica	<u>კე</u>				
	4.5		31 01				
	4.0		31 20				
	4.7	Condiciones iniciales y de Borde	32				

5 Resultados

Resultados 34							
5.1 Simulación computacional							
	5.1.1	Simulación 1: Suelo arcilloso	38				
	5.1.2	Resumen	51				
	5.1.3	Simulación 2: Franco arenoso	52				
	5.1.4	Resumen	61				
	5.1.5	Curvas características	62				
Conclusiones							

6 Conclusiones

Índice de figuras

1	Bosquejo de un perfil de suelo	3
2	Volumen elemental representativo (REV)	4
3	escala de poro presente en un REV	5
4	Contenido de humedad	7
5	Representación del potencial de Presión en un medio poroso	8
6	Perfil de la conductividad $K(h)$	9
$\overline{7}$	Esquema de un tubo capilar producto de tensión superficial	10
8	Curva de retención para un suelo hipotético	11
9	Esquema del sistema experimental de Darcy	12
10	Representación de la función de respuesta al estrés hidrico $\alpha(h)$, Feddes 1978.	16
11	Esquema de la función de distribución potencial de absorción de agua, $b(z)$.	18
12	Representación de la función del índice de estrés ω de Jarvis, 1989	20
13	Esquema del fenómeno de histeresis	23
14	Volumen de control para determinar la ecuación de Richards	24
15	Discretización espacial	28
16	Posición de nodos de observación y distribución de la zona de raíz	35
17	Información del tiempo de simulación, para 51 nodos y paso máximo de 5 días	36
18	Información del tiempo de simulación, para 101 nodos y paso máximo de 5 días	36
19	Información del tiempo de simulación, para 1001 nodos y paso máx. de 5 días	36
20	Información del tiempo de simulación, para 1001 nodos y paso máximo de 1 día	37
21	Tasa real para una presión de activación $h_r = -100 \ cm$	39
22	Tasa real para una presión de activación $h_r = -200 \ cm$	40
23	Presión superficial del suelo arcilloso	41
24	Presión radicular del suelo arcilloso	42
25	Tasa de transpiración real T_a del suelo arcilloso $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	43
26	Tasa real para una presión de activación $h_r = -300 \ cm$	44
27	Solución de la presión de poros para el suelo arcilloso	45
28	Solución de la humedad para el suelo arcilloso	46
29	Conductividad del suelo arcilloso	47
30	Solución de la presión de poros para un suelo arcilloso, por nodos	48
31	Solución de la humedad para un suelo arcilloso, por nodos	49
32	Flujo en el suelo arcilloso por nodo	49
33	Presión superficial del suelo franco arenoso	53
34	Presión radicular del suelo franco arenoso	53
35	Tasa de transpiración real T_a del suelo franco arenoso $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	54
36	Solución de la presión de poros a una tasa de riego de 9 cm/día en un suelo	
	franco arenoso	55
37	Solución de la presión de poros para el suelo franco arenoso	56
38	Solución de la humedad para el suelo franco arenoso	57
39	Conductividad del suelo franco arenoso	58
40	Solución de la presión de poros para el suelo franco arenoso, por nodos $\ . \ .$	59
41	Solución de la humedad para el suelo franco arenoso, por nodos	59
42	Flujo del suelo franco arenoso por nodos	60
43	Curva característica h v/s θ , del suelo arcilloso y franco arenoso $\ldots \ldots \ldots$	62

Nomenclatura

a	 radio de la raíz [cm]
b(z)	 función de distribución de absorción de agua por la raíz normalizada $[cm^{-1}]$
b'(z)	 función de distribución de absorción de agua por la raíz $[cm^{-1}]$
E	 evapotranspiración $[cmdia^{-1}]$
f_r	 coeficiente de crecimiento de las raíces [-]
$f(\theta)$	 es un adimensional del término fuente del modelo de Kang [-]
$\{F_w\}$	 vector de coeficientes en la ecuación de la matriz global para flujo de agua
	$[cmdia^{-1}]$
h	 presión de poro [cm]
h_A	 Potencial de presión de entrada de aire $[cm]$
H_c	 altura capilar [cm]
$h_0(t)$	 presión que se alcanza en $z = 0$ en el tiempo $t [cm]$
h_r	 presión de riego $[cm]$
h_{Root}	 presión zona de la raíz [cm]
$\{h\}$	 vector solución en la ecuación de la matriz global para flujo de agua $[cm]$
K	 conductividad hidráulica insaturada $[cmdía^{-1}]$
K_s	 conductividad hidráulica saturada $[cmdía^{-1}]$
L	 profundidad del perfil del suelo (de la referencia $z = 0$ hasta la superficie
	del suelo $z = L$) $[cm]$
l	 parámetro de conectividad de poros [-]
L_R	 profundidad de las raíces $[cm]$
l_v	 densidad radicular $[[cmcm^{-3}]]$
m	 parámetro de la función de retención de agua del suelo [-]
M	 distancia media entre raíces uniformes $[cm]$
n	 exponente en la función de retención de agua del suelo [-]
P_a	 presión fase aire $[Nm^{-2}]$
P_c	 presión capilar $[Nm^{-2}]$
P_w	 presión fase agua $[Nm^{-2}]$
$[P_w]$	 matriz de coeficientes en la ecuación de la matriz global para flujo de agua
	$[dia^{-1}]$
$q_{}$	 flux producto de la infiltración neta $[cmdia^{-1}]$
q'	 volumen de agua absorbida por unidad de longitud de la raíz por unidad de
	tiempo $[m^3m^1s^1]$
q_0	 tasa de infiltración neta $[cmdia^{-1}]$
S	 término fuente en la ecuación de flujo $[día^{-1}]$
s_a	 saturación de poro fase no liquida [-]
S_c	 tasa absorción de agua por parte de las raíces compensada $[dia^{-1}]$
s_w	 saturación de poro fase liquida [-]
S_p	 tasa potencial de absorción de agua por parte de las raíces $[dia^{-1}]$
t	 tiempo de simulación $[día]$
T_a	 tasa de transpiración real $[cmdia^{-1}]$
T_{a-min}	 tasa minima absorción de la raíz $[cmdia^{-1}]$
T_{ac}	 tasa de transpiración real compensada $[cmdia^{-1}]$

T_p	 tasa de transpiración potencia $[cmdia^{-1}]$
t_r	 tiempo de retardo $[dia]$
T_r	 cantidad de irrigación en cada riego $[cm]$
T_{rd}	 cantidad de agua diaria necesaria por la planta $[cm \ dia^{-1}]$
T_{ri}	 tasa de riego $[cmdia^{-1}]$
t_{riego}	 tiempo de riego $[dia]$
U	 volumen total de un REV $[cm^3]$
U_a	 volumen fase no liquida $[cm^3]$
U_P	 volumen poros $[cm^3]$
U_S	 volumen total solido $[cm^3]$
U_w	 el volumen fase liquida $[cm^3]$
z	 coordenada espacial (positivo hacia arriba)[cm]
α	 parámetro empírico de Brooks and Corey $[cm^{-1}]$
$\alpha(h)$	 función de respuesta al estrés hídrico [-]
θ	 contenido de humedad $[cm^3 cm^{-3}]$
θ_a	 contenido volumétrico de la fase no liquida en el por o $\left[cm^3cm^{-3}\right]$
θ_s	 contenido de humedad zona saturada $[cm^3cm^{-3}]$
θ_w	 contenido volumétrico de agua $[cm^3 cm^{-3}]$
θ_r	 humedad residual [-]
θ_{cc}	 humedad correspondientes a la capacidad de campo [-]
θ_{pmp}	 humedad para el punto de marchitez permanente [-]
λ	 índice de distribución del tamaño de los poros [-]
σ_{aw}	 tensión superficial de la interfaz aire-agua $[Nm^{-1}]$
ω	 índice adimensional del estrés de agua [-]
ω_c	 factor de adaptabilidad de la raíz [-]
$ ho_{H_2O}$	 densidad del agua $[g/cm^3]$
ϕ	 porosidad [-]
Ψ_t	 potencial total $[cm]$
Ψ_g	 potencial gravitatorio [cm]
Ψ_p	 potencial de presión [cm]
Ψ_o	 potencial osmótico [cm]
Ψ_r	 potencial de agua en la superficie de la raíz [cm]
Ψ_0	 potencial de agua en el punto medio entre raíces vecinas [cm]

Objetivos

Objetivo general

Simular computacionalmente la saturación de agua en un suelo agrícola considerando el consumo que realiza la raíz de la planta.

Objetivos específicos

- 1. Formular un modelo matemático, relacionado con el comportamiento hidráulico de la zona no saturada y el efecto de la absorción de agua por parte de las plantas a través de las raíces.
- 2. Resolver numéricamente el modelo y realizar una simulación computacional del fenómeno, para luego considerar variaciones de parámetros, como lo son tasas y tiempo de riego en Hydrus 1D.
- 3. Evaluar distintas condiciones de operación del modelo matemático para una aplicación, de tal manera de determinar la cantidad optima de irrigación de cada riego. Visualizado el estrés provocado a la raíz en el tiempo de riego por la saturación del medio poroso.

1 Introducción

El estrecho vínculo que existe entre los patrones de uso de agua de las plantas y la variación del contenido de agua presente en el suelo, tanto espacial, temporal y aguas subterráneas fluctuantes (Newman 2006) hace que la captación de agua por parte de la raíz sea un área compleja de modelar, ver figura 1. Los esfuerzos en estudios hidrológicos, se han centrado básicamente en el acoplamiento de agua presente en el suelo y las dinámicas de absorción de agua por parte de la vegetación (Feddes 2001); (Wang 2004). Dentro de esto la humedad del suelo es una variable clave para la comprensión de los procesos hidrológicos en la zona insaturada. Las prácticas de gestión agrícola y de riego, especialmente en regiones semiáridas y áridas, dependen en gran medida de una caracterización oportuna y precisa de la dinámica de la humedad del suelo temporales y espaciales en la zona de las raíces debido al impacto de la humedad del suelo en el estado de la producción y la salud de los cultivos y salinización (Vereecken 2008); (Kumar 2012). Los modelos de simulación de la absorción de agua de la raíz están diseñados para rastrear diferentes componentes del balance de agua en el suelo y para simular la distribución de la humedad en el perfil del suelo. Como referencia se sabe que las plantas son capaces de absorber agua, dentro de cierto rango del potencial de presión (h). La tasa de transpiración potencial y la distribución de las raíces permiten la absorción de agua por la raíz. Donde el agua retenida entre estos límites se asume sobre la profundidad de la zona de las raíces, estimando así la curva característica del suelo y la cantidad total de agua disponible.

En este trabajo se aborda el problema de simular la hidrodinámica de interacción suelo-raíz-agua, con énfasis en el proceso de absorción de agua desde la superficie de la raíz, con un enfoque macroscópico del fenómeno. Incorporando el estrés por falta de oxigenación en los momentos de riego. Donde existe poca información ya que todos los esfuerzos se han centrado en la aparición del fenómeno en momentos de sequía (Valladares 2004); (Ferreyra 2002). Para mayor concreción se simula una raíz tipo arándano. Desde el punto de vista del modelo matemático se considera un término fuente S en la clásica ecuación de Richards (Usada para describir el flujo en un medio poroso insaturado y que se obtiene introduciendo la ley de Darcy-Buckingham de 1907, en la ecuación de continuidad. La cual se obtiene al relacionar los cambios en el contenido de humedad de un volumen de suelo con los flujos entrantes y salientes) que da cuenta del consumo de agua por parte de la raíz.

Por la relevancia que tiene el sistema suelo-raíz en este estudio, es que en la sección 2 de este trabajo se define un medio poroso, estableciendo sus magnitudes físicas fundamentales, describiendo dichos conceptos dentro de un volumen elemental representativo (REV), que es el volumen más pequeño sobre el cual se puede realizar una medición y que arroje un valor representativo de la totalidad del medio poroso (Hill 1963). Ademas de explicar la importancia de las curvas características al relacionar el contenido de humedad (θ) con el potencial de presión (h), la Ley de Darcy como relación empírica para el movimiento del agua a través del suelo en la zona saturada en un estado estacionario y el aporte de Buckingham para la utilización de ésta en la zona insaturada. Mostrando en la sección 3 los distintos enfoques del término fuente (S) para la absorción de agua por las raíces (RootWater Uptake) y la estrecha relación que existe con la tasa de transpiración potencial (T_p , para terminar definiendo las consideraciones para la simulación que se realizará en la sección En la sección 4 se realiza el balance de masa macroscópico de la cantidad de movimiento del sistema suelo raíz para un flujo laminal de tal manera de determinar el modelo matemático a utilizar en el estudio. El resultado es la Ecuación de Richards que surge de utilizar la velocidad de Darcy en la ecuación de continuidad para la fase líquida. Para luego establece la solución numérica de la ecuación de Richards, considerando la distribución inicial del potencial de presión dentro del dominio]0, L[y las condiciones de contorno independiente o dependientes del sistema suelo-raíz que soporta Hydrud 1D y el proceso iterativo que se pretende implementar, explicando los criterios de control del tiempo que se enfocan en: la solución, las condiciones de contorno y la impresión de los resultados.

Dejando para el final, en la sección 5, las simulaciones computacionales que se orientaron a responder a dos preguntas fundamentales como son el ¿Cuándo regar? y ¿Cuánto regar? de tal manera de no provocar estrés (donde las raices de la planta no absorve a la máxima tasa potencial). Como ambiente de cómputo para realizar las simulaciones se ha seleccionado el software Hydrus 1D (Desarrollado por J. Šimůnek et al. (Šimůnek et al. 2013) y comercializado por PC-PROGRESS (PC-PROGRESS 2008)) por ser actualmente un estándar internacional para el tipo de fenómenos presentes en este trabajo. Se ha seleccionado un arbusto como el arándano como objeto de estudio, ya que este es muy propenso al estrés provocado tanto por la saturación como por la baja de humedad, ensayando sobre dos tipo de suelos homogéneos (arcilla y franco arenoso) que son los recomendados para dicho arbusto, ya que las raíces del arándano requieren de suelos sueltos y bien drenados, con buen contenido de materia orgánica (3% a 5%) (Valenzuela 1988).



Figura 1 – Bosquejo de un perfil de suelo, destacando las zonas presentes y considerando que las raices se encuentran ubicadas principalmente en la zona insaturada (Hillel 1998)

2 Modelo Conceptual

2.1 Medio Poroso: Magnitudes físicas básicas

Se entiende por medio poroso un sólido o arreglo de ellos con suficiente espacio abierto dentro o alrededor de las partículas para permitir el paso de un fluido (Darby 1996). Según la teoría de medios porosos existen distintos niveles como: molecular, microscópico, mesoscópico y macroscópico (Helmig 1997). En este trabajo se considerará a nivel macroscópico, considerando un volumen tipo REV (representative elementary volume) en el que definiremos las magnitudes físicas presentes.

