



---

Facultad de Ingeniería

Universidad Católica de Temuco

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

# Predicción de la propagación del frente espuma-petróleo en coordenadas Eulerianas

Por

Carlos Alejandro Torres Ulloa

Profesor Guía

Dr. Stefan Berres

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de  
Magíster en Matemáticas Aplicadas (Profesional).

Temuco, 10 de Septiembre del 2015.

Universidad Católica de Temuco  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

## **COMISION EVALUADORA**

Profesor Guía:

.....  
Dr. Stefan Berres

Evaluador Externo:

.....  
Dr. Paul Grassia

Profesor Informante:

.....  
Dr. Osvaldo Venegas

Profesor Informante:

.....  
Dr. Gonzalo Recio

Director del Programa (Ministro de fe):

.....  
Dr. Emilio Cariaga

Temuco, 10 de Septiembre del 2015.

# **Perfil de Egreso**

Magíster en Matemáticas Aplicadas.  
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

## **Agradecimientos**

A los académicos del departamento de Ciencias Matemáticas y Física, y en especial al Dr. Olvaldo Venegas y Dr. Emilio Cariaga, quienes guiaron mi camino a través del programa. A los académicos de la facultad de ingeniería, quienes me incentivaron desde mi formación de pregrado y postgrado. A mi director de la actividad formativa equivalente, Dr. Stefan Berres, por su paciencia, preocupación y generosidad. Al Dr. Paul Grassia, quien me entregó los insumos necesarios para lograr los resultados deseados. Por último y no por eso menos importante, a mis compañeros del programa (Versión 1 Magíster Matemáticas Aplicadas), quienes me ayudaron en diferentes aspectos en el transcurso del proceso fórmativo.

A mis padres,  
**Olga Ulloa Sepulveda y Carlos Torres Bravo.**  
A mi novia,  
**Carola Cifuentes Toro.**

## Abstract

A new mathematical model is introduced that describes the propagation of petroleum-foam fronts in an oil reservoir in Eulerian coordinates as a system of Hamilton-Jacobi equations, where the front location is described implicitly as a level set zero of the solution variable. The conceptual model is based on physical considerations on the foam that lead to a “pressure-driven growth” model in Lagrangian coordinates: the propagation direction is normal to the front with a propagation velocity being proportional to the pressure and inversely proportional to the trajectory length. At the upper boundary of the domain (the “top”) the net driving pressure is maximal and at the lower boundary the net driving pressure is zero. The mathematical model is solved numerically by the “level set methods”, where the marching is done via a Godunov-type finite volume scheme with a central-upwind flux, and a periodic reinitialization assures more exact results. The numerical boundary values are enforced to coincide with the corresponding analytic solution.

For small times  $t \ll 1$  an analytical expression of the front location is developed based on an approximation of the Lagrangian model by Taylor expansions of up to order 3. One representation is derived for the front location at any height and another specialized representation exclusively for locations close to the top. By resolving numerically the Eulerian model, graphical representations of the front location, its angle and curvature are obtained. The obtained graphs are compared with the analytical results, confirming the existence of a concavity in the front for small times

**Keywords:** Pressure-driven growth, Level set methods, Semidiscrete central-upwind, Taylor Approximation.

## Resumen

Se introduce un nuevo modelamiento matemático para capturar el fenómeno de propagación del frente espuma-petróleo en base a modelos en coordenadas Eulerianas, usando un sistema de ecuaciones Hamilton-Jacobi. El modelo conceptual se basa en consideraciones físicas de espuma que conducen al modelo “Pressure-driven growth” en coordenadas Lagrangianas: la dirección de propagación es en la dirección normal del frente, con una velocidad de propagación que es proporcional a la presión e inversamente proporcional a la longitud de trayectoria. En el límite superior del dominio (la “parte superior”) la presión neta de conducción es máxima y en el límite inferior la presión neta de conducción es cero. El modelo se resuelve numéricamente usando esquemas de volúmenes finitos de tipo Godunov, específicamente utilizando el esquema llamado “Semidiscrete central-upwind”. Luego se realiza una simulación computacional del fenómeno, considerando como solución del modelo matemático, la curva de nivel cero, para lo cual se utilizan conceptos de la teoría de “level set methods”, tales como la reinicialización que es usada para conseguir resultados más exactos. Los valores numéricos de contorno son forzados para coincidir con la correspondiente solución analítica.

Se desarrolla una solución analítica aproximada del modelo Lagrangiano, usando series de Taylor hasta de orden 3, la cual entrega una representación del frente y otra exclusivamente para la representación del frente cerca del tope superior, esto para  $t \ll 1$ . Las fórmulas obtenidas entregan resultados similares a los numéricos. Al resolver el modelo Euleriano se obtiene datos numéricos con los cuales se generan representaciones gráficas para el frente de propagación, el ángulo y la curvatura. Los gráficos obtenidos son comparados con los resultados analíticos, confirmando la existencia de una concavidad en el frente en tiempos pequeños.

**Palabras clave:** Pressure-driven growth, level set methods, Semidiscrete central-upwind, Aproximación de Taylor.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Materiales y métodos</b>	<b>6</b>
2.1	Modelo matemático . . . . .	6
2.2	Esquema numérico . . . . .	9
2.2.1	Discretización espacial . . . . .	9
2.2.2	Flujo numérico . . . . .	9
2.2.3	Reinicialización . . . . .	12
2.2.4	Cálculo de ángulo $\alpha$ y curvatura $\kappa$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Solución esquema Lagragiano con orden de error 2</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>19</b>
4.1	Simulación computacional . . . . .	19
4.2	Ángulo $\alpha$ . . . . .	22
4.3	Gráficos de curvatura . . . . .	24
4.4	Ángulo y curvatura “Pressure-driven growth” versus Modelo Euleriano . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Fórmulas analíticas</b>	<b>29</b>
A.1	Posición del frente . . . . .	29
A.2	Fórmulas de similaridad . . . . .	30
<b>B</b>	<b>Códigos computacionales</b>	<b>32</b>

# **Objetivos**

## **Objetivo general**

Resolver numéricamente y realizar una simulación computacional de modelos matemáticos (alternativos al desarrollado en [4]) formulados para capturar el fenómeno de propagación del frente de espuma-petróleo.

## **Objetivos específicos**

1. Formular un modelo de ecuaciones diferenciales parciales, que pueda capturar el fenómeno, considerando conceptos físicos de espuma expuestos en “Analysis of a model for foam improved oil recovery” desarrollado en [4].
2. Resolver numéricamente el modelo y realizar una simulación computacional del fenómeno, para luego considerar variantes en el modelo, como los conceptos físicos de anisotropía y heterogeneidad del medio; desempeñar estratégicas para conseguir una resolución alta de la solución numérica, utilizando conceptos de reconstrucción y los “level set method”.
3. Comparar la solución numérica con los resultados de análisis asintótica en coordenadas Lagrangianas, como por ejemplo la curvatura del frente, derivada de la curvatura, comportamiento del frente para tiempos pequeños cerca del tope.

# 1 Introducción

Generalmente en un pozo petrolero sólo una fracción del petróleo es expulsado, usando como fuerza impulsora la propia presión del depósito [1] (a ésta etapa se le llama recuperación primaria). Por lo tanto, permanecen en éste grandes cantidades por recuperar. Una de las técnicas secundarias consiste en la inyección de agua en el depósito, esto con el objetivo de mantener la presión del yacimiento [2]. Para una tercera etapa de extracción existen tecnologías, procesos o mecanismos conocidos como Recuperación Terciaria o Mejorada de Petróleo (EOR por sus siglas en inglés “Enhanced Oil Recovery”), cuya aplicación puede ayudar a recuperar petróleo adicional [1]. La recuperación mejorada de petróleo se define como el conjunto de métodos que emplean fuentes externas de energía y/o materiales para recuperar el aceite que no puede ser producido por medios convencionales (recuperación primaria y secundaria) [3]. Tal como se señala en [4], una de las técnicas terciarias para la extracción de petróleo es la utilización de la espuma. Este método utiliza el hecho de que la espuma es relativamente inmóvil al interior del depósito de petróleo, debido a la gran fuerza que se requiere para conducir las películas de espuma a través de los canales del sistema. La espuma es creada a través de la co-inyección de gas y una solución de surfactante, proceso que es llamado, alternación de gas y surfactante, el cual en inglés se conoce como (SAG) [5]. Un modelo idealizado que explica el movimiento del frente de espuma en la reserva de petróleo, fue introducido en [6] y [7] (Ver Figura 1), dicho modelo se utiliza como base para el trabajo desarrollado en [4] y en el presente documento.

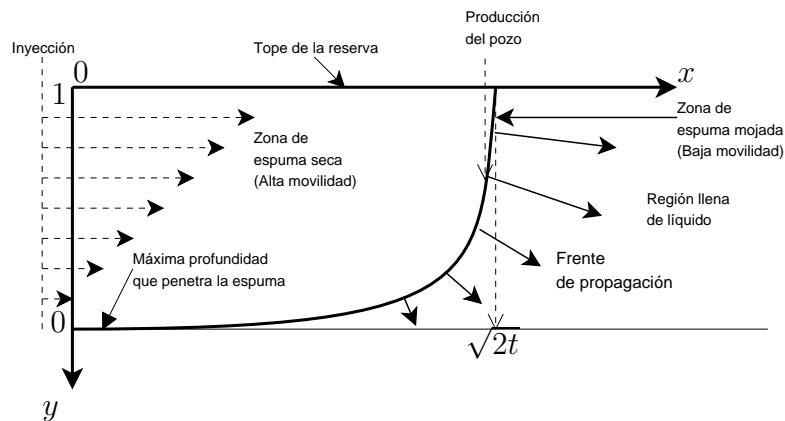


Figura 1 – Bosquejo del frente espuma-petróleo del modelo desarrollado en [6] y [7].

Como resultado de la inyección del surfactante, seguido de gas, en el depósito se genera espuma, la cual penetra en la región del líquido, y en última instancia llega al pozo de producción. La espuma es más húmeda (el ancho de la zona húmeda es proporcional a la longitud de trayectoria de los puntos materiales) y existe menos movilidad para el gas cerca de la parte delantera del frente y es más seca atrás, permitiendo que el gas penetre. En el modelo idealizado presentado en [6] y [7], toda la resistencia al flujo se concentra en el frente de espuma, tal como se puede visualizar en la Figura 1. Además, hay una profundidad máxima a la que puede penetrar la espuma, que es fijada por la presión de inyección y la diferencia de densidad entre el gas y el líquido. En este punto  $y = 0$ , la presión efectiva de inyección es igual a cero [4]. Por otra parte, el frente de espuma cumple con que en la parte superior del depósito se forma un ángulo recto. El frente de espuma se propaga a lo largo de

la dirección de su normal local, a una velocidad que depende de la profundidad. El dominio físico se expresa en su forma adimensional como  $x \in [0, \infty)$  e  $y \in [0, 1]$ .

Según se establece en [6] en el tope ( $y \approx 1$ ) el frente evoluciona a una velocidad de  $\sqrt{2t}$  (Ver Figura 1), lo cual será utilizado como condición del borde del modelo Euleriano.

A modo de ejemplo se tiene que a  $t = 8$  el avance del frente en el tope superior es de  $\sqrt{2t} = 4$ , lo que equivale en el trabajo presentado en [6] a 9 km.

Según se señala en [4], el modelo idealizado de [6] y [7], se rige por:

1. La reserva de petróleo es geológicamente homogénea.
2. Sólo dos fases están fluyendo, gas y agua; aceite residual inmóvil, puede estar presente.
3. La región acuosa (Zona de abajo) y la región de espuma seca (Zona de arriba), suponen ser perfectamente móvil en comparación con la zona espuma húmeda cerca del choque. (Ver Figura 1).
4. El espesor de la zona de espuma húmeda es mucho menor que la distancia que el frente se ha movido, por lo tanto, el frente y la zona de espuma húmeda puede ser modelada como una curva (de espesor despreciable) que propaga a través del depósito en el tiempo.

