Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Simulación numérica y estudio analítico de los efectos de decaimiento, bloqueo y acomodación en una sesión grupal tipo "lluvia de ideas" expresadas en forma verbal

Por

Marigen Gutiérrez Ramírez

Profesor Guía

Dr. Emilio Cariaga López

Actividad Formativa Equivalente (AFE), para optar al grado de
Magíster en Matemáticas Aplicadas (profesional)

Temuco - 13 de Septiembre de 2018

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

.....
Dr. Emilio Cariaga

Profesor informante:

.....
Dr. Stefan Berres

Profesor informante:

.....
Dr. Julio Rojas

Ministro de Fe:

.....
Dra. Pilar Molina

Temuco - 13 de Septiembre de 2018

PERFIL DE EGRESO

Magíster en Matemáticas Aplicadas.
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente:

* Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.
* Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.
* Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

DEDICATORIA

A Dios

Por ser mi todo en esta vida, mi poderoso gigante, mi luz y mi salvación.

A mis padres Héctor y Eliana

Por su amor, comprensión y apoyo demostrado durante toda mi vida. Por sus palabras de aliento y estar siempre ahí. Los amo.

A mi hermana Tabita

Por ser una hermana y amiga incondicional, por levantarme los brazos cuando lo necesité. Que Dios te bendiga.

AGRADECIMIENTOS

No hay dudas de que son muchas las personas a quienes quisiera agradecer por haberme acompañado en todo este proceso que ha significado realizar el Magíster, pero en primer lugar debo agradecer a Dios porque todo lo que soy se lo debo a Él, por estar en mi vida y manifestar su inmenso amor en cada momento.

También expreso mis respetos y agradecimientos a la gran persona que es mi director de la Actividad Formativa Equivalente (AFE) y director del programa de Magíster, Dr. Emilio Cariaga López, por su apoyo, dedicación y comprensión en todo este proceso, y por representar un ejemplo a seguir en mi vida profesional.

No quiero dejar de mencionar a todo el grupo de docentes que colaboró en mi formación profesional, mi gratitud a ustedes por todos los insumos intelectuales que han sido muy necesarios para el logro de este proyecto.

Un reconocimiento especial a mis padres Héctor y Eliana por ser mis pilares terrenales, por su amor y sabiduría para darme una palabra de aliento, por su esfuerzo demostrado en querer lo mejor para mí y por su contención en todo momento. A mis hermanas Rode y Tabita, por estar presente en mi vida, por su amistad incondicional y por ser un apoyo constante en este proceso. A mi sobrina Renata, por darme alegría y amor, por cada abrazo, beso y sonrisa que me inspiraban a seguir adelante. A mis cuñados Esteban y Lautaro, por su apoyo, comprensión, preocupación y cariño demostrado.

Finalmente agradecer a mis compañeros de la segunda versión del programa, por la compañía y los momentos vividos en este proceso. Especialmente a mi amiga Elsa, por la linda amistad que formamos, por su apoyo incondicional y perseverancia.

Abstract

This project addresses the problem of modeling mathematically the performance achieved by a group of people who have formed a creative brainstorming session expressed verbally. It is considered a dynamic system already published, which is constituted by a system of ordinary differential equations with one unknown for each member of the group, which is defined as the speed of generation of ideas. This model considers three explanatory factors: decay, blocking and matching, and assumes that they are related linearly. The model is solved numerically and analytically for an arbitrary number of members. In addition, the impact of the number of members on the performance of the group is evaluated. Finally, a set of computational simulations are executed whose purpose is to evaluate the performance of groups made up of people of different characteristics.

Keywords: creative sessions as brainstorming, dynamic models, decay, blocking, matching and initial conditions.

Resumen

Este proyecto aborda el problema de modelar matemáticamente el rendimiento que logra obtener un grupo de personas que se han constituido en una sesión creativa de lluvia de ideas expresadas en forma verbal. Se considera un sistema dinámico ya publicado, el cual está constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con una incógnita por cada integrante del grupo, la cual se define como la velocidad de generación de ideas. Este modelo considera tres factores explicativos: decaimiento, bloqueo y acomodación, y asume que estos se relacionan linealmente. El modelo se resuelve numérica y analíticamente para un número arbitrario de integrantes. Además, se evalúa el impacto del número de integrantes en el rendimiento del grupo. Finalmente, se ejecutan un conjunto de simulaciones computacionales cuya finalidad es evaluar el desempeño de grupos constituidos por personas de diferentes características.

Palabras Claves: Reunión creativa tipo "lluvia de ideas", modelos dinámicos, decaimiento, bloqueo, acomodación y condiciones iniciales.