2.1.1 REV (representative elementary volume)

En la teoría de los materiales compuestos, el volumen elemental representativo (REV), es el volumen más pequeño sobre el cual se puede realizar una medición y que arroje un valor representativo de la totalidad del medio poroso (Hill 1963).



Figura 2 – Adaptación (Molly 2011). Esquema conceptual que representa la relación entre la porosidad idealizada (ϕ) y la escala de la medición (L). La heterogeneidad a macroescala es considerada como la no uniformidad del tamaño de poro del medio poroso.

Como se muestra en la Figura 2, en la región I a una pequeña escala se visualizan fluctuaciones aleatorias, asociados con la heterogeneidad de la escala del poro. Mediciones de porosidad realizadas en esta escala son considerados poco fiables. Para medios poroso homogéneo, un volumen elemental representativo mínimo (REV) se define como el límite izquierdo de la región II; mediciones de porosidad hechas en esta escala son independientes de la escala y representan con precisión un sistema más grande (Bear 2002). Para los medios porosos heterogéneos, el REV teóricamente se puede lograr a escalas intermedias entre las fluctuaciones erráticas de la región I y la heterogeneidad macroscópica de la región III donde ya no se presentan grandes fluctuaciones. Siendo difícil de graficar la región II para sistemas heterogéneos con confianza (Zhang 2000); (Baveye 2002). La magnitud de REV está especialmente vinculado al diámetro medio de grano del medio poroso; sin embargo, un REV se puede definir para cada condición de las propiedades del medio poroso o sistema de interés, (según los autores presentes en (Costanza-Robinson 2011)). Estas pueden ser: porosidad, saturación, contenido de humedad, potencial de presión o matricial, conductividad hidráulica, entre otros, las cuales serán definidos a continuación y donde su determinación en un punto dado representan promedios a lo largo de una escala de poro de un volumen elemental representativo REV asociados a dicho punto, lo cual es conocido como el modelo continuo o escala de Darcy (*Darcy scale*).

2.1.2 Porosidad

La porosidad corresponde a la estructura del espacio no ocupada por el material sólido, denominado espacio poroso. Dentro de éste se distinguen los macroporos que son encargados del drenaje, no retienen el agua gravitacional y proporcionan aireación al suelo, además de ser donde se desarrollan principalmente las raíces. También se encuentran los microporos que es donde se retiene y se encuentra disponible el agua para las raíces, denominada microporos. Dentro de una escala de poro presente en un REV pueden existir una, dos o tres fases, un ejemplo de este es el que se muestra en la Figura 3.



Figura 3 – Adaptación (Bear 1988). Esquema conceptual que representa la escala de poro presente en un REV. donde U representa el volumen total de un REV, U_a el volumen fase no liquida, U_w el volumen fase liquida y U_S el volumen total solido

De la figura 3 se desprende que el volumen total del REV se define como la suma del volumen total de solido y de poros:

$$U = U_S + U_P \tag{1}$$

Existen para este estudio una fase liquida y una no liquida, el volumen de poros U_P se define como:

$$U_P = U_a + U_w \tag{2}$$

Como lo plantea Bear(Bear 1988) en una escala de Darcy, el mismo punto puede ser ocupado simultáneamente por las distintas fases, definiendo la porosidad ϕ como (Bear 1988):

$$\phi = \frac{U_P}{U} = \frac{U_w + U_a}{U} \tag{3}$$

2.1.3 Saturación

Para cuantificar el nivel o fracción de fluido presente en el espacio de poros se define la saturación de la fase liquida y la no liquida como:

$$s_w = \frac{U_w}{U_P} \tag{4}$$

$$s_a = \frac{U_a}{U_P} \tag{5}$$

Por lo cual se puede decir que dentro del poro se debe se verificar con las ecuaciones (2), $(4) \ge (5)$ que:

$$s_w + s_a = 1 \tag{6}$$

2.1.4 Contenido de humedad

Si consideramos que la humedad es el porcentaje de fluido en la fase líquida (agua) presente en el medio poroso, en términos volumétricos al contenido de humedad θ_w , se define como el volumen ocupado por el fluido (agua) $U_w = U_{Agua}$ dividido por el volumen total U de una porción de suelo o roca:

$$\theta_w = \frac{U_{Agua}}{U} = \frac{U_{Agua}}{U_P} \cdot \frac{U_P}{U} = s_w \phi \tag{7}$$

Describiendo un perfil de humedad del medio poroso a partir de la superficie, Figura 4, que suele presentar en la zona insaturada un aumento de θ a medida que se va acercando a la zona capilar (donde la fase no liquida U_a tiende a cero), produciéndose la humedad máxima en el instante que el contenido de humedad θ es igual al volumen total de poros ϕ (fase gaseosa es cero), conocida como la humedad de saturación (θ_s) lo cual se produce cuando se alcanza la zona saturada. Esto se sustenta dado que si la ecuación (6) se multiplica por ϕ :

$$\theta_w + \theta_a = \phi \tag{8}$$

Es importante recalcar que para este estudio $\theta_w = \theta$ y θ_a es la fracción de volumen en la fase no liquida.



Figura 4 – Adaptación de (Freeze 1979). (a) Zona saturada e insaturada según la profundidad; (b) Perfiles del contenido de humedad v/s profundidad.

2.1.5 Potencial de presión o matricial

El potencial hidráulico total Ψ_t , que coexiste en un medio poroso, puede definirse como la suma del potencial gravitatorio Ψ_g , el potencial de presión Ψ_p y el potencial osmótico Ψ_o , aún cuando podrían existir teóricamente más potenciales. Para efectos de este estudio, sólo interesan los dos primeros potenciales, el de presión y el gravitatorio, ya que el osmótico es comúnmente despreciado si la salinidad presente es baja o moderada. El potencial gravitatorio del agua del suelo Ψ_q , en cualquier punto del suelo está determinado por su posición respecto de un nivel de referencia, que puede ser elegido por conveniencia y que en este caso se considera en el borde inferior. Si en dicho punto el potencial de presión del agua que se encuentra en el suelo bajo una presión hidrostática fuera mayor que la presión atmosférica, se está en presencia de un estado de saturación total, donde θ es igual a ϕ , para lo cual se adoptan valores positivos. En cambio, cuando la saturación del suelo $\theta < \phi$, el potencial de presión se vuelve menor que la presión atmosférica produciéndose una presión negativa que se conoce como tensión o succión. El potencial generado a partir de esta atracción por parte del suelo sobre el agua, es denominado potencial de presión o matricial y resulta de la acción conjunta de dos fenómenos, la capilaridad y las películas de hidratación alrededor de las partículas del suelo.

Ambos potenciales, el de presión y el de gravedad se expresan comúnmente como energía por unidad de peso o, carga hidráulica, que es la altura equivalente de una columna para una determinada presión. En este caso, la altura equivalente de una columna de agua. De esta manera los potenciales quedan expresados en unidades de longitud de la siguiente manera, ver figura 5:

$$\Psi = h + z \tag{9}$$

Considerando a Ψ como la componente del potencial total, h la componente del potencial de presión o presión de poro y z la componente del potencial gravitatorio (con sentido positivo hacia arriba, con referencia en el nivel inferior).



Figura 5 – Adaptación de (Freeze 1979). (a) Presión de poro h y potencial de presión a distintas profundidades Ψ ; (b) Perfil de presión de poro h v/s profundidad; (c) Potencial de presión Ψ v/s profundidad.

2.1.6 Conductividad hidráulica

La conductividad hidráulica (K) se define como la capacidad que un medio poroso tiene de transmitir un fluido, permitiendo el paso de él por unidad de área transversal en la dirección del flujo. Esta varía según la saturación del poro, siendo mayor a medida que la humedad presente en el suelo se acerca más a la zona de saturación, donde $\theta_s = \phi$, ya que todos los poros se encuentran llenos de un sólo fluido (agua) lo cual permite que todos tengan la misma capacidad de transmitir. En este caso la conductividad es única y se conoce como la conductividad de saturación K_s (constante de proporcionalidad de Darcy, 1856). Lo que no ocurre cuando existe aire dentro del poro, que es el responsable de muchos fenómenos que se producen en el suelo, uno de ellos es la disminución de la conductividad hidráulica al disminuir la humedad (Buckingham 1907). Lo anterior permite plantear que en la zona insaturada existe una curva de valores entre estas últimas como muestra la Figura 6. Para nuestro estudio consideraremos la humedad $\theta(h)$ en función de la presión de poro (van Genuchten 1980) y la conductividad como K(h) (Maulem 1976) como se detalla en la sección 4.2.2.

En general los suelos no son isotrópicos por lo cual la conductividad varía según la dirección, por lo cual se habla de un tensor, teniendo 9 direcciones:

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix}$$



Figura 6 – Adaptación de (Freeze 1979). Perfil de la conductividad K(h) que muestra los cambios que experimenta la conductividad al variar la presión de poro h.

2.1.7 Capilaridad de un medio poroso

El suelo representado como un medio poroso en el cual existen muchas conexiones que son capaces de actuar como tubos capilares. Esto permite que el agua ascienda debido a la tensión superficial que se provoca al ser atraída a las paredes, disminuyendo el área y aumento de la fuerza de empuje (presión=fuerza/área de contacto). Esta depende del tipo de suelo, diámetro de los poros y el estado del suelo (humedeciéndose o secándose).



Figura 7 – Adaptación (Bear 1988). Esquema que muestra el aumento de fluido humectante en el tubo capilar producto de tensión superficial σ_{aw} (cantidad de energía necesaria para aumentar su superficie por unidad de área).

La atracción que generan las paredes sobre el fluido en el ascenso provoca un menisco (formado por la curvatura), figura 7, que se forma entre el agua y el aire en la interfaz. La diferencia de presión entre los dos fluidos genera lo que se conoce como presión capilar, expresándose como:

$$\Delta P = P_c = P_a - P_w = \frac{2\sigma_{aw} \cdot \cos(\delta)}{r_c} \tag{10}$$

La ecuación anterior se sostiene suponiendo al capilar como un cilindro, r_c como el radio de este en metros y σ_{aw} como la tensión superficial de la interfaz aire-agua. La altura de subida capilar se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$H_c = \frac{1, 5 \cdot 10^{-5}}{r_c} \tag{11}$$

En suelo arcilloso estos valores máximos van de 200 a 400 cm y en uno arenoso de 100 a 150 cm desde el nivel freático (Custodio LLamas y Vilaro 1976).

2.2 Curvas características

En el proceso de modelación del flujo en el medio insaturado, la curva característica del suelo es fundamental. De esta forma se puede relacionar el contenido de humedad (θ) con la tensión matricial (h). En ella se pueden distinguir distintas regiones según el tipo de proceso que predomina, ver Figura 8.



Figura 8 – Adaptación de (Dietrich 2013). Curva de retención para un suelo hipotético. θ_r : humedad residual; θ_S : humedad de saturación; θ_{cc} : humedad correspondientes a la capacidad de campo; θ_{pmp} : humedad para el punto de marchitez permanente; h_A : Potencial de presión de entrada de aire.

Al analizar la figura 8 es importante definir que matemáticamente el máximo valor de h para el que $\frac{d\theta}{dh} = 0$ es cuando se logra h_A , esta zona comprendida entre h = 0 y $h = h_A$ es conocida como región de entrada de aire (Jury y Horton 2004), siendo esta cuestionada en materiales finos. Esto le da un carácter de parámetro empírico, siendo aproximadamente igual a la inversa de la presión de entrada (van Genucten y Nielsen 1985). La humedad de capacidad de campo θ_{cc} que se define como el valor máximo del contenido de agua del suelo observada a capacidad de campo, donde se detiene el flujo de agua a través del suelo, que tiene lugar a un valor de potencial hídrico (h_{cc}) del suelo de alrededor de -100

cm ó -0,1 bar, conocido como presión de capacidad de campo. θ_{pmp} cuando la planta ya no puede extraer agua del suelo y se marchita (considerada a una tensión (h_{pmp}) de 15000 cm o 15 bar, aún cuando este dependen del tipo suelo y planta) y por ultimo θ_r que se produce cuando $\frac{d\theta}{dh} \rightarrow 0$ y $K(\theta) \rightarrow 0$, y es considerado un valor empírico al igual que θ_s .

2.3 Ley de Darcy-Buckingham

En el siglo XIX Darcy (1856) propuso la siguiente relación empírica para el movimiento del agua a través del suelo en la zona saturada en estado estacionario: el caudal Q es directamente proporcional al producto entre el área de la sección transversal A y el gradiente de presión, ver Figura 9.



Figura 9 – Esquema del sistema experimental de Darcy, donde Ψ_A y Ψ_B son los potenciales de presión al nivel A y B

$$Q = -K \cdot A \cdot \frac{\Delta \Psi}{\Delta z} / : A$$

$$Q/A = -K \cdot \frac{\Delta \Psi}{\Delta z}$$

$$v = -K \cdot \frac{\Delta \Psi}{\Delta z},$$
(12)

donde v es la velocidad de Darcy o vector de flujo que atraviesa una unidad de área por unidad de tiempo (Jury y Horton 2004), K es la constante de proporcionalidad (que se atribuye a la conductividad hidráulica de saturación explicada en la sección 2.1.6).

Luego en 1907, Edgar Buckingham reformuló la ley de Darcy de tal modo que fuese también válida en un medio poroso parcialmente saturado de fase liquida o agua. Argumentando que si:

1. La fuerza impulsora del agua en un suelo isotérmico y no saturado, era igual a la suma del potencial de presión h y el gravitatorio z, Ecuación 9.

2. En la zona insaturada la conductividad hidráulica deja de ser única y depende de la humedad o del potencial presión K(h).

Si en la ecuación (12), $\Delta z \rightarrow 0$, aplicamos la definición de derivada en la dirección vertical y según los argumentos dados por Buckingham, la velocidad de Darcy queda formulada como:

$$v = -K(h)\frac{\partial\Psi}{\partial z} = -K(h)\frac{\partial(h+z)}{\partial z} = -K(h)\frac{\partial h}{\partial z} - K(h)$$
(13)

A esta última se la conoce como Darcy-Buckingham pero, esto es cierto en condiciones de flujo estacionario, es decir, cuando el flujo no depende del tiempo y, por ende, el potencial de presión también. Por esta razón 27 años después, incorporando este descubrimiento a la ecuación de continuidad, surgió la ecuación de Richards que será estudiada en la sección 4.1.