De la derivación del modelo presentado en [6] y [7] realizada en [4], se tiene que la evolución del frente en coordenadas Lagrangianas está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\Delta P'}{s} \mathbf{n}, \quad \Delta P' = y, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x}'$  corresponde a un punto del frente y su tasa de evolución en función del tiempo, obedece a la ecuación (1) y  $s$  es la longitud de la trayectoria de los puntos del frente espuma-petróleo, lo cual es válido solamente en la versión adimensional del modelo. Además,  $\Delta P'$  es el diferencial presión y según se especifica en [4],  $\Delta P' = y$ . Para expresar la ecuación (1) en coordenadas cartesianas, se considera que  $\mathbf{x}' = (x', y')$  y que la normal  $\mathbf{n} = (\cos(\alpha), -\sin(\alpha))$  (el ángulo  $\alpha$  es calculado en este trabajo según se especifica en la Figura 6), con lo cual el modelo se convierte en (considerando  $x = x'$  y que  $y = y'$ ),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{s} \cos(\alpha), \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{s} \sin(\alpha). \quad (3)$$

La longitud de la trayectoria  $s$  evoluciona según se establece en el cálculo [15], lo cual establece que la variación de la longitud de una curva paramétrica en dos dimensiones es:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (4)$$

Usando la expresión de la ecuación (2), (3) y (4) resulta posible demostrar que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{y}{s}. \quad (5)$$

El sistema acoplado en el modelamiento Lagrangiano, para la propagación del frente espuma-petróleo, consiste en las ecuaciones (1) y (5).

Una solución analítica para el modelo Lagrangiano se presenta en [6] y será deducida a continuación.

Esta solución establece que en el tope, para cualquier  $t > 0$ ,  $\alpha = 0$  y que en cualquier punto del frente cuando el tiempo  $t \ll 1$ ,  $\alpha = 0$ . Reemplazando  $\alpha = 0$  en la ecuación (2), esta queda expresada como  $dx/dt = y/s$ . Luego considerando que en el tope superior las trayectorias  $s = x$  y que en este punto para cualquier  $t > 0$ ,  $s = \sqrt{2t}$ , se obtiene como resultado aproximado a

$$x \sim \sqrt{2yt}. \quad (6)$$

Esta expresión es válida para tiempos  $t \ll 1$  en todo el frente y válida sólo en el tope superior y en el fondo del pozo en cualquier tiempo  $t > 0$ . A partir de la ecuación (6) se puede obtener una aproximación para el ángulo  $\alpha$  para puntos cercanos al tope superior (el símbolo “~” representa similaridad y se utiliza en este trabajo cuando se obtiene una expresión aproximada, válida solo en una parte del dominio ó en tiempos pequeños). El ángulo  $\alpha$  geométricamente está dado por  $\alpha = \arctan(dx/dy)$  y considerando que cerca del tope el ángulo es pequeño, este se puede aproximar a  $\alpha \sim dx/dy$ , lo cual se puede obtener al derivar la ecuación (6). Por lo tanto,  $dx/dy \sim \sqrt{t/2y} \sim \alpha$ . También para ángulos pequeños se tiene que  $\sin(\alpha) \sim \alpha$ . Reemplazando  $\sin(\alpha) \sim \sqrt{t/2y}$  en la ecuación (3) y posteriormente llevando la expresión (6) a (3), se puede obtener que la velocidad de un punto material en la dirección  $y$  es  $dy/dt = -1/2$ , lo que al ser integrado con respecto a  $t$  resulta,  $y \sim y_0 - \frac{t}{2}$ , pero como en  $t = 0$ , todos los puntos se encuentran a lo largo del eje  $y$  y específicamente en el tope, donde la ecuación fue desarrollada  $y = 1$ , por lo tanto,  $y_0 \sim 1$ . Finalmente la ecuación que entrega la posición  $y$  de los puntos está dada por

$$y \sim y_0 - \frac{t}{2}, \quad y_0 \sim 1, \quad (7)$$

donde  $y_0$  es la posición inicial de los puntos materiales que se originan en el eje  $y$ , válida sólo para puntos cercanos al tope, es decir,  $y \approx 1$ .

De la ecuación (7) se puede apreciar como un punto material que fue originado en el tope  $y \approx 1$ , se mueve a una velocidad vertical de  $-1/2$ . Esto conlleva que desde el tope superior del depósito aparezcan nuevos puntos materiales para  $t > 0$ , los cuales forman el frente de propagación en los puntos cercanos al tope superior. A estos nuevos puntos se les llama en la continuación del trabajo como puntos inyectados y el tiempo al cual son inyectados se les denomina como  $t_{\text{inj}}$ . En la Figura 2 se puede apreciar como un punto que se origina en  $y = 1$  a un tiempo  $t = 0$ , luego de un tiempo  $t$  se encuentra a una altura menor y a partir de esta altura hacia arriba el frente esta compuesto de puntos inyectados. A partir de este hecho es que se busca un modelo que permita establecer la evolución del frente sin la necesidad de tener que considerar la existencia de puntos inyectados y se plantea como solución un modelo en base a coordenadas Eulerianas, ya que este tipo de modelos no requiere el seguimiento continuo de los puntos materiales, más bien fija un punto físico y mide como evoluciona éste en el espacio.

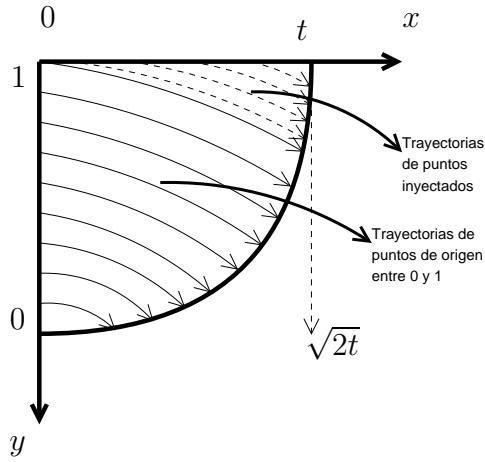


Figura 2 – Descripción de las trayectorias que siguen los puntos que son inyectados en el frente y los puntos originales  $y \in [0, 1]$ .

De la Figura 2 es preciso destacar que los puntos inyectados lo hacen a un tiempo determinado como  $t_{\text{inj}}$  el cual pertenece al rango  $0 < t_{\text{inj}} < t$ , estos puntos materiales forman parte del frente y para calcular su posición en función del tiempo  $t$  y del tiempo al cual fueron inyectados  $t_{\text{inj}}$ , es que se calcula una fórmula analítica en base un análisis de similaridad.

Utilizando la formulación Lagrangiana se deduce el modelo Euleriano. En el modelo Euleriano se considera que la velocidad de propagación del frente es  $U$ , por lo tanto,  $U = \dot{\mathbf{x}}$ . Además se define a  $U$  como,  $U = (u, v)$ , lo cual implica que  $\frac{dx}{dt} = u$  y que  $\frac{dy}{dt} = v$  ( $u$  y  $v$  corresponden a las velocidades de propagación para el modelo Euleriano, en la dirección  $x$  e  $y$ , respectivamente). Para el planteamiento del modelo Euleriano se utilizará la ecuación de Hamilton-Jacobi (esta ecuación es usada en los “level set methods”[12]), la cual expresada en su forma más general se representa como,

$$\phi_t + H(\nabla_x \phi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (8)$$

donde  $\phi = \phi(x, t)$ , y el Hamiltoniano  $H$ , depende de  $\nabla_x \phi$  y en algunos casos también de  $x$  y  $t$ . Los “level set methods” son una técnica geométrica basada en la evolución de curvas, o de superficies para el caso de tres dimensiones. Su propósito inicial fue el de resolver problemas que involucraban el movimiento de curvas y superficies, por ejemplo, la propagación del fuego y el procesamiento de imágenes [12]. El método empieza con una función arbitraria  $\phi = \phi(x, y)$  (en el caso de superficies en 3D) y esta se propaga para recuperar formas y curvas de interés en una dimensión menor a través de sus líneas de nivel, estas curvas se propagan con una velocidad, en una dirección normal a la curva, a través de la evolución de la superficie en 3D, ver Figura 3.

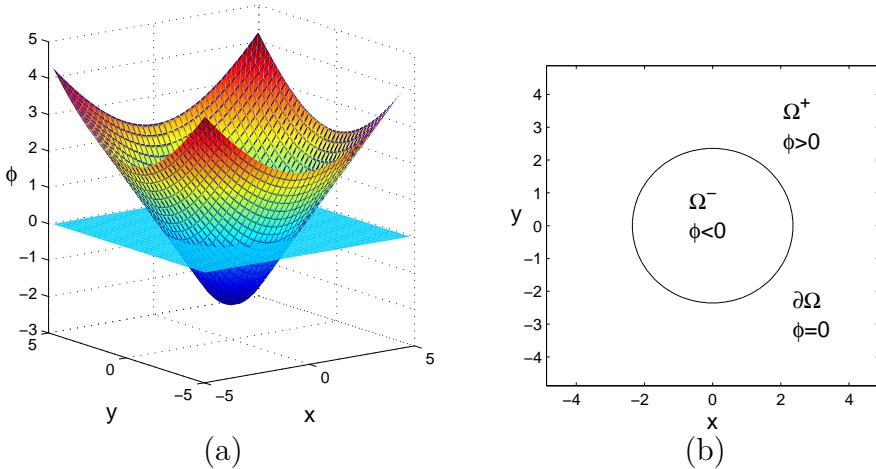


Figura 3 – Evolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi  $\phi_t + \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + 1} = 0$ , con condición inicial  $\phi(x, y, 0) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ , sobre el dominio  $x \in [-5, 5]$  e  $y \in [-5, 5]$ . (a) Muestra como la superficie está siendo intersectada por el plano  $xy$ , este plano marca donde  $\phi = 0$ . (b) Se observa como esta intersección corresponde a una circunferencia, que puede considerarse como el contorno.

En la Figura 3(b), se define como interfase a  $\partial\Omega = \{(x, y) | \phi(x, y) = 0\}$ , y a  $\Omega^- = \{(x, y) | \phi(x, y) < 0\}$  se refiere como la parte del dominio dentro del contorno, y por último a  $\Omega^+ = \{(x, y) | \phi(x, y) > 0\}$  se le define como la parte externa de la interfase (la asignación de los valores negativos dentro de  $\phi$  es arbitraria y se pueden intercambiar por valores positivos dentro y negativos fuera, según conveniencia). En general, en  $\mathbb{R}^n$ , estos subdominios son de dimensión  $n$ , mientras que la interfase tiene dimensión  $n - 1$ , es decir, la función implícita  $\phi(x)$  se define para todas las  $x \in \mathbb{R}^n$  y su isocontorno tiene dimensión  $n - 1$  [11].

## 2 Materiales y métodos

En esta sección se detalla el modelo Euleriano de espuma-petróleo y se da a conocer el método numérico mediante el cual se resuelve. También se muestra la relación entre el modelo Lagrangino y el modelo Euleriano.

### 2.1 Modelo matemático

Se utilizan conceptos de ecuaciones de balance, donde se especifican las velocidades de propagación del frente. En particular se expresa la normal del frente en función de la variable de solución de la ecuación. En el modelo, la variable desconocida  $\phi := \phi(x, y, t)$  depende de dos dimensiones espaciales y del tiempo y su solución está expresada implícitamente por la línea de nivel cero  $\phi = 0$ , la cual toma valores positivos al lado derecho del frente de propagación ( $\phi > 0$ ), zona que corresponde a petróleo y toma valores negativos al lado izquierdo del frente ( $\phi < 0$ ), zona que corresponde a la espuma, ver Figura 4. La formulación del modelo corresponde a la forma de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para dos dimensiones

espaciales. Para la evolución de  $\phi$  se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

La variación de  $\phi$  en el tiempo se ve influenciada en cada dirección por las respectivas velocidades de propagación del frente  $u$  y  $\nu$ , para estimar estas velocidades se tiene la siguiente igualdad, la cual fue establecida en el modelo Lagrangiano,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{y}{s} \mathbf{n}, \quad (10)$$

donde la normal  $\mathbf{n}$  del frente de propagación, para el modelo Euleriano, se define según se establece por [16] como,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}. \quad (11)$$

La longitud de trayectoria  $s$ , evoluciona de forma similar a  $\phi$ , pero su evolución en cada punto es igual a  $\|U\|_2$ , es decir,  $\sqrt{u^2 + \nu^2}$ , esto según se especifica en la ecuación (4). Por lo tanto, para la evolución de  $s$  en el tiempo, se utiliza una expresión de Hamilton-Jacobi con un término reactivo, lo cual resulta

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + \nu \frac{\partial s}{\partial y} = \sqrt{u^2 + \nu^2}. \quad (12)$$

En la Figura 4 se muestra un bosquejo del modelo Euleriano y se especifican en ella la velocidad  $U$  a la que mueve el frente, la trayectoria  $s$  y los valores de  $\phi$  en cada lado de la línea de nivel cero.