Índice

1 INTRODUCCION **1**

2 OBJETIVOS **6**

3 MATERIALES Y METODOS **7**
3.1 Modelo Conceptual 7
3.2 Modelo Matemático 11
3.3 Teorema de Existencia y Unicidad 14

4 RESULTADOS **16**
4.1 Solución Analítica 16
4.1.1 El Método de los Valores Propios 16
4.1.2 Estudio Analítico usando *wxMaxima* 30
4.2 Solución Numérica 33
4.2.1 Simulación Numérica vía Método de Valores Propios 34
4.2.2 Solución Numérica utilizando *Octave* 59

5 DISCUSION **65**

6 CONCLUSIONES **67**

7 BIBLIOGRAFIA **68**

8 ANEXOS **70**

1 INTRODUCCION

Un aspecto característico de las matemáticas aplicadas es poder construir modelos matemáticos que permitan resolver problemas complejos que se interrelacionan con otras disciplinas o con una realidad social en particular. En relación a esto, un modelo es una construcción racional siempre abierta, frágil y transitoria que se ve desafiada por lo real [22]. De manera que uno de los factores más interesantes que se da entre la realidad estudiada y los modelos matemáticos que se generan a partir de ella, son los procesos de conceptualización e interpretación, que corresponden a la forma en que la ciencia se enfrenta al estudio de los comportamientos existentes a través del análisis, la predicción y la posterior simulación de un modelo matemático. Es decir, el proceso de modelizar supone construir en la mente una representación. Posteriormente, este modelo mental podrá ser enunciado, verbalizado y expresado en diversos soportes como son una ecuación, un programa informático, una maqueta, un diagrama, entre otros [22].

Al estar frente a una circunstancia real que necesita ser modelada matemáticamente, es necesario especificar el comportamiento problemático de la situación y a través de una matematización, lograr la concepción de un modelo matemático mediante las herramientas que esta ciencia ofrece, y así obtener el resultado esperado ya sea por medio de una contrastación o una evaluación de la conducta observada. Para comprender a cabalidad los procedimientos ejecutados en el proceso de modelación matemática, primero es necesario entender el significado de modelo matemático. En este ambiente se definirá modelo matemático como un tipo de modelo científico basado en la lógica matemática en el que se utilizan formulismo como son las variables y funciones vinculadas a través de relaciones matemáticas que modelizan la realidad. Teniendo como antecedente histórico que el gran avance producido al pasar del Renacimiento a la Física Moderna fue la creación del Cálculo como una forma de capturar el cambio físico observado en la realidad estudiada [18]. En otras palabras, un modelo matemático corresponderá a ecuaciones que dan cuenta de las relaciones existentes entre las variables que afectan al sistema en cuestión y representan los diversos comportamientos de este, permitiendo el análisis, la interpretación, la representación y el estudio de la realidad modelada. En este sentido, los modelos matemáticos son caracterizados habitualmente como modelos basados en ecuaciones, donde prima el razonamiento deductivo [22].

La utilización de modelos en el entorno de la toma de decisiones son usados en variados sectores de la sociedad. Por mencionar algunos, instituciones empresariales, hospitalarias, financieras, bibliotecarias, sistemas de transporte, entre otros [19]. En este caso en particular, estará enfocada en la toma de decisiones a través de la generación de ideas en reuniones creativas tipo “lluvia de ideas”. En cuanto al concepto de reunión creativa tipo “lluvia de ideas”, éste hace referencia a una reunión en particular que trata de grupos de personas que se reúnen para interactuar entre ellos y lograr el consenso en relación a un objetivo predispuesto para la ocasión. Este tipo de reuniones, es sin lugar a dudas, la técnica creativa que más difusión ha alcanzado, tanto en el ámbito empresarial como en el educativo [9].

Las investigaciones sobre estos grupos que se reúnen para intercambiar ideas, se remontan a la década del 50 cuando Osborn[1] planteó que el proceso de generación de ideas podía considerarse como una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", afirmando que estos grupos pueden ser más productivos que aquellos que trabajan solitariamente [4]. Sin embargo, considerando estas premisas surgieron investigaciones que contradicen las afirmaciones de Osborn, basándose en que es posible observar que los grupos de intercambio de ideas suelen ser afectados por un fenómeno referido a la "pérdida de productividad". Es el caso de Diehl & Stroebe, 1987; Shepperd, 1993 (citado en [4]), quienes plantearon que existen al menos cuatro factores que influyen en el rendimiento a nivel emocional y motivacional. De acuerdo con [4], [7], [8], [20] los factores que explican la pérdida de productividad se pueden manifestar a través de una aprehensión a la evaluación (temor a la evaluación o ansiedad social), una holgazanería social (depender de los esfuerzos de otros), un bloqueo de la producción (incapacidad de expresar las ideas) y una tendencia a la acomodación (comparación de su rendimiento con el desempeño promedio del grupo). Es decir, son factores que reducen la tasa de producción de ideas y que son alusivos a actitudes intrínsecas y extrínsecas que poseen los integrantes del grupo y los conducen a un estado que se caracteriza por una desmotivación, una justificación de sus ideas como innecesarias, una preocupación excesiva de la evaluación por parte de sus compañeros y un bloqueo de sus ideas.