3 Modelos de Absorción de agua desde la raíz

Las raíces sirven como medio para conectar el agua presente en el poro con la atmósfera, al proporcionar un enlace en el camino para que los flujos de agua desde el suelo a través de la planta lleguen directamente a la atmósfera. Este movimiento del agua se realiza desde un potencial de presión mayor a uno de menor presión, lo que permite que la pérdida de agua por parte de las plantas en forma de vapor, conocido como transpiración (T) se produzca. Para que este proceso se realice es necesaria que exista la absorción de agua en la zona radicular de la planta. Esta absorción se clasifica en dos categorías las cuales se detallan a continuación.

3.1 Primera categoría: Enfoque microscópico

Este ha contribuido significativamente a la comprensión del proceso de absorción de agua por parte de las raíces realizando una mirada desde el suelo hacia la superficie y requiriendo detalles acerca de la geometría de la raíz, la heterogeneidad del suelo y la interacción física entre estos componentes que mayoritariamente no están disponibles o son difíciles de obtener. Algunos de los modelos que siguen este enfoque son: ((Gardner 1960); (Hillel et al. 1975))

3.1.1 Modelo de Gardner

El modelo de (Gardner 1960), concluyó que la absorción de agua por parte de las raíces podría aproximarse mediante una sucesión de absorciones en equilibrio dinámico, considerando a la raíz como un recipiente lineal e infinitamente largo con propiedades uniformes de absorción de agua y hacia el cual el agua se mueve en forma radial.

La solución particular para este caso, utilizando la ecuación de continuidad (39) bajo condiciones de equilibrio dinámico y conductividad hidráulica constante es:

$$q' = 2\pi K \left(\frac{\Psi_r - \Psi_0}{\ln \frac{M}{a}}\right) \tag{14}$$

donde q' es el volumen de agua absorbida por largo unitario de raíz y por unidad de tiempo $(cm^3cm^{-1}seg^{-1})$, Ψ_r es el potencial del agua en la superficie de la raíz, Ψ_0 el potencial del agua en el punto medio entre raíces vecinas, M es la distancia media entre raíces uniformemente distribuidas a una determinada profundidad (expresado como $M = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot L_v}}$ con L_v como la densidad radicular) y a es el radio de la raíz.

3.2 Segunda categoría: Enfoque macroscópico

En el enfoque macroscópico, todo el sistema es tratado como una sola unidad para resumir los efectos de todas las raíces individuales. Realizando una mirada desde la superficie hacia el suelo e incluye un término fuente S (que viene de "Source") que representa la absorción de agua por parte de las raíces (volumen de agua extraído por la vegetación por unidad de tiempo y volumen de suelo), en la ecuación de Richards (41). Dentro de los que destacan en este enfoque se encuentran: (Molz y Remson 1970); (Feddes et al. 1978); (Molz 1981); (Li et al. 1999); (Wu et al. 1999); (Vrugt et al. 2001a).

Basado en los principios básicos de la energía y la transferencia de masa, se tiende a parametrizar las propiedades de la raíz de una planta, especificando la capacidad de agua disponible de la zona radicular (Feddes et al. 2001). Este, además, tiene ventajas significativas sobre el enfoque microscópico ((Yadav y Mathur 2008); (Yadav et al. 2009); (Ojha et al. 2009)), ya que no requieren una visión completa en el proceso físico de la absorción de agua de la raíz y, por lo tanto, elimina la necesidad de los parámetros del suelo y de las plantas que son difíciles de determinar, siendo los modelos unidimensionales los más populares en comparación a otros en dos y tres dimensiones, por su simplicidad.

En este enfoque la captación de agua de raíz depende de las propiedades del suelo, las características de los cultivos y las condiciones climáticas. En términos generales, los modelos de absorción de agua de la raíz se clasifican en constante, lineal, exponencial y logarítmica ((Feddes et al. 1978); (Prasad 1984); (Ojha et al. 2009); (Li et al. 1999); (Kang et al. 2001); (Ojha et al. 2009)). (Ojha y Rai 1996) desarrollaron un modelo no lineal de la absorción de agua de la raíz, existiendo para la mayoría de estos modelos similitudes en los parámetros utilizados como la magnitud de la tasa potencial de absorción de agua por parte de las raíces, S_p , que depende de la tasa de transpiración potencial, T_p dentro de su formulación. Encontrando diferencias en la forma de plantear la distribución espacial de la absorción de agua de la raíz en la zona radicular, donde por ejemplo Feddes et al. 1978 la definió para un caso homogéneo como $\frac{1}{L_R}$, siendo L_R el largo de la raíz, ver Figura (11). La transpiración potencial está determinada por la demanda atmosférica, controlada por variables meteorológicas como: la radiación neta, la temperatura del aire, velocidad del viento y la humedad relativa, dejando de lado el entorno de la planta y el suelo. El cálculo puede obtenerse a través de fórmulas basadas en procesos o elementos empíricos, tales como la ecuación combinada Penman-Montheith recomendada por la FAO (FAO 1990) o la fórmula Hargreaves, respectivamente, la que se discutirá en la sección 3.3.

3.2.1 Modelo de Molz y Remson

Molz y Remson en 1970 estableció una función empírica, dividiendo el dominio de la raíz en cuatro secciones desde la superficie hasta la profundidad de las raíces L_R , ver figura 11, distribuyendo la absorción que hace la planta en un 40 % de la transpiración potencial total para el primer cuarto, el 30 % a partir del segundo, el 20 % a partir del tercero y el 10 % para el cuarto, obteniendo un modelo que se presenta de forma no uniforme en la distribución de la absorción de agua por parte de las raíces:

$$S = T_p \left[-\frac{1.6}{L_R^2} + \frac{1.8}{L_R} \right]$$
(15)

3.2.2 Modelo de Feddes

Feddes et al. (1978)(Simunek et al. 2013) desarrolla un modelo localmente lineal, dependiente de la presión de poro (h), para describir el término fuente S, como:

$$S(h) = \alpha(h) \cdot S_p \tag{16}$$

Incorporando una función $\alpha(h)$ para interpretar el estrés hídrico que sufre la planta, siendo $0 \le \alpha(h) \le 1$, lo que algebraicamente se define:

$$\alpha(h) = \begin{cases} \frac{h_1 - h}{h_1 - h_2} & \text{para } h_2 < h \le h_1 \\ 1 & \text{para } h_3 \le h \le h_2 \\ \frac{h - h_4}{h_3 - h_4} & \text{para } h_4 < h < h_3 \end{cases}$$
(17)

La Figura 10, brinda una representación esquemática del funcionamiento de este modelo, utilizando cuatro parámetros de presión de succión, representados por h_i con i = 1, 2, 3, 4. Donde $\alpha(h) = 0$ si $h > h_1$, es decir, el medio poroso se encuentra cercano a la saturación y la raíz no absorbe agua debido a la falta de oxígeno en la zona radicular, por lo cual h_1 es la presión en donde la raíz comienza a extraer agua del suelo. Lo mismo sucede si $h < h_4$, ya que se encuentra bajo el punto de marchitez permanente h_4 , en donde la planta no es capaz de recuperarse y muere. Entre h_2 y h_3 , $\alpha(h) = 1$, lo cual indica que la planta en este rango es capaz de extraer agua a la máxima tasa posible. Estos parámetros representan a las presiones de inicio h_2 y fin h_3 de la absorción de agua del suelo a la máxima velocidad, de modo que $S(z, h) = S_p$.



Figura 10 – Función de respuesta al estrés hidrico $\alpha(h)$, según Feddes et al, 1978.

El valor de h_3 puede variar entre h_{3H} y h_{3L} dependiendo de la demanda evaporativa de la atmósfera E y por ende, del valor de la tasa de transpiración potencial, T_p , definiendo h_{3H} y h_{3L} como el valor de la presión de poro a la cual las raíces dejan de absorber el agua a la tasa máxima, según las tasas de transpiración potenciales r_{3H} y r_{3L} . Estos valores se obtienen experimentalmente para cada tipo de raíz, permitiendo calcular h_3 por medio de la interpolación [Simunek et al., 1992] basada en las tasas de transpiración potenciales $r_{3L}=0,1$ [cm/día] y $r_{3H}=0,5$ [cm/día], que permitirá hacer de ésta una variable en función de la tasa de transpiración potencial, T_p :

$$h_{3} = \begin{cases} h_{3H} + \frac{h_{3L} - h_{3H}}{r_{3H} - r_{3L}} * (r_{3H} - T_{p}) & \text{para } r_{3L} < T_{p} < r_{3H} \\ h_{3L} & \text{para } T_{p} < r_{3L} \\ h_{3H} & \text{para } T_{p} > r_{3H} \end{cases}$$
(18)

Si la distribución de la tasa potencial de absorción de agua es uniforme en la zona de la raíz, según Feddes 1978, esta ha de ser $\frac{1}{L_R}$, con lo anterior:

$$S_p = \frac{1}{L_R} T_p \tag{19}$$

Para el caso de una distribución no uniforme de S_P :

$$S_p = b(z)T_p \tag{20}$$

Donde la función b(z) describe la variación espacial de la expresión potencial de absorción, S_p , ver Figura 11 sobre la zona de la raíz, y se obtiene mediante la normalización de cualquier función de distribución de la raíz, como sigue:

$$b(z) = \frac{b'(z)}{\int_{L_R} b'(z) \, dz}$$
(21)

Donde b(z) es la distribución de absorción de agua por la raíz normalizada, b'(z) función de distribución de la raíz.

Esta normalización tiene la ventaja de que la integral de b(z) desde la superficie hasta la profundidad L_R es igual a la unidad (Simunek et al., 2009).

$$\int_{L_R} b(z) \, dz = 1 \tag{22}$$



Figura 11 – Elaboración propia, Esquema de la función de distribución potencial de absorción de aqua, b(z), en la zona radicular del suelo.

Existiendo muchas formas de establecer b'(z), aparte de la de Feddes, Ecuación (19), como la función (Hoffman and van Genuchten, 1983):

$$b'(z) = \begin{cases} \frac{1}{1,667} & \text{para } z < L - 0, 2L_R \\ \frac{2,0833}{L_R} \left(1 + \frac{L - z}{L_R} \right) & \text{para } L - L_R \le z \le L - 0, 2L_R \\ 0 & \text{para } z < L - L_R \end{cases}$$

Donde L es la distancia desde la referencia z = 0 hasta la superficie del suelo como se puede apreciar en la Figura 11.

3.2.3 Modelo de Prasad

Prasad en 1988, desarrolló un modelo lineal que depende de la componente del potencial de presión (h), la tasa de transpiración potencial (T_p) y la profundidad de las raíces (L_R) . Incorporando el efecto del estrés al modelo:

$$S(h) = \alpha(h)S_p \tag{23}$$

Con S_p en $[t^{-1}]$ definido como:

$$S_p = T_p \frac{2}{L_R} \left(1 - \frac{z}{L_R} \right) \tag{24}$$

3.2.4 Modelo de Kang

Kang et al. (2001) establece que la relación en un momento dado entre la tasa de absorción de la raíz a una profundidad de suelo dado y la tasa potencial de absorción de agua de alta densidad de raíz, se puede expresar aproximadamente por una ecuación exponencial en términos de la transpiración potencial T_p . Suponiendo que el contenido de agua del suelo puede satisfacer plenamente la absorción de las raíces de los cultivos y su distribución en la zona de la raíz es uniforme, apreciaciones que ya habían sido planteadas por Freddes en 1978:

$$S(z,t) = f(\theta)T_p(t)\frac{e^{-1,8\frac{z}{L_R}}}{(1-e^{-1,8})L_R}$$
(25)

Donde $f(\theta)$ es un adimensional del término fuente que oscila entre 0 y 1, como una función del contenido de agua del suelo:

$$f(\theta) = \left[\frac{\theta(z,t) - \theta_{pmp}}{\theta_{cc} - \theta_{pmp}}\right]^{0,6967}$$
(26)

Considerando a $\theta(z,t)$ como el contenido de agua del suelo en un tiempo t y a una profundidad z dada y θ_{pmp} y θ_{cc} definidos en la sección 2.2.

En el presente estudio se utilizará el modelo de Feddes, por considerarse como un estándar dentro de la comunidad de agrónomos.

3.3 Transpiración

La transpiración se define como la pérdida de agua por parte de las plantas desde los estomas hacia la atmósfera. (Curtis y Schnek 2008). Esto permite el ingreso del dióxido de carbono que se utiliza en la fotosíntesis, siendo posible este proceso gracias a la absorción de agua en la zona de las raíces definiendo T_p a partir de las ecuaciones (20) y (22) como:

$$T_p = \int_{L_R} S_p \, dz \tag{27}$$

Luego sustituyendo la ecuación (20) en (16) :

$$S(h,z) = \alpha(h,z)b(z)T_p \tag{28}$$

Donde la tasa de transpiración real, T_a , es obtenida al integrar la ecuación (28)

$$T_{a} = \int_{L_{R}} S(h, z) \, dz = T_{p} \int_{L_{R}} \alpha(h, z) b(z) \, dz \tag{29}$$

En el cual al ser $\alpha(h, z) = 1$ provocará que $T_p = T_a$ pero, en el caso contrario será necesario establecer la relación entre la transpiración real y potencial de la absorción de la raíz sin compensación como:

$$\frac{T_a}{T_p} = \frac{1}{T_p} \int_{L_R} S(h, z) \, dz = \int_{L_R} \alpha(h, z) b(z) \, dz = \omega \tag{30}$$

Donde ω es un índice adimensional del estrés de agua [Jarvis, 1989], el cual introduce el valor critico del índice de estrés del agua ω_c o también llamado factor de adaptabilidad de la raíz, representando un valor umbral por encima del cual la absorción de agua por parte de las raíces estresadas de la zona de la raíz está totalmente compensada por la absorción de otras partes, menos estresadas. Por debajo de este valor crítico, hay una cierta reducción de la transpiración potencial, aunque menor que en la absorción de agua no compensada de la raíz, ver figura 12.



Figura 12 – Adaptación de Jarvis, 1989 (Jarvis 1989). Relación entre la transpiración real y potencial como una función del índice de estrés ω (donde la flecha de la izquierda es para compensar la absorción, mientras que el eje de la derecha es para la absorción no compensada).