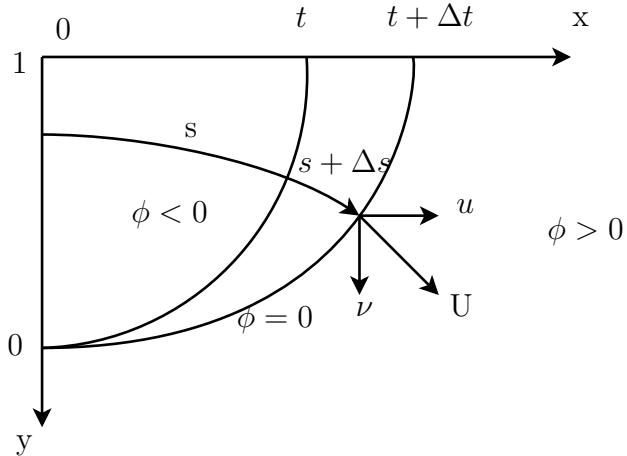


Figura 4 – Modelo Euleriano del frente espuma-petróleo. Se muestra la velocidad  $U$  a la que mueve el frente en cada punto y cómo se descompone esta en cada dirección, también se señala cuál es la línea de nivel cero y se muestra un paso evolución del frente, además se puede apreciar el crecimiento que experimenta un punto en cuanto a su trayectoria  $s$ . Al lado derecho del frente la función  $\phi > 0$  y al lado izquierdo  $\phi < 0$  lo cual representa el petróleo y la espuma, respectivamente. Como se mencionó en la sección 1, el dominio sobre el cual se desarrolla el modelo es  $x \in [0, \infty)$  e  $y \in [0, 1]$ .

Con el objetivo de obtener una versión simplificada del modelo, se reemplaza la ecuación (11) en (10) y este resultado es reemplazado en las expresiones (9) y (12), de lo que resulta

$$\phi_t + \frac{y}{s} \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} = 0, \quad (13)$$

y para la evolución de  $s$  se tiene que

$$s_t + \frac{y}{s} \left( \frac{\phi_x s_x + \phi_y s_y}{\|\nabla \phi\|_2} \right) = \frac{y}{s} \|\nabla \phi\|_2,$$

o bien,

$$s_t + \frac{y}{s} \left( \frac{\phi_x s_x + \phi_y s_y}{\|\nabla \phi\|_2} - 1 \right) = 0. \quad (14)$$

Generalizando,

$$\phi_t + H(y, s, \nabla \phi) = 0 \quad (15)$$

$$s_t + G(y, s, \nabla s, \nabla \phi) = 0, \quad (16)$$

donde ambas ecuaciones (15) y (16) deben ser resueltas de forma acoplada, siendo  $H$  y  $G$  los respectivos Hamiltonianos de cada ecuación.

Las condiciones de frontera ( $CF$ ) del sistema acoplado de (15)-(16) son

$$\begin{aligned} CF_1 &\Rightarrow \phi(x, y=1, t) = x - \sqrt{2t}, \\ CF_2 &\Rightarrow s(x, y=1, t) = \sqrt{2t}. \end{aligned}$$

Las condiciones de iniciales ( $CI$ ) del sistema acoplado de (15)-(16) son

$$\begin{aligned} CI_1 &\Rightarrow \phi(x, y, t=0) = x - \varepsilon, \\ CI_2 &\Rightarrow s(t, x, t=0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon \ll 1$ . La  $CF_1$  surge de lo establecido por [6] y [7], lo cual establece que la evolución del frente en el tope, es decir, en  $y = 1$  es igual a  $\sqrt{2t}$ . Por lo tanto, la recta generada de la condición inicial en  $y = 1$  se mueve a través de la línea de nivel cero a una velocidad de  $\sqrt{2t}$ . La  $CF_2$  establece que en el tope superior, es decir, en  $y = 1$  la trayectoria evoluciona según lo establecido en [6] y [7], o sea, para cualquier  $t > 0$ ,  $s(x, y=1, t) = \sqrt{2t}$ . La  $CI_1$  establece que en el tiempo  $t = 0$ , la línea de nivel cero permanece a lo largo del eje  $y$  y se mueve esta inicialmente en  $-\varepsilon$  para estar en corcordancia con la  $CI_2$ . La  $CI_2$  establece que en el tiempo  $t = 0$  la trayectoria inicial de todos los puntos materiales del frente es  $s(x, y, t=0) = \varepsilon$ , ya que según esta planteado el modelo,  $s$  no puede ser exactamente igual a cero, ya que aparece como divisor.

Finalmente, el modelo a resolver consiste en el sistema de ecuaciones (15)-(16), con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera.

## 2.2 Esquema numérico

Para llevar a cabo la solución numérica del modelo matemático y simulación computacional del fenómeno, primero se debe contar con una versión discretizada de las ecuaciones, para lo cual se utiliza un esquema tipo Godunov de volúmenes finitos, que fue desarrollado en [9]. Se necesita realizar una reconstrucción a trozos de la variable conservada en el instante  $t^n$ , para luego ser evolucionada al instante  $t^{n+1}$ .

### 2.2.1 Discretización espacial

Para realizar la discretización espacial se divide el dominio en la dirección  $x$  e  $y$  en  $N_x$  y  $N_y$  elementos, respectivamente, con esto se obtiene  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , posteriormente el dominio se incrementa  $\frac{\Delta x}{2}$  en ambos sentidos de la dirección  $x$  y  $\frac{\Delta y}{2}$  en ambos sentidos de la dirección  $y$ , esto con el objetivo de que el centro de cada volumen generado pueda incluir los extremos del dominio, tal como se muestra en el caso de ejemplo de la Figura 5, que incluye los puntos  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  y  $(1,1)$  como nodos centrales de cada volumen a desarrollar.

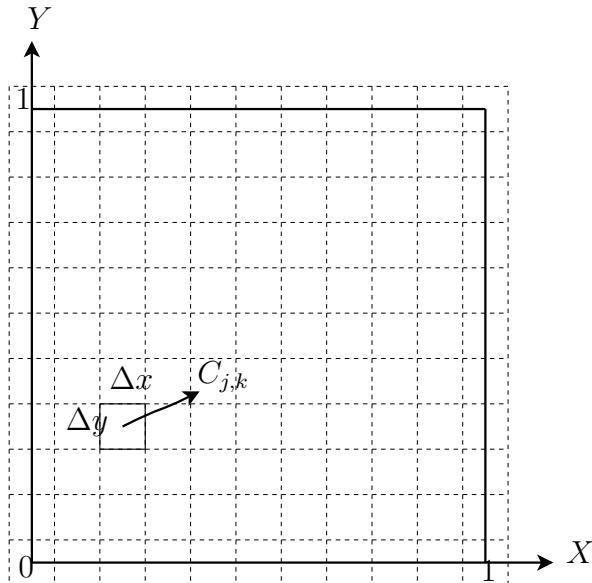


Figura 5 – Dominio  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ . Particiones de los respectivos intervalos, los cuales forman los volúmenes a desarrollar. El valor del centro de cada volumen  $C_{j,k} = C_{x_j,y_k}$  se asume constante para todo el volumen, que en este caso posee un área de  $0,1 \times 0,1$ .

### 2.2.2 Flujo numérico

Para resolver el sistema utilizaremos esquemas de tipo Godunov, específicamente el esquema “semidiscrete central-upwind” para ecuaciones 2D Hamilton-Jacobi, esquema que fue desarrollado en [9]. Al comenzar a resolver el modelo se asume que en el tiempo  $t = t_n$  la aproximación discreta para los puntos que dan una solución  $\phi_{j,k}^n \approx \phi(x_j, y_k, t^n)$ , ya han sido calculados y para evolucionar estos puntos al tiempo  $t = t^{n+1}$ , se utiliza el flujo numérico de [9], el cual establece que  $\phi$  evoluciona a una tasa de

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \phi_{j,k}(t) \\
&= - \frac{\frac{a_{j,k}^- b_{j,k}^- H(y, s, \phi_x^+, \phi_y^+) - a_{j,k}^- b_{j,k}^+ H(y, s, \phi_x^-, \phi_y^-) - a_{j,k}^+ b_{j,k}^- H(y, s, \phi_x^-, \phi_y^+) - a_{j,k}^+ b_{j,k}^+ H(y, s, \phi_x^-, \phi_y^-)}{(a_{j,k}^+ - a_{j,k}^-)(b_{j,k}^+ - b_{j,k}^-)}} \\
&\quad - \frac{\frac{a_{j,k}^+ a_{j,k}^-}{a_{j,k}^+ - a_{j,k}^-} (\phi_x^+ - \phi_x^-) - \frac{b_{j,k}^+ b_{j,k}^-}{b_{j,k}^+ - b_{j,k}^-} (\phi_y^+ - \phi_y^-)}.
\end{aligned}$$

Y para  $s$  una expresión similar,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} s_{j,k}(t) \\
&= - \frac{\frac{a_{j,k}^- b_{j,k}^- G(y, s, \phi_x^+, \phi_y^+, s_x^+, s_y^+) - a_{j,k}^- b_{j,k}^+ G(y, s, \phi_x^+, \phi_y^-, s_x^+, s_y^-) - a_{j,k}^+ b_{j,k}^- G(y, s, \phi_x^-, \phi_y^+, s_x^-, s_y^+) - a_{j,k}^+ b_{j,k}^+ G(y, s, \phi_x^-, \phi_y^-, s_x^-, s_y^-)}{(a_{j,k}^+ - a_{j,k}^-)(b_{j,k}^+ - b_{j,k}^-)}} \\
&\quad - \frac{\frac{a_{j,k}^+ a_{j,k}^-}{a_{j,k}^+ - a_{j,k}^-} (s_x^+ - s_x^-) - \frac{b_{j,k}^+ b_{j,k}^-}{b_{j,k}^+ - b_{j,k}^-} (s_y^+ - s_y^-)},
\end{aligned}$$

donde  $\phi_x^\pm$ ,  $\phi_y^\pm$ ,  $s_x^\pm$  y  $s_y^\pm$  son las derivadas en  $x$  e  $y$ , en ambas direcciones (derecha e izquierda del dominio). Las velocidades locales de propagación  $a_{j,k}^\pm$  y  $b_{j,k}^\pm$  son estimadas como sigue

$$a_{j,k}^+ := \max_{\pm} \{H_u(y, s, \phi_x^\pm, \phi_y^\pm)\}_+ \quad a_{j,k}^- := \min_{\pm} \{H_u(y, s, \phi_x^\pm, \phi_y^\pm)\}_-, \quad (17)$$

$$b_{j,k}^+ := \max_{\pm} \{H_v(y, s, \phi_x^\pm, \phi_y^\pm)\}_+ \quad b_{j,k}^- := \min_{\pm} \{H_v(y, s, \phi_x^\pm, \phi_y^\pm)\}_-, \quad (18)$$

donde  $(\cdot)_+ := \max(\cdot, 0)$  y  $(\cdot)_- := \min(\cdot, 0)$ . Para las ecuaciones (17) y (18) tenemos que,

$$H_u = \frac{y}{s} \left( \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right), \quad H_v = \frac{y}{s} \left( \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right). \quad (19)$$

Además, es fácil demostrar que  $H_u = G_u$  y  $H_v = G_v$  ( $H_u$  denota la derivada de  $H$  con respecto a  $\phi_x$ ,  $H_v$  denota la derivada de  $H$  con respecto a  $\phi_y$ ,  $G_u$  denota la derivada de  $G$  con respecto a  $s_x$  y  $G_v$  denota la derivada de  $G$  con respecto a  $s_y$ ), dado que  $\nabla H = \nabla G$ . Por lo tanto, para ambas ecuaciones (15) y (16), las velocidades de propagación son iguales, es decir, tanto para la evolución de  $\phi$  como para la evolución de  $s$  se tiene la misma velocidad de propagación.