En cuanto a una propuesta para reducir la "pérdida de productividad" han surgido investigaciones con el fin de mejorar la efectividad de las reuniones creativas tipo "lluvia de ideas". Es el caso de Camacho & Paulus, 1995 (citado en [7]) quienes proponen que una solución sería formar grupos con miembros poco ansiosos. A su vez, [4] aportan en esta teoría determinando que el rendimiento en una reunión creativa se debe a la interacción de factores tanto sociales, como de personalidad y cognitivos. Asimismo, existe una creatividad social presente en las reuniones creativas tipo "lluvia de ideas", lo que según ellos propicia la generación de ideas creativas a través de pensamientos divergentes por parte de los integrantes de las reuniones creativas. En este contexto, la creatividad es reconocida como un fenómeno complejo que involucra habilidades de pensamiento divergente y algunos rasgos de personalidad que comúnmente se asocian con individuos creativos en muchas profesiones [14]. De esta manera, el desarrollo de un pensamiento creativo y divergente posibilitaría potenciar diversas habilidades del pensamiento y la generación de distintos puntos de vista en la construcción de representaciones mentales [17].

Desde la perspectiva de la creatividad, ésta es definida por [17] como una capacidad y como una habilidad cognitiva cuyo proceso generativo es dinámico y complejo. Por lo tanto, el desarrollo de la creatividad manifestado en cada participante de la reunión creativa, requerirá imaginación, capacidad de riesgo, autonomía en la toma de decisiones, capacidad para sintetizar una idea, pero por sobre todo libertad de pensamiento [1]. Lo que no quiere decir que la creatividad deba enseñarse sino recuperarse debido a que todas las personas son creativas al nacer, pero a medida que se crece se va perdiendo dicha aptitud. Dado que la creatividad es una condición humana independiente del coeficiente intelectual [17].

[1] Alex Faickney Osborn (1888-1966) es considerado el inventor del brainstorming (lluvia de ideas) y del método de solución creativa de problemas. Fuente: `http://es.wikipedia.org/wiki/Alex_Faickney_Osborn`

En relación a lo anterior, diversas pruebas han demostrado que los niños son nueve veces más creativos antes de ingresar al sistema escolar debido a que en dicho sistema se fomenta el pensamiento patrón y las respuestas convencionales [13].

Consecuentemente, las reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" buscan preservar su principio común: "apartarse de los caminos recorridos" [13]. Esto conlleva a plantear las situaciones problemáticas de manera poco habitual a lo acostumbrado y dar libertad a la expresión de todas y cada una de las ideas que surjan a lo largo del período de tiempo que dure la sesión creativa, no importando si la intervención pudiese parecer poco razonable o realizable. Dando a entender que los grupos de trabajo que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas" no se crean con la finalidad de reducir el trabajo individual sino para potenciarlo bajo determinadas condiciones [12]. En relación a lo efectivo que es la aplicabilidad de este tipo de reuniones creativas, [2] concluyen que al analizar las encuestas realizadas en su investigación, el 40 % de los participantes mencionaron que las reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" son una de las técnicas grupales más eficientes a la hora de generar ideas en torno a una problemática. De esta forma, las múltiples modalidades y variantes a las que se ha visto expuesta este tipo de reuniones, la han convertido en metodología de creación, siguiendo un proceso peculiar de ideación, imaginación creativa orientada a la búsqueda de cosas nuevas, y la transformación y combinación de lo conocido [9].