Por lo tanto si $\omega_c = 1$ no habrá compensación y $T_a < T_p$. De no ser así ($\omega_c < 1$) se incorpora la tasa de transpiración compensada T_{ac} y habrá dos instancias:

Si $\omega > \omega_c$ considerando que la relación entre la transpiración real compensada y potencial, se puede expresar como $T_{ac} = \frac{T_a}{\omega}$, e incorporando la ecuación (30), entonces:

$$\frac{T_{ac}}{T_p} = \frac{T_a}{\omega T_p} = \frac{\int_{L_R} \alpha(h, z) b(z) \, dz}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} = 1$$

De lo anterior se concluye que $T_{ac} = T_p$, surgiendo una absorción de agua por parte de las raíces compensada S_c :

$$S_c(h,z) = \alpha(h,z)b(z)\frac{T_p}{\omega}$$
(31)

De ocurrir que $\omega < \omega_c$ la relación entre la transpiración real compensada y potencial es menor que 1, expresándose como $T_{ac} = \frac{T_a}{w_c}$

$$\frac{T_{ac}}{T_p} = \frac{T_a}{\omega_c T_p} = \frac{\int_{L_R} \alpha(h, z) b(z) \, dz}{\omega_c} = \frac{\omega}{\omega_c} < 1$$

Concluyendo ahora que $T_{ac} < T_p$, y S_c :

$$S(h,z) = \alpha(h,z)b(z)\frac{T_p}{\omega_c}$$
(32)

3.4 Raíz del Arándano

El arándano o blueberry (Vaccinium corymbosum L.) es un arbusto frutal de hoja caduca (Jorge Valenzuela, 1988 (Valenzuela 1988)) (hoja que en otoño pierde su color, se marchita y cae al suelo) que alcanza una altura de 1.5 a 2.5 [m], de flores de color blancas o rosadas y el fruto es una baya esférica de tamaños que varían entre 1 a 2 [cm] de diámetro. La raíz del arándano es superficial, fibrosa y de poca extensión, está desprovista de pelos radicales, de modo que son las raíces jóvenes las que efectúan principalmente la labor de absorción. Éstas tienen un diámetro de hasta 75 micrones y contienen hasta tres corridas de células epidérmicas, aunque la mayoría de ellas poseen sólo una corrida. Son estas células epidérmicas las que bajo condiciones naturales se encuentran invadidas por hongos micorríticos, con los cuales esta especie está comunmente asociada a través de procesos simbióticos (Dinamarca 2005).

En la experimentación computacional que se realizará en la sección 5, se ha seleccionado el arándano dado la alta presencia del arbusto en la región de la Araucanía y su rentabilidad. Sobre el cual se realizan las siguientes apreciaciones: *la distribución del agua dentro del* suelo tiene un efecto importante en la producción, de modo que el riego es un factor a considerar dentro del manejo del cultivo, principalmente por el sistema radical superficial de esta especie (Hamil Uribe, 2013 (Undurraga 2013)). Otro es el estrés por la falta de oxigenación producto de un deficiente drenaje lo que podría provocar manchas en el fruto y otros efectos adversos para la exportación del fruto. De aquí es que surge la pregunta de qué sucederá con el estrés producto de la saturación del suelo, al momento del riego y los efectos en la producción al eliminar o reducir este.

3.5 Consideraciones para la experimentación computacional

Para este estudio se asume:

- 1. Un medio poroso que tiene características físicas uniformes en toda su extensión y sus propiedades hidrogeológicas dependen de la dirección considerada (Acuífero homogéneo y anisotrópico).
- 2. No hay presencia de acuitardo ni acuífugo. El primero es una unidad que permite el almacenamiento de agua, pero que tiene una limitada capacidad para transmitirla, no favoreciendo la asborción de agua por las raíces. El segundo es completamente descartable para el estudio ya que tiene una baja capacidad de almacenamiento de agua y prácticamente nula transmisión.
- 3. Entre los suelos recomendados para el arándano se encuentran la arcilla y el franco arenoso, ya que es necesario terrenos sueltos y de buen drenaje (Undurraga, 2013 (Undurraga 2013)).
- 4. Estudios recientes, muestran incrementos de hasta el 43 % en el rendimiento de arándano, con la aplicación de riego. Dado la importancia en la que tiene el agua estudiaremos un estado de sequía del suelo con la intensión de responder a dos preguntas fundamentales que son ¿Cuándo regar?¿Cuánto regar?
- 5. El Modelo hídrico a utilizar es: van Genuchten Mualem (porosidad simple), el cual será definido en la sección 4.2.2 .
- 6. Sin histeresis, por lo cual no se considerará el efecto que tiene el cambio de la zona insaturada a la saturada dado por el aire atrapado dentro del poro a la presión de saturación ψ_s , ver Figura 13.
- 7. No existe compensación de las raíces por lo cual el valor crítico del índice de estrés del agua $w_c = 1$ y el modelo de absorción de agua desde la raíz es el de Feddes et al. 1978 (sección 3.2.2).



Figura 13 – Adaptación, (Freeze 1979)

Algunos términos adicionales, recurrentes a lo largo de este trabajo, merecen un pequeño tratamiento. Se entiende por *infiltración* al proceso por el cual el agua penetra en el suelo y ocupa total o parcialmente los poros del mismo y/o las formaciones geológicas subyacentes. En cambio, el término *recarga*, hace alusión al agua de infiltración que efectivamente alcanza la superficie freática (Custodio y Llamas, 1976). También, es frecuente el uso del término *drenaje* que, a criterio de Scanlon et al. (1997), debiera restringirse al agua de infiltración que ha superado la zona afectada por evapotranspiración pero que no ha alcanzado la superficie freática, es decir, que se encuentra en tránsito hacia el acuífero.

Para obtener respuestas de los modelos numéricos planteados han surgido una gran variedad de software que permiten modelar desde problemas sencillos, como la evolución de plumas bidimensionales en condiciones ideales, hasta complejos problemas tridimensionales que se resuelven acoplados para flujo y transporte. De acuerdo a su método numérico de aproximación es posible clasificar la mayoría de estos software numéricos en dos grandes grupos: aquellos que basan sus cálculos en el método de diferencias finitas (por ejemplo, Visual Modflow y Groundwater Vistas) y aquellos que se fundamentan en el método de elementos finitos (por ejemplo, Feflow o Hydrus 1D) siendo ambos grupos de modelos aplicables a varios tipos de casos prácticos. Cabe recalcar que un modelo numérico está fundamentado en el desarrollo de un modelo conceptual, el cual corresponde a una simplificación del sistema acuífero real, pero que retiene sus aspectos más relevantes.

4 Materiales y métodos

En esta sección se presenta la ecuación de Richards en sus distintas formas, como modelo matemático. Tambien se muestra la relación entre la ecuación de Richards y las curvas características.

4.1 Ecuación de Richards

Consideremos un volumen de control como el que se muestra en la figura 14 de dimensiones Δx , Δy y Δz , mientras que su centro de masa G se encuentra ubicado en las coordenadas (x, y, z) con un flujo vertical (z), como indica la figura 14.



Figura 14 – Volumen de control para un flujo vertical

Realizando el balance de masa :

$$\begin{cases} \text{velocidad de} \\ \text{acumulación} \\ \text{de masa (A)} \end{cases} + \begin{cases} \text{absorción} \\ \text{de la} \\ \text{raíz (T)} \end{cases} = \begin{cases} \text{velocidad} \\ \text{de entrada} \\ \text{de masa} \end{cases} - \begin{cases} \text{velocidad} \\ \text{de salida} \\ \text{de masa} \end{cases}$$
(33)

En donde la velocidad de la matería se define como el flujo de mas
a $J = \rho_{H_2O} \cdot v$, con v como la velocidad de Darcy
y ρ_{H_2O} la densidad del agua.

Considerando que la acomulación A es:

$$A = \rho_{H_2O} \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \tag{34}$$

La ecuación del balance de masa queda:

$$\frac{\Delta(\rho_{H_2O}\theta)}{\Delta t}\Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\Delta(\rho_{H_2O}T)}{\Delta t}\Delta x \Delta y \Delta z = \left(J_{z|x,y,z} - J_{z|x,y,z+\Delta z}\right)\Delta x \Delta y \tag{35}$$

Dividiendo la ecuación (35) por $\cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$
$$\frac{\Delta(\rho_{H_2O}\theta)}{\Delta t} + \frac{\Delta(\rho_{H_2O}T)}{\Delta t} = \frac{J_{z|x,y,z} - J_{z|x,y,z+\Delta z}}{\Delta z}$$

Si a la parte izquierda se le aplica el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ y a la parte derecha el límite , $\Delta z \longrightarrow 0$ y aplicando la definición de derivada.

$$\frac{\partial(\rho_{H_2O}\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{H_2O}T)}{\partial t} = -\frac{\partial J_z}{\partial z}$$
(36)

Sustituyendo $J = \rho_{H_2O} \cdot v$ en el primer término del lado derecho se puede expresar como:

$$\nabla J = \nabla(\rho_{H_2O}v) = \nabla(\rho_{H_2O})v + \rho_{H_2O}\nabla v$$

Dado que el agua es un fluido incompresible ρ_{H_2O} es constante, y $\nabla(\rho_{H_2O})v = 0$:

$$\nabla J = \rho_{H_2O} \nabla v \tag{37}$$

de la misma forma se tiene que:

$$\frac{\partial(\rho_{H_2O}\theta)}{\partial t} = \frac{\partial\rho_{H_2O}}{\partial t} \theta + \rho_{H_2O} \frac{\partial\theta}{\partial t} = \rho_{H_2O} \frac{\partial\theta}{\partial t}$$
(38)

A partir de la ecuación (36) y reemplazando las ecuaciones (37) y (38):

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{39}$$

Con v_z como la componente de la velocidad de Darcy-Buckingham en z y reemplazando la ecuación (13) en la ecuación de continuidad (39) y $S = \frac{\partial T}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[-K(h) \left(\frac{\partial (h+z)}{\partial z} \right) \right] - S$$

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] - S$$
(40)

El resultado es la ecuación de Richards, en honor a quien la derivó por primera vez, y permite describir la variación de la humedad durante un flujo de carácter transitorio (Kutílek y Nielsen, 1994). Al utilizar la regla de la cadena $\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(h)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}$ surge otra forma alternativa de la ecuación de Richards:

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] - S \tag{41}$$

Donde $C(h) = \frac{\partial \theta(h)}{\partial h}$ se conoce como la capacidad capilar de un suelo y que sustituyendo en la ecuación (41):

$$C(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] - S \tag{42}$$

La ecuación de Richards ha sido extensamente estudiada desde el punto de vista matemático. En este sentido dos referencias obligadas en donde se estudia la existencia y unicidad de soluciones débiles de esta ecuación están dadas en (H.W. 1983) y (Otto 1996).

4.2 Las propiedades hidráulicas del suelo insaturado

Para resolver la ecuación de Richards es necesario especificar las funciones características del suelo, como lo son el contenido de humedad $\theta(h)$ y la conductividad hidráulica k(h), en términos del potencial de presión h, las cuales pueden ser obtenidas de forma experimental o por medio de formas algebraicas que facilitan la solución numérica tales como, Brooks and Corey [1964] y van Genuchten - Mualem [1980] los cuales se definen a continuación.

4.2.1 Brooks and Corey [1964]

Esta parametrización describe bien los suelos de textura gruesa con distribuciones estrechas de tamaño de grano y de poros, pero tiene problemas en la región de saturación de la curva de retención, lo que se acentúa en suelos de textura fina. A partir del modelo:

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r) |\alpha h|)^{-\lambda} & h < -\frac{1}{\alpha} \\ \theta_s & h \ge -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$
(43)

$$K(\theta) = \begin{cases} K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^{\frac{2}{\lambda} + l + 2} & h < -\frac{1}{\alpha} \\ K_s & h \ge -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$
(44)

considerando α , un parámetro empírico, cuyo inverso a menudo se define como la presión de entrada de aire, λ es el índice de distribución del tamaño de los poros que afecta la pendiente de la función de retención, θ_r y θ_s son la humedad residual y de saturación ya definidos en la sección 2.2.

4.2.2 van Genuchten - Mualem [1980]

Los problemas anteriormente señalados en el modelo de Brooks and Corey [1964], no se presentan en el modelo de van Genuchten-Mualem. Se observa una transición suave entre la zona saturada e insaturada a través de este modelo:

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha|h|)^n]^m} & h < 0\\ \theta_s & h \ge 0 \end{cases}$$
(45)

$$K(\theta(h)) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^l \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right)^2,\tag{46}$$

donde θ_r , θ_s , α son los mismos parámetros utilizados en la parametrizaicón de Brooks and Corey [1964]. n se relaciona con la distribución de tamaños de poro del suelo y el parámetro m con la simetría del modelo [-], K_s es la conductividad hidráulica saturada [cm/días] y l es el parámetro de conectividad de poros [-]. Interpretando a m = 1 - 1/n, n > 1.

4.3 Modelo Matemático

El modelo matemático en una dimensión (1D) a considerar en este trabajo está dado por:

1. Ecuación de Richards (41):

$$\frac{\partial\theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta(h)) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] - S(z,h) \tag{47}$$

Para $z \in]0, L[y \ t \in]0, T]$

2. Condición inicial:

$$h(z,t) = h_i(z) = -100$$
 $t = 0$ (48)

Con $h_i(z)$ = Presión de capacidad de campo (h_{cc})

3. Condiciones de contorno para z = 0 y z = L:

$$-K(h) = q_n \quad en \ z = 0$$

$$h(z,t) = h_r(t) \quad en \ z = L \ (riego)$$

$$-K \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1\right) = q \quad en \ z = L \ (no \ riego),$$
(49)

donde q es el flux producto de la infiltración neta dada por, q_0 o la evapotranspiración (transpiración más evaporación). Con q_0 como la tasa de infiltración neta, que corresponde a la diferencia entre lo que se infiltra (riego) y la evapotranspiración, y q_n que corresponde al flux que se alcanza en z = 0 según la conductividad que depende de h, producto del drenaje libre que se asume como condición de contorno.

4.4 Esquema numérico

El esquema numérico esta dado por la ecuación de Richards (41) que tiene como incógnita h. Esta ecuación es altamente no lineal, no existiendo una solución analítica que represente totalmente al fenómeno analizar . Es por esta razón que se utilizara el código Hydrus, que utiliza el método de elementos finitos para 1D, 2D, 3D pero, en el caso 1D coincide con un esquema de diferencias finitas. Esquema completamente implícito en el tiempo, centrado en el espacio y la derivada temporal se discretiza según Celia et al. (1990). El sistema algebraico no lineal se resuelve vía método de Picard.

4.4.1 Discretización espacial

Para realizar la discretización espacial en una dimensión en la dirección z (se dirige positivo hacia arriba). El perfil del suelo se discretiza primero en elementos N-1 adyacentes, con los extremos de los elementos situados en los puntos nodales, y siendo N el número de nodos. En el dominio $z \in]0, L]$, con nodos centrales de cada elemento a desarrollar. Considerando la partición en el espacio $0 = z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z = L$ y en el tiempo $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t$:



Figura 15 – Dominio $z \in [0, L[$. Los nodos se distancian a 1 cm, los cuales forman los elementos a desarrollar. Este valor se asume constante en el dominio.