Para calcular  $\phi_x^\pm$  y  $\phi_y^\pm$  supongamos que hemos calculado los valores de los puntos de  $\phi$  en el tiempo  $t = t_n$ . Luego realizamos una interpolación cuadrática continua por partes, tanto para la dimensión  $x$  como  $y$  (las expresiones  $s_x^\pm$  y  $s_y^\pm$  son obtenidas de manera similar). Para cualquier  $y$  fijo tenemos el siguiente polinomio interpolante

$$\tilde{\phi}(x, t^n) = \phi_j^n + \frac{(\Delta\phi)_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} (x - x_j) + \frac{(\Delta\phi)'_{j+\frac{1}{2}}}{2(\Delta x)^2} (x - x_j)(x - x_{j+1}), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (20)$$

donde  $(\Delta\phi)_{j+\frac{1}{2}}^n := \phi_j^n - \phi_{j+\frac{1}{2}}^n$  y  $(\Delta\phi)'_{j+\frac{1}{2}} / (\Delta x)^2$  es una aproximación de la segunda derivada de  $\phi_{xx}(x_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$ . Para estimar el valor de  $(\Delta\phi)'_{j+\frac{1}{2}}$  en este documento usaremos “minmod limiters”.

$$(\Delta\phi)'_{j+\frac{1}{2}} = \text{minmod}\left(\theta\left[(\Delta\phi)_{j+\frac{3}{2}}^n - (\Delta\phi)_{j+\frac{1}{2}}^n\right], \frac{1}{2}\left[(\Delta\phi)_{j+\frac{3}{2}}^n - (\Delta\phi)_{j-\frac{1}{2}}^n\right], \theta\left[(\Delta\phi)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\Delta\phi)_{j-\frac{1}{2}}^n\right]\right),$$

donde  $\theta \in [1, 2]$ , y la función multivariable minmod es definida por

$$\text{minmod}(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \min_j\{x_j\} & \text{si } x_j > 0 \quad \forall j, \\ \max_j\{x_j\} & \text{si } x_j < 0 \quad \forall j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (21)$$

A partir de (20) se obtiene que

$$\phi_x^\pm = \frac{(\Delta\phi)_{j\pm\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \mp \frac{(\Delta\phi)'_{j\pm\frac{1}{2}}}{2(\Delta x)^2}. \quad (22)$$

Y para cualquier  $x$  fijo tenemos que

$$\phi_y^\pm = \frac{(\Delta\phi)_{k\pm\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \mp \frac{(\Delta\phi)'_{k\pm\frac{1}{2}}}{2(\Delta y)^2}. \quad (23)$$

Para la discretización temporal de  $\phi$  y de  $s$  utilizamos el método de Euler,

$$\frac{d}{dt}\phi_{j,k}(t) \approx \frac{\phi_{j,k}^{n+1} - \phi_{j,k}^n}{\Delta t}, \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}s_{j,k}(t) \approx \frac{s_{j,k}^{n+1} - s_{j,k}^n}{\Delta t}. \quad (25)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones de Hamilton-Jacobi primero que todo se establece que el valor de  $s(x, y, t = 0) = \varepsilon$ , sobre todo el dominio, ya que computacionalmente si se asume como cero se genera difusividad numérica, puesto que en (13) y en (14) aparece el término de  $s$  como divisor.

Al resolver las ecuaciones, inicialmente se resuelve primero  $\phi$  tomando valores de  $s$  muy pequeños, luego a partir de dichos valores se realiza la evolución de  $s$ . En el paso siguiente de evolución de  $\phi$  se utiliza el nuevo valor de  $s$ . Los cálculos se efectúan en ese orden, el número de iteraciones que sean necesarias, hasta alcanzar el tiempo requerido.

Para asegurar estabilidad numérica en la evolución de las funciones se establece según [8] que

$$\Delta t < \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{a_{j,k}^+},$$

lo cual implica que el tamaño de paso en el tiempo se va adaptando conforme las funciones  $\phi$  y  $s$  evolucionan. En este trabajo se utiliza un valor para  $\theta = 1,5$  y el número CFL es igual a 0.475, esto según se sugiere en [9]. En consecuencia,

$$\Delta t = 0,475 \left( \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{a_{j,k}^+} \right).$$

### 2.2.3 Reinicialización

En los “level set methods”, comúnmente la función de “level set” de  $\phi(x, y, t)$  desarrolla irregularidades durante su evolución debido a errores numéricos y eventualmente se destruye la estabilidad [13]. Para corregir esto, se introduce una solución numérica conocida como reinicialización, la cual restaura la regularidad de  $\phi$  y mantiene estable su evolución en el tiempo. La reinicialización se hace deteniendo periódicamente la evolución (en cada paso del tiempo) y convirtiendo la función  $\phi$  degradada a una función de distancia, ver [12]. Un método para realizar la reinicialización es resolver la ecuación de evolución obtenida de [13],

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{Sign}(\phi)(1 - |\nabla \phi|),$$

donde  $\text{Sign}(\phi)$  es una función signo que toma el valor de 1 en  $\Omega^+$ , -1 en  $\Omega^-$  y 0 en la interfase  $\partial\Omega$ . Este método funciona siempre que  $\phi$  se mantenga relativamente suave, pero no siempre lo es, ya que la interfase puede moverse incorrectamente. En el desarrollo de este trabajo se utiliza la función sugerida en [14], la cual corresponde a

$$\text{Sign}(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + |\nabla \phi|^2 (\Delta x)^2}}. \quad (26)$$

Al usar esta ecuación, el valor de  $\text{Sign}$  se debe actualizar constantemente conforme evoluciona la función  $\phi$ . Cabe destacar que la reinicialización ayuda a obtener curvas más suaves para la curvatura.

### 2.2.4 Cálculo de ángulo $\alpha$ y curvatura $\kappa$

Un mecanismo de comparación del modelo Euleriano y el modelo Lagrangiano corresponde a la obtención de curvas similares tanto para el ángulo como a la curvatura. La normal  $\mathbf{n}$  del frente, para cada punto, es un ángulo  $\alpha$  medido desde una recta horizontal paralela al eje  $x$ . Para calcular el ángulo que forman los puntos del frente en un tiempo  $t$  determinado, se comienza por la obtención de una representación explícita de la curva de nivel cero, esto se realiza mediante una interpolación lineal en la data de  $\phi$ . Una vez obtenidos todos los puntos  $x_i, y_i$  que forman el frente, el ángulo se aproxima como,

$$\alpha = \arctan \left( \frac{x_i - x_{i+1}}{y_i - y_{i+1}} \right),$$

donde  $i \in [1, N_y]$ .

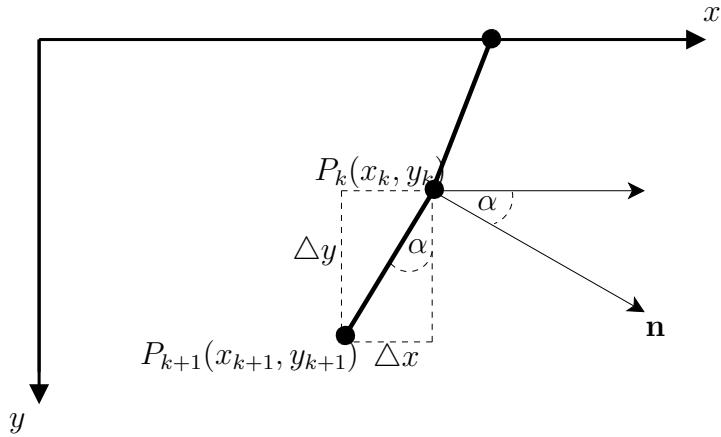


Figura 6 – En la figura se muestra como es medido el ángulo  $\alpha$  en función de las coordenadas espaciales de dos puntos que forman el frente espuma-petróleo.

Una vez calculado el ángulo  $\alpha$  para cada punto del frente, la curvatura se puede estimar como  $\kappa = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{S_{k+1} - S_k}$ , donde  $S$  es la distancias euclidianas entre dos puntos. En este caso,  $k \in [1, Ny - 1]$ . Una segunda forma de obtener la curvatura y que será utilizada en este trabajo, es calcularla en términos de  $\phi$ , mediante la función,

$$\kappa = \frac{\phi_{yy}\phi_x^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{xx}\phi_y^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{(3/2)}}, \quad (27)$$

según fue calculada en [13].

Tanto  $\alpha$  como  $\kappa$  se calculan numéricamente para distintos mallados y los resultados son mostrados en la sección 4.

### 3 Solución esquema Lagragiano con orden de error 2

Lo que se calcula a continuación es una expresión analítica para la posición  $y$  de los puntos que nacen cerca del tope en  $y \sim 1$ , en cualquier instante de tiempo  $t$ . Esta expresión se desarrolla realizando expansiones de Taylor de hasta orden 2. Se comienza a partir de la ecuación (3). También a partir de la ecuación (7) se tiene que la ubicación de los puntos  $y$  en función de la posición inicial  $y_0$  es,  $y \sim y_0 - \frac{t}{2}$ , la cual es una expresión de orden 1 y se utiliza como base para la reconstrucción de una fórmula de orden superior. También se tiene a partir de (5) que la variación de  $s$  en función del tiempo es  $\frac{ds}{dt} \sim \frac{y}{s}$ .

La expresión (7) es válida para tiempos pequeños  $t \ll 1$  y sólo para puntos materiales que se originan cerca del tope  $y_0 \sim 1$ . A partir de (5) se logra obtener una expresión aproximada para  $s$ .

Se comienza por reemplazar el valor de  $y$ , que está dado por la ecuación (7), en la ecuación (5), con lo cual se obtiene

$$\frac{ds^2}{dt} \sim 2y \sim 2 \left[ y_0 - \frac{t}{2} \right].$$

Luego, integramos ambos lados de la expresión anterior en función del tiempo,

$$s^2 \sim 2y_0t - \frac{t^2}{2}.$$

Y por último despejamos  $s$ ,

$$s \sim \sqrt{2y_0t - \frac{t^2}{2}}. \quad (28)$$

A través de una expansión de Taylor de orden 1 con respecto a la variable  $t$  sobre el término  $\left(1 - \frac{t^2}{4y_0t}\right)^{-\frac{1}{2}}$ , la trayectoria  $1/s$  en función del tiempo y la posición inicial  $y_0$  se tiene que

$$\frac{1}{s} \sim (2y_0t)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t^2}{4y_0t}\right)^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2y_0t}} \left(1 + \frac{t}{8y_0}\right). \quad (29)$$

A partir de la Figura 6 se puede determinar que el ángulo  $\alpha \sim \arctan(\frac{dx}{dy})$ , por lo tanto  $\sin(\alpha) = \sin(\arctan(\frac{dx}{dy}))$ , a lo cual se le realiza una expansión de Taylor de orden 3 con respecto a la variable  $\frac{dx}{dy}$ , con lo que se obtiene que

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{dx}{dy}\right)\right) \sim \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^3. \quad (30)$$

Según se determinó a través del análisis de similaridad (ver apéndice A.1) la posición del frente está dada para cada tiempo  $t$  por la ecuación

$$x \sim \sqrt{2yt + \frac{t^2}{6}}. \quad (31)$$

Lo cual utilizaremos para obtener  $\frac{dx}{dy}$ . Se toma el cuadrado en ambos lados de (31) y el resultado es derivado con respecto a  $y$ , con lo cual se obtiene

$$\frac{dx}{dy} \sim \frac{t}{x}. \quad (32)$$

Ahora en (32) se reemplaza (31) y (7), para obtener

$$\frac{dx}{dy} \sim \frac{t}{\sqrt{2yt + \frac{t^2}{6}}} \sim \frac{t}{\sqrt{2y_0t - \frac{5t^2}{6}}} \sim \frac{t}{\sqrt{2y_0t}} \left( \frac{1}{(1 - \frac{5t}{12y_0})^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Realizando una expansión de Taylor de orden 1 en la variable  $t$  sobre el término  $\frac{1}{(1 - \frac{5t}{12y_0})^{\frac{1}{2}}}$  resulta que

$$\frac{dx}{dy} \sim \sqrt{\frac{t}{2y_0}} \left(1 + \frac{5t}{24y_0}\right). \quad (33)$$

Reemplazando (33) en (30), obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &\sim \sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(1 + \frac{5t}{24y_0}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(1 + \frac{5t}{24y_0}\right)\right)^3 \\ &\sim \sqrt{\frac{t}{2y_0}} + \sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(\frac{5t}{24y_0}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{t}{2y_0}}\right)^3\left(1 + \frac{5t}{24y_0}\right)^3.\end{aligned}$$

Debido a que la aproximación es realizada para tiempos pequeños  $t \ll 1$  el término  $\left(1 + \frac{5t}{24y_0}\right)^3 \sim 1$ , con lo cual la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &\sim \sqrt{\frac{t}{2y_0}} + \sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(\frac{5t}{24y_0}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(\frac{t}{2y_0}\right) \\ &\sim \sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(1 + \frac{5t}{24y_0} - \frac{t}{4y_0}\right).\end{aligned}$$

Simplificando y reduciendo términos semejantes se obtiene

$$\operatorname{sen}(\alpha) \sim \sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(1 - \frac{t}{24y_0}\right). \quad (34)$$

Al reemplazar (7), (29) y (34) en (3) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &\sim -\frac{1}{\sqrt{2y_0 t}}\left(1 + \frac{t}{8y_0}\right)\left(y_0 - \frac{t}{2}\right)\sqrt{\frac{t}{2y_0}}\left(1 - \frac{t}{24y_0}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2} + \frac{5t}{24y_0} + \frac{3t^2}{128y_0^2} - \frac{t^3}{768y_0^3}.\end{aligned}$$

Luego integrando lo anterior con respecto a  $t$  resulta

$$y(t) \sim -\frac{t}{2} + \frac{5t^2}{48y_0} + \frac{3t^3}{384y_0^2} - \frac{t^4}{3072y_0^3} + y_0,$$

donde  $y_0$  es la constante de integración que debemos buscar. Se sabe que cuando  $t = 0$ ,  $y(0) = y_0$ . Además, lo que nos interesa saber ocurre a tiempos  $t \ll 1$ , los términos  $\frac{3t^3}{384y_0^2}$  y  $\frac{t^4}{3072y_0^3}$  son muy pequeños y por lo tanto despreciables para este caso, así obtenemos finalmente que

$$y(t) \sim 1 - \frac{t}{2} + \frac{5t^2}{48}, \quad t \in [0, \infty], \quad (35)$$

donde  $t$  corresponde al tiempo que se desea obtener la posición del punto. La ecuación (35) corresponde a un aproximación de la posición  $y$  de los puntos que se mueven a partir del eje  $y \sim 1$ , esta ecuación posee un error de orden 3. Se puede determinar que un punto material

que nace en  $y_0 = 1$ , después de transcurrido un tiempo  $t$ , deja de estar a la altura  $y = 1$ , por lo tanto, es necesario determinar una ecuación que entregue la ubicación del frente desde este punto hacia arriba. Tal como se puede apreciar en la Figura 2, nacen nuevas trayectorias a partir del tope superior. Para determinar la ubicación de estos puntos es que se realiza la siguiente aproximación.

Asumiendo que el ángulo  $\alpha$  varía en los puntos cerca del tope superior de la forma

$$\alpha \sim \frac{t - t_{\text{inj}}}{\sqrt{2t}}, \quad t_{\text{inj}} \in [0, t]. \quad (36)$$

Una discusión de la validez de la aproximación de la ecuación (36), se desarrolla en el apéndice A.2.

Se puede demostrar, realizando un reemplazo de la expresión (36) y (7) en la ecuación (3) y posteriormente a través de una expansión de Taylor de orden 1 con respecto a  $\alpha$  sobre  $\sin(\alpha)$ , que

$$y = 1 - \frac{1}{2} \left( t - t_{\text{inj}} - t_{\text{inj}} \log \left( \frac{t}{t_{\text{inj}}} \right) \right), \quad t_{\text{inj}} \in [0, t]. \quad (37)$$

Además, se tiene que (la obtención de esta expresión se realiza en el apéndice A.2)

$$x \sim \sqrt{2t - \frac{5t^2}{6} + 2t_{\text{inj}}t - \frac{8t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}}{3} + t_{\text{inj}}t \log\left(\frac{t}{t_{\text{inj}}}\right) + \frac{3t_{\text{inj}}^2}{2}}, \quad t_{\text{inj}} \in [0, t]. \quad (38)$$

Las ecuaciones (37) y (38) poseen un error de orden 2, por lo que a continuación se realiza un aproximación de orden de error 3 para  $y$  en función de  $t$  y  $t_{\text{inj}}$ . Nuevamente comenzamos de la ecuación (3) y a partir de ésta es que se deben obtener todos sus términos en función de  $t$  y  $t_{\text{inj}}$ .

Para calcular la ecuación de trayectoria en función de  $t$  y  $t_{\text{inj}}$  comenzamos a partir de la ecuación (5). Primero integramos (5) desde 0 a  $t$ , considerando que de 0 a  $t_{\text{inj}}$  los valores de  $y \sim 1$  y que desde  $t_{\text{inj}}$  a  $t$  los valores de  $y$  corresponden a los de la ecuación (37), con cual obtenemos

$$\frac{1}{s} \sim \frac{1}{\sqrt{2t} \sqrt{1 + \frac{(t_{\text{inj}}^2 - t^2)}{4t} + \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{2}}}. \quad (39)$$

Luego se considera que el término  $(t_{\text{inj}}^2 - t^2)/4t + t_{\text{inj}} \log(t/t_{\text{inj}})/2$  es una corrección y se denomina como una variable  $z = (t_{\text{inj}}^2 - t^2)/4t + t_{\text{inj}} \log(t/t_{\text{inj}})/2$ . Realizando una expansión de Taylor de orden 1 en la expresión  $1/\sqrt{1+z}$  en  $z$ , la expresión (39) queda expresada como

$$\frac{1}{s} \sim \frac{1}{\sqrt{2t}} \left( 1 - \frac{(t_{\text{inj}}^2 - t^2)}{8t} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} \right). \quad (40)$$

Ahora para calcular  $\sin(\alpha)$  utilizamos la ecuación (30), pero antes requerimos de una expresión para  $\frac{dx}{dy}$  en función de  $t$  y  $t_{\text{inj}}$ , para lo cual usamos las expresiones (37) y (38).

$$\frac{dx}{dy} \sim \frac{dx/dt_{\text{inj}}}{dy/dt_{\text{inj}}} \Rightarrow 2x \frac{dx}{dy} \sim \frac{dx^2/dt_{\text{inj}}}{dy/dt_{\text{inj}}},$$

$$\frac{dx}{dy} \sim \frac{1}{2x} \left( \frac{dx^2/dt_{\text{inj}}}{dy/dt_{\text{inj}}} \right). \quad (41)$$

Calculados  $\frac{dx^2}{dt_{\text{inj}}}$  y  $\frac{dy}{dt_{\text{inj}}}$  por separado, se obtiene

$$\frac{dx^2}{dt_{\text{inj}}} \sim t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}}, \quad (42)$$

$$\frac{dy}{dt_{\text{inj}}} \sim \frac{1}{2} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}). \quad (43)$$

Posteriormente reemplazamos las expresiones (42), (43) y (38) en (41), con lo cual se obtiene

$$\frac{dx}{dy} \sim \frac{t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}}}{\sqrt{2t} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) \sqrt{1 - \frac{5t}{12} + t_{\text{inj}} - \frac{4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{2} + \frac{3t_{\text{inj}}^2}{4t}}}. \quad (44)$$

El término  $-5t/12 + t_{\text{inj}} - 4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}/3 + t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})/2 + 3t_{\text{inj}}^2/4t$  es considerado una corrección la cual se denota con la variable  $w = -5t/12 + t_{\text{inj}} - 4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}/3 + t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})/2 + 3t_{\text{inj}}^2/4t$ . Luego se realiza una expansión de Taylor de orden 1 sobre el término  $1/\sqrt{1+w}$  en  $w$ , con lo cual la expresión (44) resulta

$$\frac{dx}{dy} \sim \frac{\left( t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}} \right) \left( 1 + \frac{5t}{24} - \frac{t_{\text{inj}}}{2} + \frac{4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}}{6} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} - \frac{3t_{\text{inj}}^2}{8t} \right)}{\sqrt{2t} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}. \quad (45)$$

Ahora llevamos la ecuación (45) a (30) con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\sim -\frac{y}{s} \left[ \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dy} \right)^3 \right] \\ &\sim -\frac{1}{\sqrt{2t}} \left( 1 - \frac{(t_{\text{inj}}^2 - t^2)}{8t} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} \right) \left( 1 - \frac{1}{2}(t - t_{\text{inj}} - t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})) \right) \\ &\quad \cdot \left[ \left( \frac{\left( t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}} \right) \left( 1 + \frac{5t}{24} - \frac{t_{\text{inj}}}{2} + \frac{4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}}{6} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} - \frac{3t_{\text{inj}}^2}{8t} \right)}{\sqrt{2t} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\left( t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}} \right) \left( 1 + \frac{5t}{24} - \frac{t_{\text{inj}}}{2} + \frac{4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}}{6} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} - \frac{3t_{\text{inj}}^2}{8t} \right)}{\sqrt{2t} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})} \right)^3 \right], \end{aligned}$$

donde el término  $\left(1 + \frac{5t}{24} - \frac{t_{\text{inj}}}{2} + \frac{4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}}{6} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} - \frac{3t_{\text{inj}}^2}{8t}\right)^3 \sim 1$ , ya que esta aproximación es realizada para tiempo pequeños, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} \sim & -\frac{1}{\sqrt{2t}} \left(1 - \frac{(t_{\text{inj}}^2 - t^2)}{8t} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{2}(t - t_{\text{inj}} - t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}))\right) \\ & \cdot \left[ \frac{\left(t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}}\right) \left(1 + \frac{5t}{24} - \frac{t_{\text{inj}}}{2} + \frac{4t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}}}{6} - \frac{t_{\text{inj}} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})}{4} - \frac{3t_{\text{inj}}^2}{8t}\right)^3}{\sqrt{2t} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\left(t - 4t_{\text{inj}}^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} + t \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}}) + 3t_{\text{inj}}\right)^3}{\sqrt{2t} \log(\frac{t}{t_{\text{inj}}})} \right) \right]. \quad (46) \end{aligned}$$

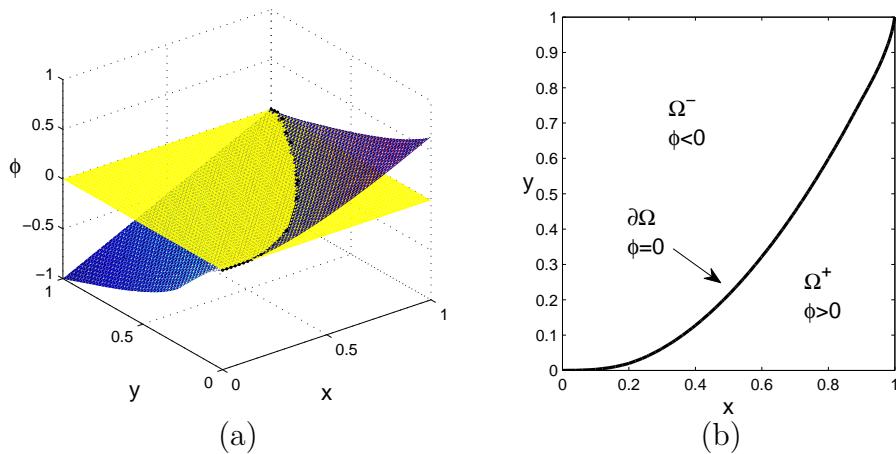
La ecuación (46) se resuelve mediante integración numérica y los resultados se muestran gráficamente en la sección 4. Para realizar la integración numérica se consideran como límites de integración el intervalo  $[t_{\text{inj}}, t]$ . Esta integral entrega como valores los puntos que forman el frente de propagación en el tope superior y cercano a este, con un error de orden 3, lo cual representa una mejor aproximación que la ecuación (37).

## 4 Resultados

En esta sección se dan a conocer los resultados de la simulación computacional del modelo Euleriano de las ecuaciones (15) y (16), los cuales se comparan con las ecuaciones analíticas (37), (38) y (46), obtenidas a través del análisis de las ecuaciones de similaridad.

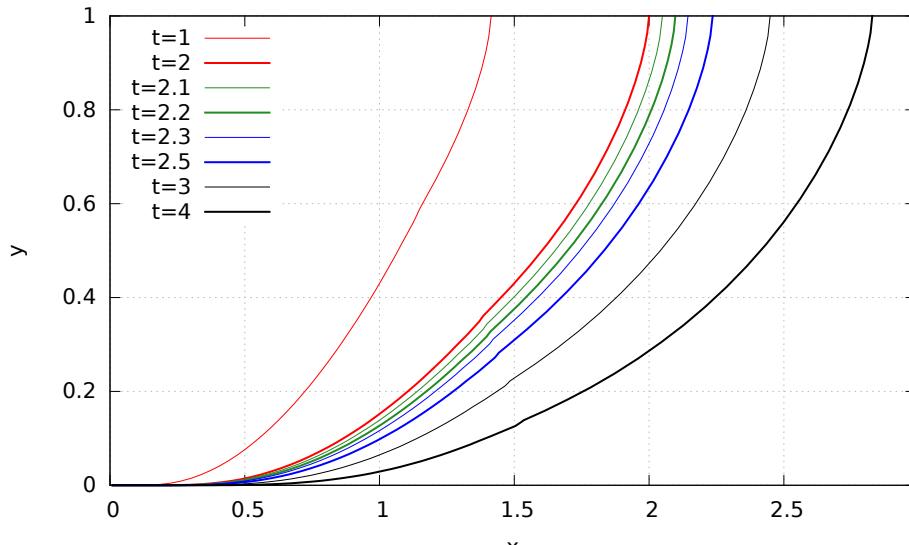
### 4.1 Simulación computacional

Como resultado de la simulación computacional, se obtiene una solución numérica del modelo Euleriano, las cuales se pueden apreciar gráficamente en las Figuras 7 y 8. En la Figura 7(a) se muestra la posición que alcanza la función  $\phi$  en un tiempo de evolución igual a  $t = 0.5$ , sobre el dominio  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ , además se destaca la intersección de  $\phi$  con el plano  $xy$ , lo cual representa el frente de propagación de espuma-petróleo. Una representación explícita del frente se puede apreciar en la Figura 7(b), donde también se destacan a modo de referencia los valores que toma  $\phi$  en cada lado de la línea de nivel cero y a lo largo de esta misma.