Un esquema lineal de elementos finitos en masa agrupado se utilizó para la discretización de la ecuación (41). Dado que los resultados del esquema en serie agrupados en diferencias finitas es equivalente a el metodo de elementos finitos en 1D. La discretización en diferencias finitas queda presentada:

$$\frac{\theta_{i}^{j+1,k+1} - \theta_{i}^{j}}{\triangle t} = \frac{1}{\triangle z} \left[\left(K_{i+\frac{1}{2}}^{j+1,k} \frac{h_{i+1}^{j+1,k+1} - h_{i}^{j+1,k+1}}{\triangle z_{i}} - K_{i-\frac{1}{2}}^{j+1,k} \frac{h_{i}^{j+1,k+1} - h_{i-1}^{j+1,k+1}}{\triangle z_{i-1}} \right) \right] + \frac{1}{\triangle z} \left[\frac{K_{i+\frac{1}{2}}^{j+1,k} - K_{i-\frac{1}{2}}^{j+1,k}}{\triangle z}}{\triangle z} \right] - S_{i}^{j}$$
(50)

Donde:

$$\Delta t = t^{j+1} - t^j$$

$$\Delta z = \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2} \quad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i \quad \Delta z_{i-1} = z_i - z_{i-1}$$

$$K_{i+\frac{1}{2}}^{j+1,k} = \frac{K_{i+1}^{j+1,k} - K_i^{j+1,k}}{2} \quad K_{i-\frac{1}{2}}^{j+1,k} = \frac{K_i^{j+1,k} - K_{i-1}^{j+1,k}}{2}$$

En la que los subíndices i-1, i, y i + 1 indican la posición en la malla de diferencias finitas; superíndices k y k + 1 denotan los niveles de iteración anterior y actual, respectivamente; y superíndices j y j + 1 representan los niveles de tiempo anteriores y actuales, respectivamente. La ecuación (50) se basa en una discretización totalmente implícita de la derivada en el tiempo, y se resolverá con un esquema de solución iterativa Picard. Observe también que el término fuente, S, es evaluado en el nivel de tiempo anterior.

4.4.2 Discretización temporal

El método conservación de masa propuesto por Celia et al. [1990], en el que $\theta^{j+1,k+1}$ se expande en una serie de Taylor truncada con respecto a h sobre el punto $h^{j+1,k}$, se utiliza en el esquema de diferencia de tiempo de expansión (50).

$$\frac{\theta_i^{j+1,k+1} - \theta_i^j}{\triangle t} = C_i^{j+1,k} \frac{h_{i+1}^{j+1,k+1} - h_i^{j+1,k}}{\triangle t} + \frac{\theta_i^{j+1,k} - \theta_i^j}{\triangle t}$$
(51)

donde C_i representa el valor nodal de la capacidad de agua del suelo (capacidad capilar) $[L^{-1}]$:

$$C_i^{j+1,k} = \left. \frac{d\theta}{dh} \right|^{j+1,k} \tag{52}$$

4.4.3 Discretización del término fuente S

Considerando la zona de la raíz como a todos los nodos, n, para el que la distribución potencial de absorción de agua de la raíz (19), b(z)>0, se supone que la tasa de extracción de agua de la raíz variará linealmente sobre cada elemento. Los valores de la tasa de extracción real de la raíz S_i en (50) se evalúan con (16). Calculando la tasa total de transpiración por medio de:

$$T_a = \sum_e \Delta z \frac{S_i^j + S_{i+1}^j}{2} \tag{53}$$

En el que la suma se lleva a cabo sobre todos los elementos dentro de la zona de las raíces, y donde S_i^j y S_{i+1}^j son las tasas de absorción de agua de la raíz evaluados en los nodos del elemento e.

4.4.4 Solución numérica

Este método ha mostrado minimizar el error de balance de masa. Cabe recalcar que el segundo término de la derecha de la ecuación (51) se conoce antes de la iteración actual. El primer término en el lado derecho de (51) debe desaparecer al final del proceso de iteración si la solución numérica converge, con lo cual se llega a una ecuación matricial, con la matriz $[P_w]$ y los vectores h y F_w :

$$[P_w]^{j+1,k} \{h\}^{j+1,k+1} = \{F_w\}$$
(54)

donde los superíndice j y k hacen referencia a los intervalos de tiempo y al nivel de iteración, respectivamente. La matriz simétrica $[P_w]$ tiene la forma:

$$[P_w] = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ e_1 & d_2 & e_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & d_3 & e_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e_{N-3} & d_{N-2} & e_{N-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e_{N-2} & d_{N-1} & e_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e_{N-1} & d_N \end{pmatrix}$$
(55)

donde las entradas de la diagonal d_i y entradas por encima de la diagonal e_i de la matriz $[P_w]$, y la f_i entradas de vector $\{F_w\}$, están dadas por:

$$d_{i} = \frac{\Delta z}{\Delta t} C_{i}^{j+1,k} + \frac{K_{i+1}^{j+1,k} + K_{i}^{j+1,k}}{2\Delta z_{i}} + \frac{K_{i}^{j+1,k} + K_{i-1}^{j+1,k}}{2\Delta z_{i-1}}$$
(56)

$$e_i = -\frac{K_i^{j+1,k} + K_{i+1}^{j+1,k}}{2\triangle z_i}$$
(57)

Siendo C_i la capacidad hidráulica Ecuación (56). En tanto, los elementos del vector F_w quedan expresados como:

$$f_{i} = \frac{\Delta z}{\Delta t} C_{i}^{j+1,k} h_{i}^{j+1,k} - \frac{\Delta z}{\Delta t} (\theta_{i}^{j+1,k} - \theta_{i}^{j}) + \frac{K_{i+1}^{j+1,k} + K_{i-1}^{j+1,k}}{2} - S_{i}^{j} \Delta z$$
(58)

Aquí, el subíndice i indica la posición del elemento finito en la malla unidimensional (Šimůnek et al. 2013).

4.5 Proceso iterativo

Debido a la naturaleza de las ecuaciones no lineales utilizadas se emplea un proceso iterativo para obtener las soluciones de la ecuación de la matriz global en cada nuevo paso de tiempo. El proceso utilizado es la eliminación de Gauss el cual aprovecha las características de la matriz, tridiagonal y simétrica, lo soluciona para el primer tiempo y después con esta revalúa las nuevas ecuaciones y soluciona nuevamente, hasta obtener un resultado satisfactorio u obtener una convergencia.

4.6 Control de tiempo

El software introduce tres diferentes discretizaciones de tiempo la primera se encuentra asociada con la solución numérica, la segunda está asociada con la implementación de las condiciones de contorno y la tercera es aquella que proporciona la impresión de los resultados de la simulación.

† Las dos últimas discretizaciones son mutuamente independientes, estas generalmente involucran los pasos de tiempo descritos a la entrada del los datos. La primera inicia con el incremento preinscrito inicialmente (Δt). Este incremento es ajustado automáticamente siguiendo las siguientes reglas:

† La primera discretización debe coincidir con los valores de tiempo resultantes de la segunda y tercera discretización.

† Si durante un paso de tiempo, el número de iteraciones para alcanzar la convergencia es \leq 3 el incremento de tiempo para la próxima iteración se multiplicará por una constante predeterminada, entre 1 y 1.5. Si el número de iteraciones es mayor o igual a \geq 7, el

incremento de tiempo para el próximo paso se multiplicará por una constante entre 0,3 y 0,9.

† Si durante un paso de tiempo particular, el número de iteraciones en cualquier nivel de tiempo, llega a ser mayor que el máximo preestablecido, entre 10 y 50, el proceso iterativo para este nivel de tiempo es terminado, en el paso de tiempo subsecuente es dividido el Δt en 3 y reinicia el proceso de iteración.

4.7 Condiciones iniciales y de Borde

La solución de la ecuación (1) requiere el conocimiento de la distribución inicial de la carga de presión dentro del dominio de flujo (condición inicial):

$$h(z,t) = h_i(z) \qquad t = t_0 \tag{59}$$

donde h_i [L] es una función prescrita de z, y es el momento en que comienza la simulación.

Como condición de Borde, hydrus soporta dos tipos, las independientes y las dependientes del sistema, entendiéndose por sistema el objeto de estudio. En las primeras, las condiciones de contorno especificadas, como pueden ser los potenciales hidráulicos, el contenido de agua o el gradiente, no dependen del estado del sistema suelo.

Las siguientes condiciones de contorno independiente, se debe especificar en la superficie del suelo (z = L) o en la parte inferior del perfil del suelo (z = 0):

$$h(z,t) = h_0(t) \quad \text{en } z=0 \text{ ó } z=L$$

-K $\left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1\right) = q_0(t) \quad \text{en } z=0 \text{ ó } z=L$
 $\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z=0$ (60)

Por el contrario, en las condiciones dependientes del sistema, los flujos, los gradientes o los potenciales surgen de la interacción del suelo con su entorno. Un ejemplo es la interface suelo – atmósfera. Los flujos potenciales (i.e., los flujos máximos) están controlados exclusivamente por las condiciones atmosféricas como, por ejemplo, la evapotranspiración potencial de cultivo de referencia, pero los flujos reales sí dependen del estado de humedad del suelo (Radcliffe y Šimůnek 2010). Si se elige como condición de contorno un nivel fijo, es decir, se fija el potencial hidráulico, la condición de contorno se denomina Dirichlet. En este caso, los términos d_1 ó d_n se hacen igual a la unidad y los términos e_1 ó e_{N-1} iguales a cero. Por su parte, f_1 ó f_n se igualan al valor de h ingresado h_0 . Para la condición de contorno donde se fija el flujo, también conocida como condición de contorno de Neuman, las entradas individuales se obtienen discretizando la ley de Darcy

$$q = -K\frac{\partial h}{\partial z} - K \tag{61}$$

de modo que d_1 obtiene el siguiente valor:

$$d_1 = \frac{K_1^{j+1,k} + K_2^{j+1,k}}{2\triangle z_i} \tag{62}$$

y f_1 en [Pw] alcanzan los valores

$$f_1 = \frac{K_1^{j+1,k} + K_2^{j+1,k}}{2} + q_0^{j+1}$$
(63)

En la ecuación (63), q_0 es la condición de contorno prescrita en el límite inferior del suelo (z = 0) y e_1 viene dado por la ecuación (57).

Para los casos en que se elige una condición de contorno dependiente del sistema, en donde se ingresan como datos las condiciones atmosféricas, los flujos o los potenciales hidráulicos son simulados como si fuesen una condición de contorno tipo Neuman o Dirichlet, pero limitando el valor absoluto de la solución:

$$\left|-K\frac{\partial h}{\partial z}-K\right| \le E \quad \text{en } z=L$$

$$(64)$$

donde E es la tasa de evapotranspiración o infiltración potencial. Si se obtienen cálculos mayores a este valor, la solución adopta el valor de E y se continúa el proceso (Simunek et al., 2009).

5 Resultados

En esta sección se dan a conocer los resultados de la simulación computacional basado en el modelo matemático propuesto para la raíz del arándano con el objetivo de mostrar la solución del modelo de la ecuación (41), tanto de la presión de poro h(z,t), la humedad $\theta(z,t)$ y la conductividad K(z,t), tanto espacial, como en términos de la profundidad z y la evolución de los nodos 2, 5, 15, 31, 41 y 60 del modelo, en el tiempo. Ademas de determinar los parámetros adecuados para el riego y que estos no provoquen estrés a la planta por falta de oxigenación en las raíces o alcanzar la presión de succión h_3 , explicada en la sección 3.2.2. Se realizan variaciones de parámetros de tasas de riego T_{ri} y tiempo de riego t_r determinando la presión superficial hTop, la presión en la zona de la raíz hRoot y al flujo vRoot, que corresponde a la tasa de transpiración real T_a , explicada en la sección 3.

5.1 Simulación computacional

Dos de las más comunes preguntas que se plantean a la hora de regar son: ¿Cuándo hacerlo? y ¿Cuánto se debe regar?. Con la presente simulación se pretende simular el flujo de agua en un medio poroso insaturado y ver los efectos de la absorción de agua por parte de las raíces. Encontrando la cantidad de irrigación T_r dada una tasa de riego T_{ri} y un tiempo de riego T_{riego} optimas. Comparando las tasas de transpiración real de la planta y la potencial. Determinando una tasa y un tiempo de riego que permita que $T_a \sim T_p$. Con esto se busca que la tasa de transpiración real que experimenta la planta T_a , obtenida por hydrus a través de la ecuación (29), sea igual o cercana al potencial de transpiración meteorológica cercana al lugar de estudio. La finalidad de lo anterior es determinar condiciones que no generen estrés hídrico a la planta, optimizando así la absorción de agua por parte de las raíces y la calidad de los frutos. En este caso se ha elegido el arándano porque es muy sensible a la aparición del estrés hídrico.

La simulación se realiza en hydrus 1D y en el se incorporan las magnitudes de físicas, mencionadas en la sección 2.

Las consideraciones que se tendrán para los dos modelos son los que se mencionan a continuación en cada tabla:

En la tabla 1 se establecen las condiciones de borde que se utilizaron en los dos experimentos en un período de tiempo en donde la sequedad se hace presente a través de una precipitación P igual a cero. La presentación de las magnitudes físicas $E \ge T_p$ que fueron explicadas en la sección 3.

Tabla 1: Condiciones de borde					
t [día]	P [cm/día]	E [cm/día]	$T_p.[cm/día]$		
30	0	$0,\!3$	$0,\!15$		

De manera de visualizar los estados de absorción de agua por parte de la raíz, en la tabla 2, se muestran los parámetros que fueron explicados en la sección 3.2.2. Las presiones de

absorción, que son obtenidos de la literatura Hydrus y h_3 ; este ultimo fue calculado por la ecuación (18).

Tabla 2:	Parámet	ros de ab	sorción de agua por parte de la raíz
h_1 [cm]	$h_2[\mathrm{cm}]$	$h_3[\mathrm{cm}]$	$h_4[m cm]$
-10	-25	-762,5	-15000

Fuente: (Feddes et al. 1978), utilizados por Hydrus

La figura 16 muestra la discretización del modelo en 101 nodos y 100 elemento finitos.



Figura 16 – Adaptación de hydrus 1D, (a) Posición de los nodos de observación. Extrayendo información sobre la presión de poro h, humedad y conductividad en los nodos 2, 5, 15, 31, 41 y 60 (puntos rojos) una vez terminada la simulación. (b) Distribución de la zona de raíz, con $L_R = 30[\text{cm}]$ desde el nodo 2 hasta el 31.

De manera de mostrar la estabilidad de los resultado que presenta el modelo, a modo de ejemplo para un suelo franco arenoso a una tasa de riego de 10 [cm/dia] (simulación 2), se presentan en las figuras 17, 18, 19 y 20 la información del tiempo de ejecución al variar el número de nodos y el tamaño de paso temporal dt:



Figura 17 – Adaptación de hydrus 1D. Para una discretización de 51 nodos y un paso (dt) mínimo del tiempo de $1E^{-0,005}$ y máximo de 5 días. Donde (a) muestra el tamaño de paso dt en el dominio de]0,30[para lograr convergencia, (b) el número de iteraciones necesarias para lograr convergencia en el tiempo y (c) la acumulación de las itercaiones en el tiempo.