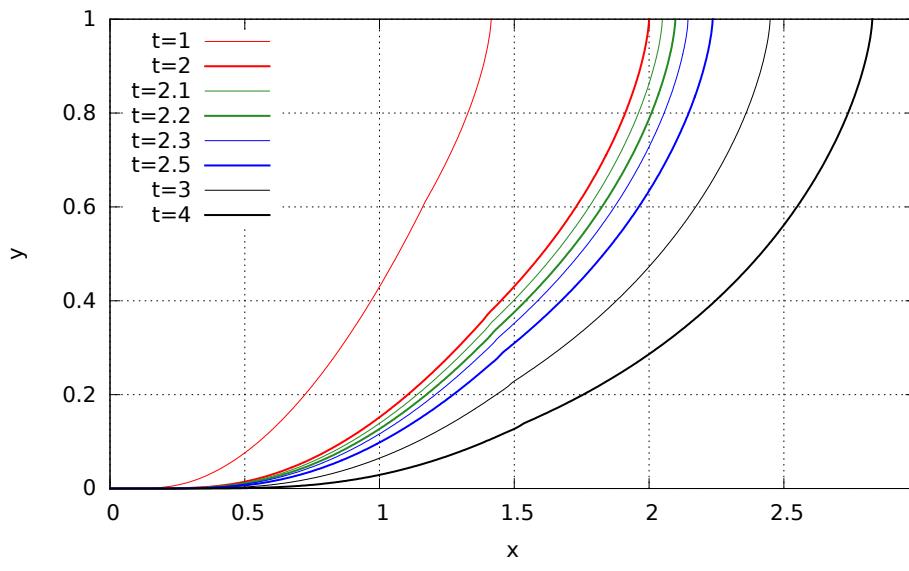


*Figura 7 – Evolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi del modelo Euleriano, dado por las ecuaciones (15) y (16), para la representación del frente espuma-petróleo, para un tiempo de evolución  $t = 0.5$  sobre el dominio  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ . (a) Muestra como la superficie está siendo intersectada por el plano  $xy$ , este plano marca donde  $\phi = 0$ . (b) Se observa como esta intersección corresponde a una representación explícita de la línea de nivel cero, además se muestran los valores que toma  $\phi$  sobre el dominio.*

En el gráfico de la Figura 8 se muestran los resultados del modelo “Pressure-driven growth”. Además, se muestran los resultados de la simulación computacional utilizando el modelo Euleriano, para los tiempos  $t \in \{1, 2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 3, 4\}$ . Las representaciones del modelo Euleriano son realizadas con un mallado de  $200 \times 200$ .



(a)

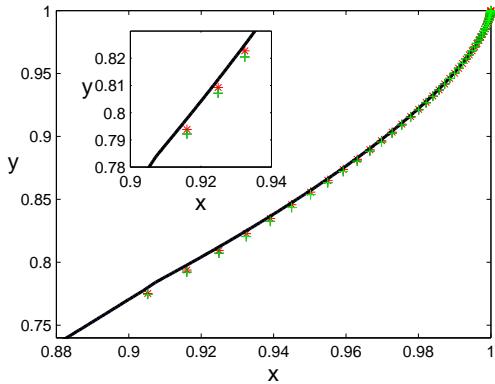


(b)

Figura 8 – Dominio  $[0, 2.99] \times [0, 1]$ . Posición del frente en tiempo  $t \in \{1, 2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 3, 4\}$ . (a) Modelo “Pressure-driven growth”, (b) Modelo Euleriano.

En la Figura 8 se puede apreciar que la solución numérica del modelo Euleriano entre resultados similares a los del modelo “Pressure-driven growth”, independiente del tiempo al cual se desea visualizar. A modo de comparación se realizan mediciones para el ángulo y la curvatura.

A continuación se muestra un gráfico (Figura 9) correspondiente a la integración numérica de la ecuación (46), de la cual se obtiene la posición  $y$  de los puntos del frente. Además se grafica en el mismo gráfico de la Figura 9 la ecuación (37), la cual es usada para obtener la posición de los puntos con un error mayor. En ambas curvas se utiliza la ecuación (38) para obtener la posición  $x$  de los puntos del frente.



*Figura 9 – Se grafica sobre el dominio  $x \in [0.88, 1]$  e  $y \in [0.74, 1]$  las soluciones analíticas de orden 1 y orden 2, de las ecuaciones que entregan los puntos del frente en función de los  $t_{\text{inj}}$ , es decir, de los puntos materiales que son inyectados al frente desde el tope superior. Con el símbolo “+” se muestra la gráfica de (38) versus (37), con el símbolo “\*” se grafica la integración numérica de (46) versus (38), esta integral se realizada desde  $t_{\text{inj}} \in [0, t]$ , con  $t = 0.5$ . Por último se grafica la solución numérica del modelo Euleriano la cual posee mayor exactitud (Representación realizada con 800 particiones sobre el intervalo), esta se visualiza en la línea continua.*

En la ampliación realizada en gráfico de la Figura 9, se puede apreciar que la solución analítica con un orden más alto, es decir, la que viene de la integración numérica de la ecuación (46) se acerca más a la solución numérica del modelo Euleriano, la cual es considerada más exacta, ya que la simulación fue realizada a través de una malla de  $800 \times 800$ , que es considerada como una malla fina.

En la Figura 10 se puede visualizar la comparación que se realiza a la longitud de trayectoria  $s$ , versus la posición de los puntos del frente. Este gráfico muestra la magnitud de  $x$  y de  $s$ , para distintos valores de  $y$ . En el gráfico también se puede apreciar que la trayectoria es levemente más grande que el avance del frente espuma-petróleo, esto con excepción al tope  $y \approx 1$ , donde  $s = x$ . Además, cabe señalar que lo que se visualiza en la Figura 10 corresponde a lo que se puede apreciar en la Figura 2 (la longitud de las trayectorias es mayor al avance del frente, para cada punto material).

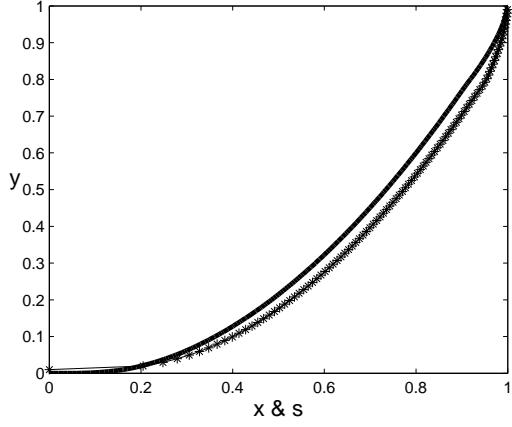


Figura 10 – Posición del frente espuma-petróleo y valores de la trayectoria en  $t = 0.5$ , sobre el dominio  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ . Con “\*” se grafica la trayectoria  $s$  y con “—” se grafica la posición del frente. El mallado es de  $100 \times 100$ .

## 4.2 Ángulo $\alpha$

En la Figura 11, se muestran los datos numéricos para el ángulo  $\alpha$  obtenido de la simulación del frente de propagación para  $t = 0.5$  y con un mallado  $N_x = N_y \in \{100, 200, 400, 800\}$  sobre el dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

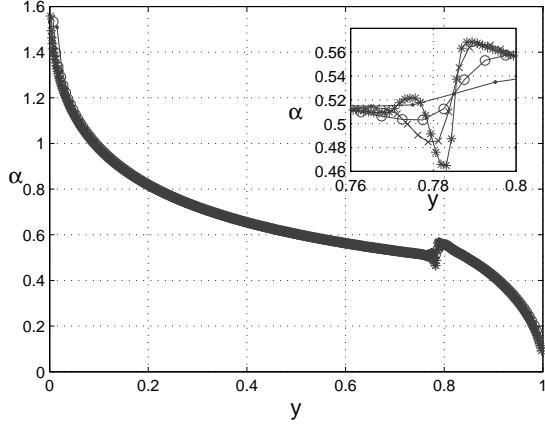


Figura 11 – Ángulo  $\alpha$  para  $t = 0.5$ , sobre el dominio del frente espuma-petróleo  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ . Con “.” se muestra el gráfico con una malla de  $100 \times 100$ , con “○”, una malla de  $200 \times 200$ , con “×”, una malla de  $400 \times 400$  y por último con “\*”, una malla de  $800 \times 800$ .

En la figura 12 se presenta el ángulo  $\alpha$  versus altura  $y$ , tanto para la solución analítica como la numérica para  $t \in \{0.125, 0.250, 0.375, 0.500\}$  sobre un dominio del frente  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Además, se ha utilizado un mallado sobre el dominio de  $N_x = N_y = 400$ .

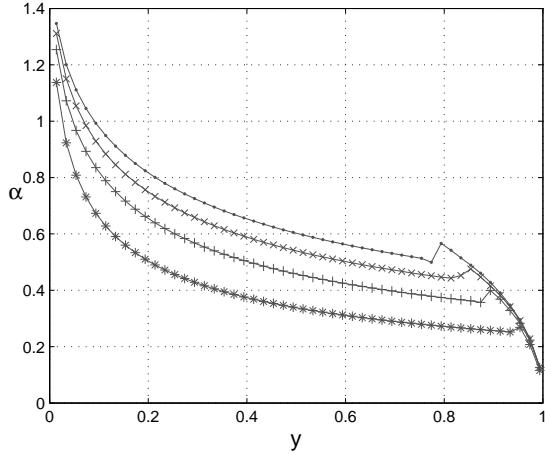


Figura 12 – Ángulo  $\alpha$  para  $t \in \{0.125, 0.250, 0.375, 0.500\}$ , mallado de  $400 \times 400$ . Con “.” se grafica el ángulo a  $t = 0.5$ , con “x”, en un tiempo  $t = 0.375$ , con “+”, en un tiempo  $t = 0.25$  y con “\*”, en un tiempo  $t = 0.125$ .

En las Figuras 11 y 12, se puede apreciar la existencia de un salto en el ángulo, esto aproximadamente a la altura de  $y \sim 1 - t/2 + 5t^2/48$ , lo cual implica la existencia de una concavidad.

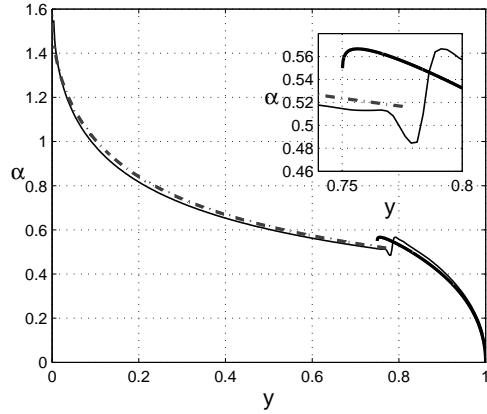


Figura 13 – Ángulo  $\alpha$  de la solución numérica del modelo Euleriano versus solución analítica. Antes del salto se utiliza la expresión de la ecuación (31) para determinar el valor del ángulo y después del salto se utilizan los datos obtenidos de la integración numérica de (46), esto se realiza para  $t = 0.5$  con  $[x, y] \in [0, 1] \times [0, 1]$ . La línea “— · —” representa los datos obtenidos de la ecuación (31), la línea continua representa los datos numéricos y después del salto se representa con una línea más gruesa los resultados de la integración numérica de la ecuación (41).

En la Figura 14, se muestra el tamaño del salto dividido por la raíz del tiempo, versus el avance del tiempo, para los tiempos  $t \in \{0.125, 0.250, 0.375, 0.500\}$ . Lo cual entrega valores aproximadamente constantes, es decir, el tamaño del salto crece a razón de  $\sqrt{t}$

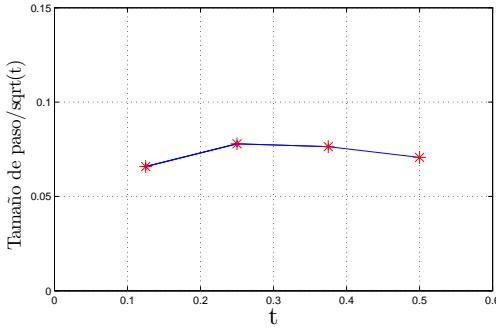


Figura 14 – Tamaño del salto dividido en  $\sqrt{t}$  para  $t \in \{0.125, 0.250, 0.375, 0.500\}$

### 4.3 Gráficos de curvatura

En la Figura 15 se representan los datos numéricos de curvatura obtenidos de la simulación del frente de propagación para  $t = 0.5$  con distintas particiones  $N_x = N_y \in \{100, 200, 400, 800\}$  sobre el dominio  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ .

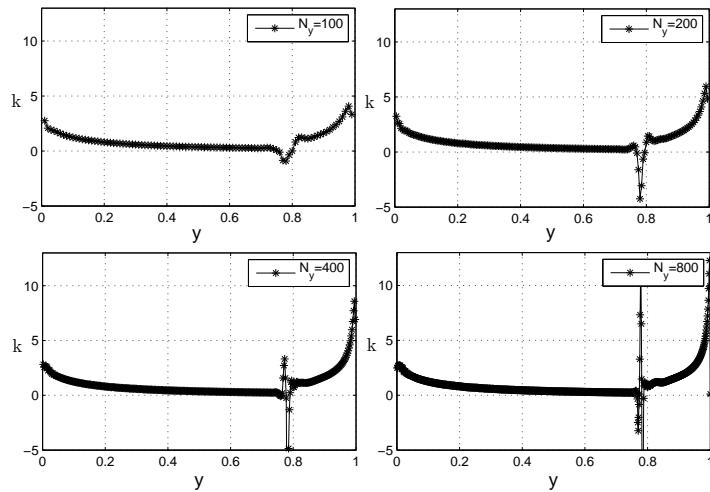


Figura 15 – Curvatura del frente en  $t = 0.5$  para distintos niveles de refinamiento de la malla  $N_x = N_y \in \{100, 200, 400, 800\}$ .

En la Figura 15, se puede apreciar que mientras más se refina la malla, el salto se puede visualizar más nítido. Además se muestran saltos en los valores de la curvatura  $\kappa$ , en los puntos cercanos al cambio de concavidad de  $\alpha$ , pero estos son producto de la difusividad numérica. En la Figura 16, se muestra la curvatura del frente para un tiempo  $t \in \{0.125, 0.250, 0.375, 0.500\}$ , con una malla  $400 \times 400$ . En este gráfico se puede apreciar como evoluciona el salto al igual que en la Figura 12.

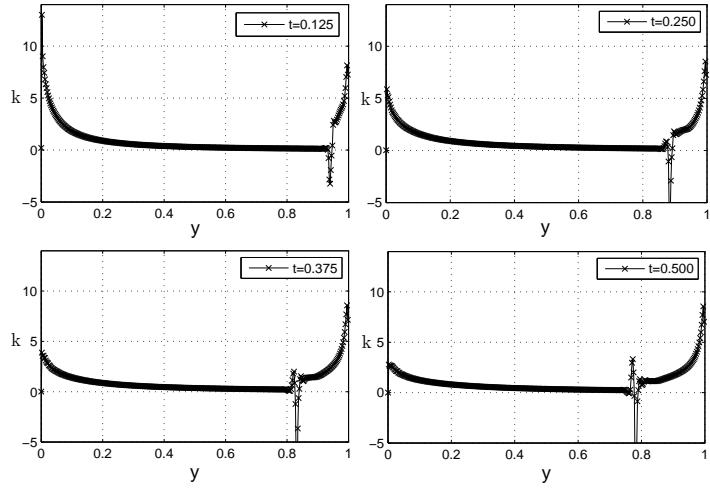


Figura 16 – Curvatura del frente en  $t \in \{0.125, 0.250, 0.375, 0.500\}$ , con una malla de  $400 \times 400$ , sobre el dominio  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$

#### 4.4 Ángulo y curvatura “Pressure-driven growth” versus Modelo Euleriano

En la Figura 17 se muestra una comparación para el ángulo y la curvatura de la representación de los frentes de propagación de espuma-petróleo, tanto para el modelo “Pressure-driven growth” como para el modelo Euleriano.

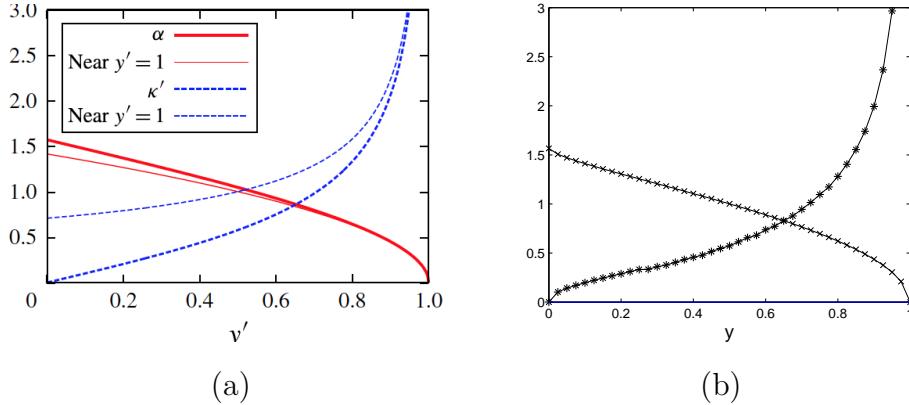


Figura 17 – Domino  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, 1]$ , tiempo de evolución del frente  $t = 8$ . En (a) se muestran los resultados obtenidos del modelo “Pressure-driven growth”, tanto para el ángulo como para la curvatura, este gráfico fue extraído del trabajo desarrollado en [4]. En (b) se muestran los resultados numéricos del ángulo y la curvatura del modelo Euleriano.

De la Figura 17 cabe destacar que el máximo valor de  $\alpha$  está en  $y \sim 0$  el cual alcanza un valor de  $\alpha = \pi/2$ , en  $y \sim 1$  el ángulo tiene un valor de  $\alpha = 0$ . La curvatura tiene el valor de  $\kappa = 0$  en  $y \sim 0$  y un valor de  $\kappa \rightarrow \infty$  en  $y \approx 1$ .

## 5 Conclusiones

Los resultados obtenidos del modelo Euleriano son en gran medida similares a los del trabajo realizado en [4], esto valida los resultados y permite realizar mediciones de ángulo y curvatura (ver figuras 8 y 17). El modelo Euleriano genera una solución implícita sin la necesidad de tener que inyectar puntos materiales (puntos Lagrangianos) al frente desde el tope superior y se puede tener una solución más exacta a medida que se pueda refinar la discretización. La solución Euleriana al ser implícita, captura la posición del frente a medida que evoluciona  $\phi$  y pasa por la línea de nivel cero, por lo tanto, se puede obtener una representación explícita de la curva a cada instante de tiempo  $t$  tomando solo los puntos de la línea de nivel cero. De los datos obtenidos de la resolución numérica del modelo Euleriano, se puede visualizar la existencia de un salto en los gráficos de ángulo, lo cual entrega evidencia de la existencia de una concavidad en el frente, la cual se puede evidenciar observando los gráficos de curvatura, los cuales ante a la aparición de dicho salto muestran difusividad numérica. Se puede pensar que esta concavidad es producto de la propagación de información a partir de la condición de borde del modelo ( $\phi(x, 1, t) = x - \sqrt{2t}$ ) y se mueve en dirección vertical hasta un tiempo  $t = 8$  al cual llega al fondo ( $y = 0$ ), luego el frente evoluciona sin anomalías.

Se desarrolla un código computacional con el cual es posible resolver numéricamente sistemas de ecuaciones de Hamilton-Jacobi, este código se realizó utilizando como referencia el trabajo de Kurganov et. al. (2001) para realizar la discretización espacial y una discretización explícita en el tiempo utilizando el método de Euler.

De los cálculos analíticos, se obtuvieron pruebas para afirmar que esta concavidad ocurre aproximadamente a la altura  $y \sim 1 - t/2 + (5t^2)/48$ , para  $t \ll 1$ . Esta ecuación entrega la posición de los puntos materiales originados en  $y \approx 1$ , los cuales nacen a partir del eje  $y$  y dicha concavidad ocurre en el punto aproximado donde los puntos materiales provenientes de tope superior (puntos inyectados a un tiempo  $t_{\text{inj}} \in [0, t]$ ), se unen con los puntos originales del frente, es por ello que se cuenta con una formulación analítica para ambas zonas del frente (zona de puntos originarios y zona de puntos inyectados). La representación para el punto donde se juntan las soluciones analíticas están casi en total acierto con la solución numérica, ya que en estas también se puede visualizar la existencia de un salto.

Queda pendiente para trabajos futuros desarrollar la solución numérica utilizando conceptos como discretización implícita (TVD-Runge Kutta [14]), reconstrucción de tercer orden u orden superior y junto con esto, realizar análisis de convergencia. También queda en discusión la necesidad de incluir condiciones de borde al modelo, ya que según está planteado, podrían llegar a no ser necesarias. Con respecto a la solución analítica del modelo Lagrangiano, es necesario encontrar soluciones de orden 3 y buscar adaptaciones de las soluciones de similaridad, además de sus respectivas soluciones. En el modelo Euleriano falta por incluir conceptos de heterogeneidad del medio y anisotropía. Además es necesario incluir un término de curvatura, con lo cual existe la posibilidad de que no aparezca la concavidad.

## Referencias

- [1] Lake, L. W. 2010 Enhanced Oil Recovery. Prentice Hall.
- [2] Tzimas, E., Georgakaki, A., Garcia Cortes, C., and Peteves, S. D. 2005. Enhanced Oil Recovery using Carbon Dioxide in the European Energy System. Institute for Energy. Petten, The Netherlands.
- [3] Salager, J. L. (2005). Recuperación mejorada del petróleo. ULA.[S357-C].
- [4] Grassia, P., Mas-Hernández, E., Shokri, N., Cox, S. J., Mishuris, G., & Rossen, W. R. (2014). Analysis of a model for foam improved oil recovery. *Journal of Fluid Mechanics*, 751, 346-405.
- [5] Namdar Zanganeh, M., & Rossen, W. (2013). Optimization of foam enhanced oil recovery: balancing sweep and injectivity. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 16(01), 51-59
- [6] de Velde Harsenhorst, R. M., Dharma, A. S., Andrianov, A., & Rossen, W. R. (2013, June). Extension of a Simple Model for Vertical Sweep in Foam SAG Displacements. In EAGE Annual Conference & Exhibition incorporating SPE Europe. Society of Petroleum Engineers.
- [7] Shan, D., & Rossen, W. R. (2004). Optimal Injection Strategies for Foam IOR. *SPEJ* 9 (2): 132-150. SPE-75180-PA. DOI: 10.2118/75180-PA.
- [8] Coronel, A., Cumsville, P., & Quezada, R. (2010). Un método numérico híbrido para capturar los choques en leyes de conservación escalares. *Revista Integración*, 28(2), 111-132.
- [9] Kurganov, A., Noelle, S., & Petrova, G. (2001). Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(3), 707-740.
- [10] Levy, D., & Nayak, S. (2004). Semi-discrete Schemes for Hamilton-Jacobi Equations on Unstructured Grids. In Numerical Mathematics and Advanced Applications (pp. 623-630). Springer Berlin Heidelberg.
- [11] T.F. Chan and L.A. Vese. (2001). Active contours without edges. *Image Processing, IEEE Transactions on image processing*, 10(2):266-277.
- [12] Chunming Li, Chenyang Xu, Changfeng Gui, and M.D. Fox. (2010). Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 19(12):3243-3254.
- [13] Osher, S., & Fedkiw, R. (2006). Level set methods and dynamic implicit surfaces (Vol. 153). Springer Science & Business Media.
- [14] Peng, D., Merriman, B., Osher, S., Zhao, H.-K., and Kang, M. (1999). A PDE- Based Fast Local Level Set Method, *J. Comput. Phys.* 155, 410-438

- [15] Zill, D. G., Wright, W. S., & Ábalo, M. A. (2011). Cálculo: trascendentes tempranas. McGraw-Hill.
- [16] Osher, S., & Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1), 12-49.