Figura 18 – Adaptación de hydrus 1D para una discretización de 101 nodos y un paso (dt) mínimo del tiempo de $1E^{-0,005}$ y máximo de 5 días. (d) Muestra el tamaño de paso dt en el dominio de]0,30[para lograr convergencia. (e) El número de iteraciones necesarias para lograr convergencia en el tiempo. (f) La acumulación de las itercaiones en el tiempo.



Figura 19 – Adaptación de hydrus 1D para una discretización de 1001 nodos y un paso (dt) mínimo del tiempo de $1E^{-0,005}$ y máximo de 5 días. (g) Muestra el tamaño de paso dt en el dominio de]0,30[para lograr convergencia. (h) El número de iteraciones necesarias para lograr convergencia en el tiempo. (i) La acumulación de las itercaiones en el tiempo.



Figura 20 – Adaptación de hydrus 1D para una discretización de 1001 nodos y un paso (dt) mínimo del tiempo de $1E^{-0,005}$ y máximo de 1 días. (j) Muestra el tamaño de paso dt en el dominio de]0,30[para lograr convergencia. (q) El número de iteraciones necesarias para lograr convergencia en el tiempo. (l) La acumulación de las itercaiones en el tiempo.

Es importante señalar que los tiempos de ejecución para las discretizaciones mostradas en las figuras 17, 18, 19 y 20 no superan los 5 segundos y que el incremento de las iteración en el modelo se producen en los tiempos de riego lo cual se debe a las variaciones de humedad producto de la infiltración, ver figura 33 curva representada por la tasa 10 [cm/día].

5.1.1 Simulación 1: Suelo arcilloso

En el siguiente experimento se determina la solución del modelo conceptual, ecuación (41). Como condición inicial se plantea una presión uniforme h_{cc} en todo el dominio]0, L[, en un suelo arcilloso, como se muestran en la tabla 3:

	Tabla 3: Co	ndiciones iniciales		
Material	Presión inicial [cm]	Modelo hidráulico	$z [\mathrm{cm}]$	t [días]
Arcilla	-100	Porosidad simple	[0, 100]	[0, 30]

Como se dio a conocer en la sección 4.2, para resolver el modelo matemático (ecuación de Richards (41)) es necesario utilizar las funciones características de cada suelo. En la tabla 4 se establecen los parámetros necesarios para utilizar el modelo de van Genuchten.

Tabla 4: Parámetros de flujo (van Genuchten) K_s [cm/día]n [-]l [-] θ_r [-] θ_s [-] α 4,81,090,50,0680,380,008Datos extraídos de la librería de Hydrus 1D

La tabla 5 muestra los valores de los parámetros que afectan la activación del riego; presión de riego h_r , tasa de riego T_{ri} y el tiempo de riego t_{riego} .

Tabla 5: Activación de riego					
N° Nodos	$h_r [\mathrm{cm}]$	$T_{ri} [\mathrm{cm/dia}]$	t_{riego} [día]	t_r [día]	
1	100, 200 y 300	$1, 3 \ge 5$	0,1; 0,21 y 0,5	0	
t_r = tiempo de retardo y es igual a cero en este estudio ya que se comienza regando en t = 0					

Para determinar la presión de activación adecuada, se utilizó en la simulación como referencia la presión de capacidad de campo h_{cc} . Que dependiendo del tipo de suelo varía entre -300, -200 y -100 [cm]. Por esta razón en la figura 21 se muestra la tasa de transpiración real que se alcanza a una presión de activación $h_r = -100$ [cm]. Con tasas de riego $T_{ri} =$ 1,3,5 [cm/días] y durante un tiempo de dos horas y media ($t_{riego} = 0, 1$ [días]).



Figura 21 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Tasa real para una presión de activación $h_r = -100 \ [cm], T_{ri} = 1, 3, 5 \ [cm/días] a un t = 0, 1 \ [días]$

Para la arcilla, como se muestra en la figura 21. Se simulo primero con $h_r = -100 \ [cm]$ a una tasas de 5 [cm/día], reduciendo la transpiración en un 50 %, por falta de oxigenación (estrés hídrico producto de una presión de poro $h_2 < h < h_1$, modelo de Feddes 1978), en el tiempo de riego t_{riego} . Desapareciendo el estrés a una tasa de 0,5 [cm/días] pero, demandando un número muy elevado de riegos (más de dos riegos diarios). Como se puede apreciar en la tabla 6:

Tabla 6: Número	o de riegos y	estres hie	drico con h_r	$= -100 \ [cm]$
Tasa $T_{ri} [cm/dia]$	$t_{riego} \left[dia \right]$	$T_r \ [cm]$	N° Riegos	Estrés hídrico
$0,\!5$	0,1	$0,\!05$	62	No
1	0,1	0,1	45	Si
3	0,1	0,3	21	Si
5	$0,\!1$	0,5	17	Si
$T_r = can$	ntidad de irrigación	en cada riego, a	londe $T_r = T_{ri} \cdot t_{ri}$	eao

100 [

En la tabla 6, el estrés se produce durante los momentos de riego, por la falta de oxigenación. Evidenciando una saturación parcial dentro de la zona radicular. Dada la cantidad de irrigación en cada riego T_r es posible aproximar la cantidad de agua diaria necesaria por la planta $T_{rd} = 1,03 \ [cm/día] \ (T_{rd} = \frac{T_r \cdot N^\circ Riegos}{t}).$

Dado el alto número de riego que demanda el no provocar estrés, se realizara una nueva simulación, cambiando tan sólo la presión de activación del riego a $h_r = -200[cm]$. Los resultados se pueden apreciar en la figura 22.



Figura 22 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Tasa real para una presión de activación $h_r = -200[cm], T_{ri} = 1, 3, 5[cm/días]$ a un $t_{riego} = 0, 1[días]$

En la figura 22 se simuló a una presión de activación de -200 [cm]. A tasas de riego de 1, 3 y 5 [cm/día], y un tiempo de riego $t_{riego} = 0, 1[días]$. Desapareciendo el estrés a una tasa de 1 [cm/día]. Ahora que se tiene una tasa que no produce estrés, es importante saber que sucede a tasa de riego inferiores a 1 [cm/día]. Es por eso que en la tabla 7 a los resultados de la simulación de la figura 22, se incorpora una tasa de riego a 0,5 [cm/día]:

rabia () framer	o do mogos j	000100 111	arree con nop	_ 00[00]
Tasa $T_{ri} \left[cm/día \right]$	$t_{riego} \left[dia \right]$	$T_r \ [cm]$	N° Riegos	Estrés hídrico
0,5	0,1	$0,\!05$	61	No
1	0,1	0,1	33	No
3	0,1	$0,\!3$	16	Si
5	0,1	0,5	12	Si
	$T_r = cantidad \ de \ r$	iego, donde T_r :	$= T_{ri} \cdot t_{riego}$	

Tabla 7: Número de riegos y estrés hídrico con $h_r = -200[cm]$

La tabla 7 muestra que a una tasa $T_{ri} = 0,5[cm/dia]$ no existe estrés por falta de oxigenación pero, casi se duplica el número de riegos. Con la intensión de optimizar el

riego (uno de los objetivos de este estudio). Por esta razón es que la tasa de riego, para esta presión de activación del riego, adoptada es de 1 [cm/día]. El que no exista estrés, asegura que las presión radicular se encuentra entre $h_2 = -25$ y $h_3 = -762, 5$, tabla 2.

Ya que se ha encontrado una tasa optima para $h_r = 200 \ [cm]$. Se desea ver que implicancia tendría, aumentar el tiempo de riego.



Figura 23 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. hTop= Presión superficial

En la figura 23, cada curva representa la presión superficial que se alcanza $t_{riego}=0,1;0,21$ y 0,5 [día]. Al analizar cada una, se pueden ver oscilaciones, que dan a conocer la activación del riego en el momento que se alcanza la presión de activación $h_r = -200 \ [cm]$ y el termino del riego en los puntos superiores. La simulación pretende establecer los momentos de riego, respondiendo a la pregunta de cuando regar, pero ademas dando un indicador de cual es la presión superficial máxima que se alcanza después de cada riego. Esto sirve como indicador para visualizar la presencia del estrés producto de la falta de oxigenación. Al superar la presión de poro $h_2 = -25 \ [cm]$ (tabla 2) en la superficie. Hydrus, proporciona la presión radicular. Indicador del estado de absorción de agua por parte de la raíces. Siendo calculada como la media de las presiones de poros de los 30 nodos que componen la zona radicular en el tiempo.



Figura 24 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. hRoot= Presión radicular

En la figura 24, las tres curvas muestran la evolución de la presión radicular. Que se desprende de la simulación anterior, figura 23. Permitiendo visualizar que la presión radicular se encuentra lejos de $h_3 = 762, 5[cm]$ (modelo de feddes, tabla 2). Esto indica que posiblemente, no existirá estrés por falta de humedad pero, por la cercanía con h_2 , es muy posible que se produzca estrés para $t_{riego} > 0, 1$ [día]. Al igual que el gráfico de la figura 23 se pueden visualizar los momentos de riego y ademas la succión media de esta zona.

Como ya se dijo, si la tasa de transpiración potencial T_p es igual a la tasa de transpiración real no habrá estrés en la zona radicular, optimizando así la absorción de agua. Para un sistema sin compensación (factor de adaptabilidad de la raíces $\omega_c = 1$) una pequeña variación de T_a , arrojará inmediatamente evidencia de estrés.



Figura 25 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. v
Root = tasa de transpiración real T_a

Por lo anterior la estrategia consistirá en comparar la gráfica de T_p (función constante $T_p = 0.15$) con la transpiración real T_a que se encuentran representadas por las tres curvas para distintos tiempos de riego t_{riego} , de no coincidir significará una manifestación de estrés. De acuerdo a la figura 25 este fenómeno se produce en los momentos de riego para $t_{riego} = 0.21$ y $t_{riego} = 0.5$ días. Logrando una óptima absorción de agua por parte de las raíces para $t_{riego} = 0.1$ que corresponde a 2 horas y media de riego aproximadamente.

A continuación se buscará, por medio de una nueva simulación, una tasa adecuada para una presión de activación del riego de $h_r = -300$. En búsqueda de determinar si la tasa $T_{ri} = 1 \ [cm/día]$ para un tiempo $t_{riego} = 0, 1 \ [día]$ produce estrés. Comparando esta con tasas superiores pero, manteniendo el tiempo de riego.



Figura 26 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Tasa real para una presión de activación $h_r = -300[cm]$, $T_{ri} = 1,3y5[cm/días]$ a un $t_{riego} = 0,1[días]$

La figura 26, muestra que la tasa de riego $T_{ri} = 1 \ [cm/dia]$ para un tiempo $t_{riego} = 0,1 \ [dia]$ establece una respuesta al estrés muy próxima a lo apreciado a una presión de activación de $T_{ri} = -200 \ [cm]$. Existiendo un leve estrés desde el día 21 hasta el día 30. Este es producto de la falta de humedad en los nodos 22, 23 y 24, con presiones levemente inferiores a $h_3 = -762, 5$ (tabla 2, modelo de Feddes) en los nodos ya mencionados. Los resultados de las simulaciones ya mostrados en la figura 26 se resumen en la tabla 8:

Tabla 8: Núi	mero de rieg	os y estré	s hídrico con	$h_r = -300[cm]$	
Tasa $T_{ri} [cm/dia]$	$t_{riego} \left[día \right]$	$T_r [cm]$	N° Riegos	Estrés hídrico	
1	0,1	$_{0,1}$	27	No (Hasta el día 21)	
3	0,1	0,3	10	Si	
5	0,1	0,5	8	Si	
$T_r = cantidad \ de \ riego, \ donde \ T_r = T_{ri} \cdot t_{riego}.$					

Como ya se dijo si no hay estrés, la planta absorbe agua a su máxima velocidad y $T_a = T_p$. Según tabla 7 y 8, existe la posibilidad de no generar estrés a la planta a una tasa de riego $T_{ri} = 1 \ [cm/día]$ para un tiempo $t_{riego} = 0,1 \ [día]$, para las condiciones dadas en las simulaciones, siendo aconsejable el activar el riego dentro de un rango de $-300 < h_r \leq -200$. El no incorporar $h_r = -300 \ [cm]$ durante los 30 días es producto del leve estrés a partir del día 21.

De manera de apreciar mejor el fenómeno físico, se muestra a continuación la solución para una presión de activación de $h_r = -200[cm]$ a una tasa de riego $T_{ri} = 1 \ [cm/dia]$ para un tiempo $t_{riego} = 0, 1 \ [dia]$. Registrando la evolución del modelo, cada tres días a una profundidad dada dentro del dominio]0, 100[.

Primero se analizara en la figura 27, la presión de poro h en el transcurso del tiempo. Que en términos generales tiende a disminuir atenuando la entrada de aire al poro. Esta baja se mantiene dentro del rango de absorción máxima de agua por parte de las raíces $[h_3, h_2]$ señalados en la tabla 2 durante los 30 días a lo largo de todo el dominio espacial para cada curva en $t \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$. Es importante recalcar que la disminución de h en los primeros 30 cm (zona radicular). Es producto del efecto de la absorción de agua por parte de las raíces, evidenciando la disminución del contenido de humedad θ . Luego, producto de la acumulación de agua, la presión va aumentando hasta lograr los 100 cm de profundidad donde la presión corresponde a la condición de borde $h_0(t)$ producto del drenaje libre. Una vez terminada la simulación (día 30), se logra el valor mínimo, h(-26, 30) = -499, 515, a una profundidad de 26 cm, esto muestra que no existirá estrés y $T_a = T_p$.



Figura 27 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Solución de la presión de poros o succión ya que para este caso las presiones son negativas. Donde cada curva de la grafica representa la evolución espacial de la presión de poro cada 3 días, con t en días.

En la gráfica de la figura 27, en t = 0 se da a conocer una presión uniforme en todo el dominio, como condición inicial $h_{cc} = 100$ (capacidad de campo). Permitiendo obtener la humedad inicial $\theta = 0.3655[-]$, a partir de la parametrización de van Genuchten (sección 4.2.2) que se observa en la figura 28. Producto de la absorción de agua por parte de las raíces, el suelo en el transcurso del tiempo tiende a perder humedad. La manera de contrarrestar la pérdida es por medio del riego. Que es activado al momento de alcanzar en la superficie la presión de riego h_r , permitiendo la infiltración para así, logrando el contenido de humedad necesario para la optima absorción de agua por parte de las raíces dentro de los 30 días de simulación ($T_{riego} = 1 \ [cm/dia]$).