# A Fórmulas analíticas

## A.1 Posición del frente

Para obtener una aproximación de orden más alto, para la ubicación de los puntos del frente en función del tiempo  $y$  y de la altura  $y$ , comenzamos a partir de la ecuación (2), la cual se puede escribir como

$$\frac{dx^2}{dt} \sim \frac{2x}{s} y \cos(\alpha). \quad (47)$$

Para integrar la expresión (47), se debe considerar la ubicación e historia de los puntos desde 0 hasta  $t$ , donde  $t$  es el tiempo instanteo y  $\hat{t}$  corresponde al tiempo histórico dentro de este intervalo. Se considera entonces que  $dt = d\hat{t}$ , además se debe dejar expresado todo en términos de  $\hat{t}$ . Para lo cual se tiene que

$$x \sim \sqrt{2 \int_0^t \left( \frac{\hat{x}}{s} \right) \hat{y} \cos(\hat{\alpha}) d\hat{t}}. \quad (48)$$

A través de la ecuación (6) se puede determinar que la ubicación de los puntos cercanos al tope del frente, obedece la expresión  $x \sim \sqrt{2yt}$ , y como  $dx/dy = \alpha$  tenemos que  $\alpha \sim \sqrt{t/2y}$ , por lo tanto,

$$\hat{\alpha} \sim \sqrt{\hat{t}/2y}. \quad (49)$$

Mediante una expansión de Taylor de orden 2 en el término  $\cos(\hat{\alpha})$  tenemos que

$$\cos(\hat{\alpha}) \sim 1 - \frac{\hat{t}}{4y}. \quad (50)$$

Usando la ecuación (7), se puede determinar que  $\hat{y} \sim y_0 - \hat{t}/2$  y combinando esto con la ecuación (7) obtenemos

$$\hat{y} \sim y + \frac{t - \hat{t}}{2}. \quad (51)$$

Para determinar  $\left( \frac{\hat{x}}{s} \right)$  en función de  $\hat{t}$ , comenzamos utilizando el mismo fundamento con el cual se obtuvo la ecuación (12), el cual establece que  $ds/dt = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$ . Utilizado las ecuaciones (6) y (7) obtenemos  $dx/dt$  y  $dy/dt$ . Al integrar  $ds/dt$  se obtiene

$$\left( \frac{\hat{x}}{s} \right) \sim \left( 1 - \frac{\hat{t}}{12y} \right). \quad (52)$$

Reemplazamos las ecuaciones (50), (51) y (52) en (48), con lo cual obtenemos

$$x \sim \sqrt{2 \int_0^t \left( 1 - \frac{\hat{t}}{12y} \right) \left( y + \frac{t - \hat{t}}{2} \right) \left( 1 - \frac{\hat{t}}{4y} \right) d\hat{t}}. \quad (53)$$

Lo cual al ser resuelto (sólo considerando los términos de orden 1) queda expresado como,

$$x \sim \sqrt{2yt + \frac{t^2}{6}}.$$

## A.2 Fórmulas de similaridad

Se introducen la siguiente variable de similaridad,

$$\zeta = \frac{2(1-y)}{t}. \quad (54)$$

Y una solución hipotética para el ángulo  $\alpha$ , la cual establece este como una función de la ecuación (54),

$$\alpha \sim \sqrt{\frac{t}{2}}\alpha_1(\zeta). \quad (55)$$

Se puede apreciar a partir de la ecuación (54) que cuando  $y = 1$ ,  $\zeta = 0$ . Además se sabe que cuando  $y = 1$ ,  $\alpha = 0$  lo cual implica que  $\alpha_1 = 0$ , esto en base a la ecuación (55). También se tiene que cuando  $y \sim 1 - t/2$ ,  $\alpha \sim \sqrt{t/2}$ , lo cual implica que  $\alpha_1 = 1$  y  $\zeta = 1$ .

Se quiere demostrar, a partir de lo anterior, que la evolución del ángulo en función de  $[t, t_{\text{inj}}]$ , obedece a la siguiente función de interpolación,

$$\alpha \sim \frac{t - t_{\text{inj}}}{\sqrt{2t}}. \quad (56)$$

La ecuación (56) nace a partir de la ecuación (55), en donde se asume que  $\alpha_1 = 1 - t_{\text{inj}}/t$ . Para validar la ecuación (56) es necesario demostrar que la solución de similaridad de la ecuación (54) se puede escribir en función de  $\alpha_1 = 1 - t_{\text{inj}}/t$ .

Si la ecuación (56) es válida, resulta posible demostrar a partir de la inclusión de este resultado en la ecuación (3), que la función que determina la ubicación de los puntos del frente en la parte cercana al tope superior, está dada por

$$y \sim 1 - \frac{1}{2} \left( t - t_{\text{inj}} - t_{\text{inj}} \log \left( \frac{t}{t_{\text{inj}}} \right) \right), \quad t_{\text{inj}} \in [0, t]. \quad (57)$$

Llevando el resultado de la ecuación (57) a la ecuación (54) se puede escribir  $\zeta = \zeta(t/t_{\text{inj}})$  y como se obtuvo anteriormente  $t/t_{\text{inj}} = 1 - \alpha_1$ , por lo tanto, es posible escribir  $\zeta = \zeta(\alpha_1)$ , esto comprueba la validez de la aproximación realizada en la ecuación (56), ya que es posible obtener a partir de las ecuaciones (54) y (55), una expresión para  $\zeta = \zeta(\alpha_1)$ .

Para obtener una ecuación que exprese  $x = x(t, t_{\text{inj}})$ , comenzamos a partir de la ecuación (47), la cual escribimos como,

$$x \sim \sqrt{2 \int_0^t \left( \frac{x}{s} \right) y \cos(\alpha) dt}. \quad (58)$$

Para resolver la ecuación (58) es necesario expresar sus términos en función de  $[t, t_{\text{inj}}]$ . Para  $y$  tenemos a partir de la ecuación (57) que  $y \sim 1 - \frac{1}{2} \left( t - t_{\text{inj}} - t_{\text{inj}} \log \left( \frac{t}{t_{\text{inj}}} \right) \right)$ , para  $\alpha$

tenemos la ecuación (56), la cual establece que  $\alpha \sim (t - t_{\text{inj}})/\sqrt{2t}$ . Utilizando la ecuación (56) podemos obtener  $\cos(\alpha)$  y a través de una expansión de Taylor de orden 2 sobre esta expresión obtenemos

$$\cos(\alpha) \sim 1 - \frac{t}{4} + \frac{t_{\text{inj}}}{2} - \frac{t_{\text{inj}}^2}{4t}. \quad (59)$$

Luego calculamos una expresión para  $(x/s)$  en función de  $[t, t_{\text{inj}}]$ . Para lo cual comenzamos a partir de la ecuación de evolución de  $s$ , que establece que  $ds/dt = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$ , lo cual también se puede escribir como  $ds/dt = (dx/dt)\sqrt{1 + (dy/dt)^2/(dx/dt)^2}$  y a través de una expansión de Taylor de orden 1 sobre el término  $\sqrt{1 + (dy/dt)^2/(dx/dt)^2}$ , se puede expresar la evolución de  $s$  en el tiempo como  $ds/dt \sim (dx/dt)(1 + (dy/dt)^2/2(dx/dt)^2)$ . Donde  $(dx/dt)$  se obtiene a partir de la ecuación (6) y  $(dy/dt)$  de la ecuación (57). Con lo que resulta

$$s \sim \int_0^t \frac{dx}{dt} dt + \int_0^t \frac{(dy/dt)^2}{2(dx/dt)} dt. \quad (60)$$

Debido a que  $(dy/dt)$  (con  $y = y(t, t_{\text{inj}})$ ) no varía desde  $[0, t_{\text{inj}}]$ , es que la ecuación (60) se puede escribir como,

$$s \sim \int_0^t \frac{dx}{dt} dt + \int_{t_{\text{inj}}}^t \frac{(dy/dt)^2}{2(dx/dt)} dt. \quad (61)$$

Resolviendo la integral de la ecuación (61) se obtiene que

$$s \sim \sqrt{2yt} \left( 1 + \frac{t}{12y} - \frac{t_{\text{inj}}^2}{4ty} - \frac{t_{\text{inj}}}{2y} + \frac{2t_{\text{inj}}^{3/2}}{3t^{1/2}y} \right). \quad (62)$$

Para efectuar los cálculos, se asumió que  $y \sim 1$ . Para obtener una expresión para  $x/s$ , se debe considerar que  $x \sim \sqrt{2yt}$ , además que el término  $\frac{t}{12y} - \frac{t_{\text{inj}}^2}{4ty} - \frac{t_{\text{inj}}}{2y} + \frac{2t_{\text{inj}}^{3/2}}{3t^{1/2}y}$  es una corrección muy pequeña. Por lo tanto, mediante una expansión de Taylor de orden 1 sobre el término  $\left( 1 + \frac{t}{12y} - \frac{t_{\text{inj}}^2}{4ty} - \frac{t_{\text{inj}}}{2y} + \frac{2t_{\text{inj}}^{3/2}}{3t^{1/2}y} \right)$ , es posible obtener

$$\frac{x}{s} \sim \left( 1 - \frac{t}{12y} + \frac{t_{\text{inj}}^2}{4ty} + \frac{t_{\text{inj}}}{2y} - \frac{2t_{\text{inj}}^{3/2}}{3t^{1/2}y} \right). \quad (63)$$

Dado que en el intervalo  $[0, t_{\text{inj}}]$ , todos los puntos materiales permanecen en el tope, la ecuación (58) se puede expresar como,

$$x \sim \sqrt{2 \int_0^{t_{\text{inj}}} dt + 2 \int_{t_{\text{inj}}}^t \left( \frac{x}{s} \right) y \cos(\alpha) dt}. \quad (64)$$

Llevando las ecuaciones (57), (59) y (63) a (64), se obtiene

$$x \sim \sqrt{2t_{\text{inj}} + 2 \int_{t_{\text{inj}}}^t \left( 1 - \frac{t}{12y} + \frac{t_{\text{inj}}^2}{4ty} + \frac{t_{\text{inj}}}{2y} - \frac{2t_{\text{inj}}^{3/2}}{3t^{1/2}y} \right) y \left( 1 - \frac{t}{4} + \frac{t_{\text{inj}}}{2} - \frac{t_{\text{inj}}^2}{4t} \right) dt}. \quad (65)$$

En la solución de la integral de la ecuación (65) sólo se consideran los términos de orden igual o inferior a 2, ya que como la aproximación es realizada para tiempos pequeños, los

valores de orden superior se consideran despreciables. Como resultado se obtiene entonces que

$$x \sim \sqrt{2t - \frac{5t^2}{6} + 2t_{\text{inj}}t - \frac{8t_{\text{inj}}^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}}{3} + t_{\text{inj}}t \log\left(\frac{t}{t_{\text{inj}}}\right) + \frac{3t_{\text{inj}}^2}{2}}.$$

La ecuación (A.2) corresponde a una aproximación para la posición  $x$ , de los puntos inyectados al frente de propagación espuma-petróleo.

## B Códigos computacionales

El código mediante el cual se resuelve numéricamente el modelo y se realiza la simulación computacional del fenómeno físico, es de elaboración propia. Este código es realizado en base al trabajo desarrollado en [9]. El código utilizado para medir el ángulo también es de elaboración propia. Para medir la curvatura se utiliza una modificación de la caja de herramientas llamada “A Matlab toolbox implementing Level Set Methods”, la cual también es utilizada para efectuar la reinicialización de la función  $\phi$  en cada paso de evolución temporal<sup>1</sup>. En el Cuadro 1 se muestra una lista de los códigos usados, además de especificar para qué sirve cada uno, se señalan las dependencias de cada uno.

Los códigos usados se encuentran en una carpeta llamada “Códigos\_FFP”, a la cual se puede acceder a través del siguiente link:

(<http://tinyurl.com/FFPCodigos>)

Se recomienda descargar la carpeta completa, así se evita que se puedan generar problemas.

---

<sup>1</sup>La caja de herramientas es extraída de la página [http://barissumengen.com/level\\_set\\_methods/#examples](http://barissumengen.com/level_set_methods/#examples)

*Cuadro 1 – Códigos usados*

Código	Detalle	Dependencia
1) Solucion_sistema_acoplado.m	Este código fue diseñado para resolver numéricamente el sistema acoplado de las ecuaciones (15) y (16).	Código principal, utiliza el código 7 para ejecutar la reinicialización.
2) get_kappa.m	Código diseñado para calcular el ángulo $\alpha$ y la curvatura $\kappa$ , y utiliza los datos numéricos de la función $\phi$ generados del código 1.	Se utiliza el código 6 para calcular curvatura $\kappa$ .
3) frente_top.m	Este código grafica el frente en la zona cercana al tope utilizando las ecuaciones analíticas (38) y (37).	Independiente.
4) frente_bot.m	Este código grafica el frente en la zona de abajo (“antes de la concavidad”) utilizando la ecuación analítica (6) y (35).	Independiente.
5) integracionnumerica_frente_top.m	Este código grafica el frente en la zona cercana al tope integrando numéricamente la expresión analítica (46).	Independiente
6) curvature.m	Código utilizado para medir la curvatura en base a lo establecido en la ecuación (27).	Se utiliza a través del código 2
7) reinit_SD1.m	Código utilizado para efectuar la reinicialización, fue extraido de “A Matlab toolbox implementing Level Set Methods”, y luego modificado para utilizar la ecuación de signo (26).	Este código utiliza otros códigos de “A Matlab toolbox implementing Level Set Methods”, los cuales han sido incluidos en la carpeta de archivos.