La figura 29 muestra los distintos valores que puede tomar la conductividad hidráulica K en el transcurso del tiempo y la profundidad a partir de la presión de poro h.



Figura 28 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Solución de la humedad según el modelo de van Genuhten. Donde cada curva de la grafica representa la evolución espacial de la humedad cada 3 días, con t en días.



Figura 29 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Conductividad según el modelo de Mualem con K = K(h). Donde cada curva de la grafica representa la evolución espacial de la humedad cada 3 días, con t en días.

Analizado las figuras 27, 28 y 29 se observa la similitud de cada una de las curva a la misma profundidad z. Enfatizando que la variación de h influye en la variación de la humedad θ y de la conductividad K. Estableciendo la dependencia que tiene la parametrización de van Genuchten - Mualem donde $\theta(h)$ y $K(\theta(h))$, con la variable de presión de poro h.

A continuación en las figuras 30, 31 y 32 se muestran las gráficas de la presión de poro h, contenido de humedad θ y el flujo de agua en el suelo, en el tiempo. Examinando el modelo de forma espacial por medio de los nodos según la discretización que se muestra en la figura 16.



Figura 30 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Solución de la presión de poros o succión para este caso dado que la presiones son negativas.

Al examinar la gráfica de la figura 30, la presión h se mantiene alta en los nodos 2 y 5, por encontrarse ambos cercanos a la superficie (a 1 y 4 cm respectivamente) esto apunta a una zona donde existe un nivel mayor de humedad que en el nodo 15 (a 14 cm, zona media radicular) y aún mayor que en la frontera de la raíces(nodo 31 a 30 cm de profundidad). Esto apoyado por la humedad y el flujo presente en dichos nodos (figuras 31 y 32) señalaría que a mayor profundidad existe menos humedad producto de la absorción de agua por parte de la raíz.

En los nodos inferiores (nodo 31, 41 y 60) no hay infiltración, sino que se genera el fenómeno de la capilaridad producto de que existe mayor presión en el nodo 60 que en el 31. Esto se puede ver al analizara la figura 32 ya que en los 3 nodos (nodo 31, 41 y 60) el flujo es positivo. Ya que recordemos que la infiltración (agua que penetra el suelo parcial o totalmente), para hydrus es un flujo negativo.



Figura 31 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D. Solución de la humedad según el modelo de van Genuhten.



Figura 32 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D.

Para lograr la solución mostrada en la figura 27, se comparo la presión superficial a diferentes tasas de riego. Proponiendo medir la presión en la superficie y utilizar esto como un indicador de cuando se debe regar. Lo que quiere decir que el momento de regar es cuando en la superficie se alcance dicho valor.

5.1.2 Resumen

Al varia los parámetros en las simulaciones, se determino una tasa y un rango de activación del riego. La metodología utilizada fue mantener el tiempo de riego. Utilizando tasa de riego de 1, 3 y 5 [cm/día] para distintas presiones de activación. Partiendo con una presión de activación h_r de -100 cm, no encontrando una tasa optima (no produce estrés y con 1 riego diario). Luego con $h_r = -200$ [cm], determinando una tasa optima ($T_{ri} = 1$ [cm/día] a un tiempo de 0,1 día) la cual produce un resultado similar con a una presión de $h_r = -300$ [cm]. Al encontrar una tasa optima para $h_r = -200$ [cm]. Se realizaron nuevas simulaciones, manteniendo la tasa optima encontrada, pero aumentando el tiempo de riego. Con la intensión de disminuir aún más el número de riego. Existiendo estrés al aumentar el tiempo de riego.

En la tabla 9 se muestran los resultados, centrándose en la tasa optima encontrada a las presiones de activación h_r ya mencionadas:

Tabla 9: Resultados para una presión de activación de riego h_r =-200						
h_r	$T_{ri} \left[cm/día \right]$	$t_{riego} \left[día \right]$	$T_r [cm]$	N° Riegos	Estrés hídrico	
-100	1	0,1	0,1	45	Si	
-200	1	0,1	0,1	33	No	
-300	1	$0,\!1$	$_{0,1}$	27	No (hasta el día 21)	
-	$t_r = duración del$	l riego; $h_r = presión$	ı de activación;	$T_{ri} = tasa \ de \ riego$; $T_r = T_{ri} \cdot t_{riego}$	

Estos resultados sugieren que no existirá estrés hídrico. Si el riego se produce dentro de un rango de activación de $-300 < h_r \leq -200$ a una tasa de 1 [cm/día] durante 0,1 [día].

5.1.3 Simulación 2: Franco arenoso

Al igual que el experimento anterior se determina la solución del modelo conceptual, ecuación (41). Utilizando la misma condición inicial (presión uniforme en todo el dominio [0, L[) del experimento anterior, pero en un suelo franco arenoso.

Tabla 10: Condiciones iniciales					
Material Presión inicial $[cm]$ Modelo hidráulico $z [cm]$ t $[d]$					
Franco arenoso	-100	Porosidad simple	[0, 100]	[0, 30]	

En la tabla 11 se establecen los parámetros necesarios para utilizar el modelo de van Genuchten para un material Franco arenoso.

Tabla 11: Parámetros de flujo					
$K_s [\mathrm{cm/dia}]$	n [-]	l [-]	θ_r [-]	θ_s [-]	α
106, 1	$1,\!89$	$0,\!5$	0,065	$0,\!41$	$0,\!075$
Fuente: Datos extraídos de la librería de Hydrus 1D					

Los parámetros utilizados para la activación del riego son los que se muestran en la tabla 12, los que ya fueron explicados en la tabla 5. Existen variaciones en la tasa de riego T_{ri} producto de características especiales que tiene este suelo, entre ellos una conductividad más alta.

	Tabla 12: Activación de riego					
	N° Nodos	$h_r[\mathrm{cm}]$	$T_{ri} [\mathrm{cm/día}]$	t_{riego} [día]	$t_r[día]$	
	1	-100	9 a 13	0,1	0	
T_{i}	T_r = tiempo de retardo y es igual a cero en este estudio ya que se comienza regando en $t=0$					

Las figuras 33, 34 y 35 son el resultado de la metodología empleada en la simulación 1 (comparación de T_p con T_a) en busca de optimizar el riego, adoptando, nuevamente, un tiempo de riego $t_{riego} = 0, 1$. Cambiando la tasa de riego T_{ri} . Surgiendo un nuevo elemento que analizar en la gráfica de la figura 35 (estrés permanente).



Figura 33 – Elaboración propia, hTop= Presión superficial



Figura 34 - Elaboración propia, hRoot= Presión zona de la raíz

En la figura 35 se presenta la comparación entre las tasas de transpiración real T_a y T_p en donde, como ya se dijo al comienzo de la presentación, se logra obtener una aproximación entre las tasa de transpiración ($T_a \sim T_p$ en un $t_{riego} = 0, 1 [cm/día]$).



Figura 35 – Elaboración propia, vRoot= tasa de transpiración real T_a

Surgiendo una interrogante a la hora de apreciar la curva correspondiente a una tasa de riego $T_{ri} = 9[cm/dia]$, donde a partir del día 24, aproximadamente, la gráfica muestra un estrés permanente dado que $T_a < T_p$ y se produce dado que el suelo Franco arenoso, presenta una gran variación de la presión a pequeñas bajas en humedad ($\Delta\theta < -0,0091$) respuesta que se da después de un umbral (alrededor de los 0,0971), tras una baja sostenida en la humedad. Lo cual sugiere una disminución de la humedad entre los 27 y 28 cm. de profundidad, provocando un estrés por superar $h_3 = -762, 5$ (tabla 2). Estas apreciaciones se pueden observar en la figura 36.



Figura 36 – Elaboración propia extraída de hydrus 1D, solución de la presión de poros o succión para este caso dado que la presiones son negativas a una tasa de riego $T_{ri} = 9 \ [cm/día]$ en un tiempo de riego 0,1 [día].

A continuación se muestra la solución encontrada para una tasa de riego $T_{ri} = 10 \ [cm/día]$ durante $t_{riego} = 0, 1[día]$ que mostró una buena respuesta al estrés hídrico. Logrando que $T_a \sim T_p$ como se ve en la figura 35. Para comenzar, en la figura 37 se muestra la presión de poro h en el transcurso del tiempo, determinando la solución del problema en $t \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}.$

Una vez terminada la simulación, en t = 30 se logra el valor mínimo, $h(-29, 30) = -322, 56 \ [cm]$, a una profundidad de 29 cm, y un máximo de, $h(-6, 27) = -45, 74 \ [cm]$. Esto asevera el hecho de que no existirá reducción de la absorción de agua por partes de las raíces (estrés), ya sea por la sequedad u oxigenación respectivamente, en los días que se han registrado a nivel espacial. Manteniéndose la presión promedio entre h_3 y h_2 durante la simulación. La pregunta que surge, de la suposición anterior, es el que si al ser una media el valor obtenido, ¿Se puede asegurar que no existirá estrés?. Para responde, es necesario evaluar la evolución de los nodos en el tiempo. Lo que se observar en la figura 40.



Figura 37 – Elaboración propia extraída de hydrus 1D, solución de la presión de poros o succión para este caso dado que la presiones son negativas a una tasa de riego $T_{ri} = 10 \ [cm/dia]$ en un tiempo de riego 0,1 [día].

En la gráfica de la figura 38 se muestra la evolución del contenido de humedad a partir de un $\theta = 0, 12$ en t = 0, producto de la condición inicial $h_{cc} = -100$ (uniforme en todo el dominio espacial) utilizando la parametrización de van Genuchten (sección 4.2.2), atenuándose la pérdida de humedad en la parte baja de la zona radicular, ubicada dentro de los 30 cm. de profundidad, teniendo como referencia la superficie del suelo.



Figura 38 – Elaboración propia extraída de hydrus 1D, solución de la humedad según el modelo de van Genuhten. A una tasa de riego $T_{ri} = 10 [cm/dia]$ en un tiempo de riego 0,1 [día].

Otro elemento a tener en cuenta es la capacidad del suelo franco arenoso para transmitir agua, esto se puede apreciar en la figura 39, donde se distingue una zona entre los 20 y 30 cm de profundidad de baja conductividad, que se acerca a cero y dado que esta depende de la humedad o la presión de poro K(h) (sección 2.1.6) indicaría que el contenido de humedad presente en la zona es casi insuficiente para el movimiento del fluido.



Figura 39 – Elaboración propia extraida de hydrus 1D, conductividad según el modelo de Mualem con K = K(h). A una tasa de riego $T_{ri} = 10 \ [cm/día]$ en un tiempo de riego 0,1 [día].

Basado en la necesidad de visualizar qué ocurre en el tiempo con las soluciones anteriores es que a continuación se presentan en las figuras 40, 41 y 42, la presión de poros h, contenido de humedad θ , y el flujo en los diferentes nodos, según la discretización realizada en la figura 16.



Figura 40 – Elaboración propia extraída de hydrus 1D, solución de la presión de poros o succión para este caso dado que la presiones son negativas.



Figura 41 – Elaboración propia extraída de hydrus 1D, solución de la humedad según el modelo de van Genuhten.



Figura 42 – Elaboración propia con datos extraídos de hydrus 1D.

El análisis en los nodos es similar al del experimento 1, apreciándose en la gráfica de la figura 40 una presión $h > h_2$ ($h_2 = -25$ [cm] parámetro de Feddes, tabla 2) en los nodos 2 y 5. Esto apunta a una zona de estrés en los momentos de riego (0,0432 días ó 1 hora) en los 4 cm de profundidad que para el caso de haber utilizado la función de distribución de Hoffman and van Genuchten de 1983, planteado en la ecuación (3.2.2), habría significado la zona de mayor absorción de agua por parte de la raíces. El nodo 15 (a 14 cm) ubicado en la parte media de la zona radicular experimenta una discreta disminución con respecto a los nodos anteriores, pero que se hace notorio en la disminución de humedad que muestra la figura 38, siendo evidente la disminución en la frontera de la raíces(nodo 31 a 30 cms. de profundidad) producto de la conductividad observada en la figura 39.

Son evidentes los efectos de la capilaridad por los nodos inferiores 41 y 60, ya mencionados en la simulación 1, y que se aprecia en las figuras 40, 41 y 42, ratificándose la no infiltración, dada por el flujo positivo que se genera en los nodos inferiores N(31), N(41) y N(60).
5.1.4Resumen

Al varia los parámetros en las simulaciones, se determino una tasa riego. Manteniendo una presión de activación del del riego de h_r de -100 [cm] y el tiempo de riego de 0,1 [día]. Utilizando tasas de riego de 9, 10 y 13 [cm/día].

En la tabla 13 se muestran los resultados, centrándose en la tasa optima encontrada a la presiones de activación h_r ya mencionada:

	Tabla 13: Resultados para un tiempo de riego $t_r = 0, 1$ [dia]					
	h_r	$T_{ri} [\mathrm{cm/día}]$	t_r [día]	N° riegos	$h_{Root-min}[cm]$	T_{a-min} [cm/día]
	-100	9	0,1	5	-600	0,139 (**)
	-100	10	$_{0,1}$	4	-135	0,141(*)
	-100	13	0,1	4	-117	0,135(*)
$t_r = duraci \delta n$	del riego	; $h_{Root-min} = presión$	mínima zona d	e la raíz; $T_{ri} = tase$	a de riego; $T_{a-min} = tas$	sa mínima absorción de la raíz; (*

Table 13. R gultadog pare tion do rioro t = 0.1 [día]

estrés durante el riego; (**) existe estrés y después del día 24,5 existe tendencia al estrés.

5.1.5 Curvas características

Por último examinaremos la curva del potencial de presión (h) que caracteriza la habilidad de un determinado medio poroso para retener agua cuando existe un flujo, como ocurre en el caso de la evaporación, transpiración o el drenaje (McWhorter 1977) para cada suelo.



Figura 43 – Elaboración propia con datos obtenidos de hydrus 1D. Curva característica h v/s θ , utilizado en el suelo arcilloso (simulación 1) y franco arenoso (simulación 2).

Por tanto la figura 43 permite comparar los suelos ensayados estableciendo diferencias significativas a la hora de trabajar a bajas presiones (h) como sucede en la zona insaturada, que es donde se realiza el estudio.

6 Conclusiones

- Con los resultados que se desprenden de los gráficos obtenidos de las simulaciones realizada con hydrus 1D en los dos tipos de suelos, es posible establecer una tasa de irrigación (riego) (T_{ri}) , una presión de activación de riego (h_r) y la duración del riego (t_{riego}) adecuada para que, tanto como por la sequedad o el riego, no existan efectos del estrés hídrico sobre la planta, que provoque daños en la producción o exportación de la fruta:
- Para un suelo arcilloso se deben regar diariamente, a una tasa de riego 1 [cm/día] durante 0,1 día, logrando una cantidad de riego $T_r = 0, 1[cm]$. Activando el riego en un rango de presión de activación $-300 < h_r \leq -200$ cm.
- Para un suelo franco arenoso se deben regar cada 5 días, a una tasa de riego 10 [cm/día] durante dos horas y media (0,1 día) logrando una cantidad de riego $T_r = 1[cm]$. Activando el riego a una presión de activación $h_r = -100$ cm.
- El tamaño de los poros y el contenido de humedad (θ) produce diferencias en tasa adecuada de riego y el número de riegos.
- Una tasa de riego constante puede producir un estrés permanente por falta de humedad necesaria para la absorción optima ($\alpha(h) = 1$).
- La absorción de agua potencial es proporcional a la distribución b(z). (Luo et al. (2003), (Wu et al., 1999; Musters y Bouten, 2.000; Skaggs et al., 2006).)
- El modelo utilizado para el término fuente S (Modelo de Feddes) no contempla el crecimiento de las raíces, limitando al modelo y no permitiendo cambios en la distribución de la tasa potencial de absorción S_p , efecto que podría aminorar el nivel de estrés, de estar este presente, sumado a esto la no compensación de la absorción $(w_c = 1)$ de los nodos estresados.
- Se logran establecer diferencias entre los dos tipos de suelos en términos de la tasa adecuada de riego y el número de riegos durante los 30 días en que se establece la simulación. Esto se sostiene a partir de que la presión negativa en la zona insaturada con que el agua es retenida en el suelo depende directamente de parámetros como el tamaño de los poros y del contenido de humedad (θ), donde al analizar la curva característica para el caso de un suelo franco arenoso esta curva es altamente no lineal, liberando mucha agua a presiones relativamente bajas, en cambio la arcilla retiene con mayor fuerza el agua al interior de sus poros y su cambio volumétrico a altas presiones es menor que el franco arenoso. Lo anterior plantea la discusión sobre si la raíz en este tipo de suelo tiende, ante un prolongado tiempo, a perder la capacidad de absorber el agua.
- Se debe señalar que el objetivo es reducir el gasto hídrico, hora hombre y energía pero, sin descuidar el estrés de la planta en ambos tipos de suelo, aún cuando en el

caso del suelo franco arenoso es leve en los nodos de poca profundidad, durante el riego.

- En la simulación 2 a la tasa de riego $T_{ri} = 9 \ [cm/día]$ se produjo un punto donde el estrés es permanente a partir del día 24. Ante la posibilidad de que el problema fuese un error numérico. Se bajo la tasa de riego hasta igualar las tasas de transpiración real y potencial. Determinando que a una tasa de $T_{ri} = 4 \ [cm/día]$ en un tiempo de riego de 0,1 día se logra igual T_p con T_a (sin estrés durante 12 primeros días). Los niveles de estrés por falta de humedad necesaria para la absorción optima ($\alpha(h) = 1$, explicada en la sección 3.2.2) se hacen presente después del día 12.
- En el modelo no existe absorción en el primer nodo lo que sugiere la no presencia de raíces en la superficie. A una tasa de riego de 9[cm/dia] en el suelo franco arenoso a partir del día 24 presenta un estrés sostenido en el tiempo, producto de la baja en la succión en los 27 y 28 cm. (nodo 27 y 28) de profundidad como se observa en la figura 36. De existir absorción en este nodo el efecto del estrés se presenta a una tasa de 8 [cm/dia], lo que sugiere que la distribución de la tasa potencias de absorción S_p disminuye en cada nodo dentro de la zona radicular al existir más puntos de absorción, permitiendo a su vez mayor humedad en los nodos 27 y 28 al disminuir el consumo en los nodos superiores.
- A futuro sería importante comparar el modelo con datos experimentales, agregar el efecto de la compensación de la absorción por parte de las raíces y el crecimiento dela raíz. Ensayando con el arándano y así poder visualizar el aporte que hace la eliminación del estrés hídrico en el momento de brotación a la calidad de la fruta y a la optimización del proceso de cosecha al tener calibres ideales y menos rechazo por manchas en los frutos o otros problemas que no permiten la exportación.

Referencias

Bardgett, R., Wardle, D., (2010). Aboveground–Belowground Linkages: Biotic Interac-tions. Ecosystem Processes, and Global Change. Oxford Univ. Press, New York, pp. 481–492.

Baveye, P., H. Rogasik, O. Wendroth, I. Onasch, and J. W. Crawford (2002), Effect of sampling volume on the measurement of soil physical properties: Simulation with x-ray tomography data, Meas. Sci. Technol., 13, 775–784.

Bear J. (1988). Dynamics of Fluids in Porous Media, Dover Publications, Inc., New York.

Bear, J. (2002), Dynamics of Fluids in Porous Media, Dover, New York. Brusseau, M. L., S. Peng, G. Schnaar, and M. S. Costanza-Robinson (2006), Relationships among air-water interfacial area, capillary pressure, and water saturation for a sandy porous medium, Water Resour. Res., 42(3), W03501, doi:10.1029/2005WR004058.

Blizzard, W.E. (1980). Comparative resistance of the soil and the plant to water trans-port. J. Plant Physiol. 66 (5), 809–814.

Buckingham, E. (1907). Studies on the movement of soil moisture. Bull 38. USDA, Bureau of Soils, Washington D.C.

CostanzaRobinson, M. S., Estabrook, B. D., Fouhey, D. F. (2011). Representative elementary volume estimation for porosity, moisture saturation, and air-water interfacial areas in unsaturated porous media: Data quality implications. Water Resources Research, 47(7).

Custodio LLamas, E., Vilaro, F. (1976). Hidrologia subterranea. España: Omega.

Curtis, H., Schnek, A. (2008). Curtis. Biología. Ed. Médica Panamericana.

Darby, R. (1996). Chemical Engineering Fluid Mechanics. Marcel Dekker, Inc. Pág. 391-396.

J. Dinamarca V. Plutardo (2005).Producción Mercado delV [Consulta: 2015]. Arándano, Chile. 01de noviembre Disponible en: http://www.indap.gob.cl/extras/estrategias-por-rubros-2005/5region/3Arandanos-Produccion.Mercado.pdf

Dietrich, S. (2013). Infiltración y recarga a través del suelo y zona no saturada en áreas de llanura. Caracterización en base a la aplicación de tomografía eléctrica y trazadores (Doctoral dissertation, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires).

Feddes, R.A., Kowalik, P.J., Zaradny, H. (1978). Water uptake by plant roots. In: Simu-lation of Field Water Use and Crop Yield. John Wiley Sons, Inc., New York, pp.16–30.

Feddes RA, Hoff H, Bruen M, Dawson T, de Rosnay P, Dirmeyer O, Jackson RB, Kabat P, Kleidon A, Lilly A, Pitman AJ. (2001). Modeling root water uptake in hydrological and climate models. Bulletin of the American Meteorological Society 82: 2797–2809.

Ferreyra, E., Selles, V., Lemus, S. (2002). Efecto del estrés hídrico durante la fase II de crecimiento del fruto del duraznero cv. Kakamas en el rendimiento y estado hídrico de las plantas. Agricultura técnica, 62(4), 565-573.

Freeze, R. A., Cherry, J. A. (1979). Groundwater. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.

Gardner, W.R. (1960). Dynamic aspects of water availability to plants. J. Soil Sci. 89,63–73.

H.W. Alt, S. Luckhaus (1983). Quasilinear elliptic–parabolic differential equations, Math. Z. 183 311–341.

Helmig R. (1997). Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface: a Contribution to the Modeling of Hydrosystems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

Hill, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 11 (5): 357–372.

Hillel, D., Van Beek, C.G.E.M., Talpaz, H. (1975). A microscopic scale model of soil wateruptake and salt movement to plant roots. J. Soil Sci. 120, 385–399.

Hillel, D., (1998). Environmental soil physics. Academic Press, San Diego, California.

Jarvis, N. J., (1989). A simple empirical model of root water uptake. J. Hydrol. 107 (1), 57–72.

Jury, W. A., Horton, R. (2004). Soil physics. John Wiley Sons.

Kang, S., Zhang, F., Zhang, J., 2001. A simulation model of water dynamics in winterwheat field and its application in a semiarid region. Agric. Water Manage. 49,115–129.

Kramer, P. (1933). The intake of water through dead root systems and its relation to the problem of absorption by transpiring plants. Am. J. Bot. 20 (7), 481–492.

Kumar, R., Jat, M.K., Shankar, V. (2012). Methods to estimate reference crop evapo-transpiration – a review. Water Sci. Technol. 66 (3), 525–535.

Li, K.Y., Boisvert, J.B., Jong, R.D. (1999). An exponential root water uptake model. Can.J. Soil Sci. 79, 333–343.

McWhorter, D. B., y Sunada, D. K. (1977). Ground-Water Hydrology and Hydraulics. Water Resources Publication.

Molly S. Costanza-Robinson, Benjamin D. Estabrook, and David F. Fouhey. (2011). Representative elementary volume estimation for porosity, moisture saturation, and air-water interfacial areas in unsaturated porous media: Data quality implications. water resources research, vol. 47, 2011.

Molz, F.J., Remson, I. (1970). Extraction term models of water soil moisture use bytranspiring plants. Water Resour. Res. 6 (5), 1346–1356.

Molz, F.J. (1981). Models of water transport in soil plant system: a review. WaterResour. Res. 17, 1245–1260.

Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, Water Resour. Res., 12(3), 513-522.

Newman BD, Wilcox BP, Archer SR, Breshears DD, Dahm CN, Duffy CJ, McDowell NG, Phillips FM, Scanlon BR, Vivoni ER. (2006). Ecohydrology of water-limited environments: a scientific vision. Water Resources Research 42: W06302. DOI: 10.1029/2005WR004141.

Nielsen, D.R., van Genuchten, M.Th. y Biggar, J.W., (1986). Water Flow and Solute Transport Processes in the Unsaturated Zona. Water Resources Research, 22 (9), 89S-108S.

Otto F. (1996). L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic–parabolic equations, J. Differential Equations 131 20–38.

Ojha, C.S.P., Hari Prasad, K.S., Shankar, V., Madramootoo, C.A., 2009. Evaluation of anonlinear root water uptake model. J. Irrig. Drain. Eng. (ASCE) 135 (3), 303–312.

Ojha, C.S.P., Rai, A.K., 1996. Non linear root water uptake model. J. Irrig. Drain. Eng.(ASCE) 122, 198–202.

PC-PROGRESS, Czech Republic. (2008).[Consulta: 05 septiembre 2015].Disponible en: http://www.pc-progress.com/en/Default.aspx

Prasad, R., 1984. Influence of time step in the simulation modeling of evapotranspi-ration. Proc. Ind. Acad. Sci. 7, 91–118. Quijano, J.C., Kumar, P., Drewry, D.T., Goldstein, A., Misson, L. (2012). Competitive and mutualistic dependencies in multispecies vegetation dynamics enabled by hydraulic redistribution. Water Resour. Res. 48.

Radcliffe, D.E. y Simunek, J. (2010). Soil physics with HYDRUS. Modeling and applications. CRC Press, 373pp.

Richards, J.H., Caldwell, M.M. (1987). Hydraulic lift: substantial nocturnal water trans-port between soil layers by Artemisia tridentata roots. Oecologia 73 (4), 486–489.

Ritchie, J.T. (1981). Soil-water availability. Plant Soil 58 (1-3), 327-338.

Scanlon, B.R., Tyler, S.W. Y Wierenga, P.J. (1997). Hydrologic issues in arid, unsaturated systems and implications for contaminant transport. Reviews of Geophysics, 35 (4), 461-490.

Schulze, E.D., Caldwell, M.M., Canadell, J., Mooney, H.A., Jackson, R.B., Parson, D., Scholes, R., Sala, O.E., Trimborn, P. (1998). Downward flux of water through roots (i.e., inverse hydraulic lift) in dry Kalahari sand. Oecologia 115 (4), 460–462.

Šimůnek, Šejna, Saito, Sakai, and M. Th. van Genuchten (2013). HYDRUS-1D Software Package for Simulating the One-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media. Department of environmental sciences university of california riverside, california.

Tamea S, Laio F, Ridolfi L, D'Odorico P, Rodriguez-Iturbe I. (2009). Ecohydrology of groundwater-dependent ecosystems: 2. Stochastic soil moisture dynamics. Water Resources Research 45.

Undurraga Pablo, Vargas Sigrid, Manual del arándano (2013). Instituto de investigaciones agropecuarias, chillán, chile.

Valenzuela B. Jorge, Requerimientos Agroclimáticos de las Especies de Arándano, Seminario: el cultivo del arándano [en línea], 1988, p. 17-23. [Consulta: 13 diciembre 2015]. Disponible en: http://www2.inia.cl/medios/biblioteca/seriesinia/NR06971.pdf

van Genuchten, M. Th. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, Soil Sci. Soc. Am. J., 44, 892-898.

van Genucten, M. Th. y Nielsen, D. R., (1985). On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils. Annales Geophysicae, 3, 615-628.

Valladares, F., Vilagrosa, A., Peñuelas, J., Ogaya, R., Camarero, J. J., Corcuera, L., ... Gil-Pelegrín, E. (2004). Estrés hídrico: ecofisiología y escalas de la sequía. Ecología del bosque mediterráneo en un mundo cambiante, 163-190.

Vereecken, H., Huisman, J.A., Bogena, H., Vanderborght, J., Vrugt, J.A., Hopmans, J.W. (2008). On the value of soil moisture measurements in vadose zone hydrology: areview. Water Resour. Res. 44, 1–21.

Vrugt, J.A., Hopmans, J.W., Simunek, J., (2001a). Calibration of a two dimensional rootwater uptake model. Soil Sci. Soc. Am. J. 65, 1027–1037.

Wang EL, Smith CJ. (2004). Modelling the growth and water uptake function of plant root systems: a review. Australian Journal of Agricultural Research 55: 501–523.

Wu, J., Zhang, R., Gui, S. (1999). Modeling soil water movement with water uptake byroots. J. Plant Soil 215, 7–17.

Yadav, B.K., Mathur, S., 2008. Modeling soil water extraction by plants using non-linear dynamic root density distribution function. J. Irrig. Drain. Eng. (ASCE) 134(4), 430–436.

Yadav, B.K., Mathur, S., Siebel, M.A., 2009b. Soil moisture flow modeling with wateruptake by plants (wheat) under varying soil and moisture conditions. J. Irrig.Drain. Eng. (ASCE) 135, 375–381.

Zhang, D., R. Zhang, S. Chen, and W. E. Soll (2000), Pore scale study of flow in porous media: Scale dependency, REV, and statistical REV, Geophys. Res. Lett., 27(8), 1195–1198, doi:10.1029/1999GL011101.