La generación de ideas de un participante de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas" permite la contribución de los demás integrantes de la sesión creativa. Diehl & Stroebe, 1987 (citado en [21]) encontraron que aumentar el grado en que los individuos pueden sentirse identificado con su rendimiento, produce un acrecentamiento en el rendimiento general de la reunión creativa tipo "lluvia de ideas". Esto se explica teniendo en cuenta que si un individuo de la reunión creativa con bajo conocimiento del problema en cuestión, presta atención a lo mencionado por sus compañeros en relación a la problemática, aumentará el número de ideas generadas, convirtiendo al individuo en un generador de ideas más productivo. Es decir, las ideas generadas por un integrante de la reunión creativa se ven influenciadas por la atención que preste a las ideas expuestas por los otros miembros del grupo. De esta manera es concluyente que, mientras más atención preste cada individuo a los miembros del grupo, mejor será el rendimiento como grupo y viceversa. Estas predicciones son respaldadas por Leggett, 1997 (citado en [4]), quien se dedicó a estudiar y analizar sesiones creativas individuales para determinar cómo afecta la generación de ideas en ausencia de un contexto grupal. De hecho, [6] plantea que si no fuera por el bloqueo en la producción, la cantidad de ideas generadas por cada miembro del grupo aumentaría (al menos hasta cierto punto) a medida que aumenta el tamaño del grupo. Esto fundamentado por Diehl & Stroebe, 1991 (citado en [4]) quienes plantearon que el efecto inhibidor más potente en los grupos puede ser el bloqueo de la producción, correspondiente a una reducción de la productividad por el hecho de que los miembros del grupo deben turnarse para dar a conocer sus ideas.

Dentro de las diferencias que afectan el rendimiento de las sesiones tipo “lluvia de ideas”, [5] destacan la fluidez y/o cantidad de conocimiento que se tiene sobre el problema en torno al cual se desarrolla la sesión creativa, que representa la probabilidad de tener o no tener ideas en un intervalo de tiempo establecido. Y además los estilos de pensamiento, convergente o divergente, que producen explorar el problema dado de una sola vez en la sesión, o explorar y proponer ideas de todos los problemas dados en la sesión, respectivamente. Aportando también que la recuperación de información de la memoria conceptual a largo plazo es una parte importante del proceso de realización de una reunión creativa tipo “lluvia de ideas” porque estas sesiones no resultan efectivas bajo la sugestión de no conocer nada del tema.

En la actualidad, según Cordero & Dubinsky (citado en [1]) la tendencia en la sociedad es la búsqueda de formas participativas de trabajo; para ello, las relaciones interpersonales e intrapersonales se convierten en un factor clave para el trabajo en proyectos grupales. Resultando imprescindible la interacción entre los participantes para construir el conocimiento mediante la discusión con los demás y el trabajo en equipo. En este sentido, a pesar de que hay algunos factores sociales potencialmente negativos que son inherentes a la configuración grupal, los factores de influencia social también pueden tener un efecto positivo en la generación de ideas [21]. De esta manera, algunos contextos sociales podrían aumentar el nivel de motivación de los individuos y por lo tanto tendrían efectos positivos a nivel de creatividad grupal [21]. Sin embargo, la educación que se imparte hoy en día no promueve el razonamiento creativo y espontáneo, sino más bien impulsa el pensamiento convencional y predeterminado [13]. Por esta razón la educación no puede limitarse a una preparación profesional teórica ya que es necesaria una formación integral que estimule la creatividad y la libertad de pensamiento y sea incorporada al proceso de creación e innovación para que construya su propio conocimiento, promocionando el saber y las nociones que otros generan [9]. De modo que las personas sean capaces de enfrentar situaciones problemáticas en equipo y puedan expresar sus ideas sin presiones ni temores por la crítica que pudieran recibir de los demás, surgiendo de esta manera la modelación matemática que representa todos los factores que alteran positiva o negativamente, la generación de ideas en una reunión creativa.

El modelo matemático específico que se usará en este estudio corresponde a sistemas dinámicos debido a que el modelamiento se realiza utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias para analizar las variaciones en la tasa de generación de ideas de un grupo determinado de personas. De acuerdo a lo anterior, un sistema dinámico puede definirse como aquel sistema en el que se estudia la evolución de una magnitud temporal, donde dicha evolución se expresa mediante una ecuación y permite la obtención del valor de la magnitud en cualquier tiempo [3]. Es decir, en un sistema dinámico las magnitudes que intervienen en la modelización no se mantienen invariantes sino que cambian a lo largo de un tiempo predeterminado y se modifican constantemente.

Relacionando el concepto de modelación matemática a través de sistemas dinámicos con el de toma de decisiones a través de la generación de ideas en reuniones creativas, [7] afirman que [4] son los primeros en trabajar las reuniones creativas tipo “lluvia de ideas” usando sistemas dinámicos, debido a la facilidad de precisar el rendimiento durante determinados intervalos

de tiempo. Pero más adelante son ellos mismos quienes desarrollan el modelo dinámico basándose en el uso de ecuaciones diferenciales, y dentro del estudio que realizaron se dieron cuenta que los grupos reunidos tenían tendencia a bajar la tasa de generación de ideas. Por ende y bajo esas premisas; [15], justificándose en los modelos dinámicos presentados por [4], mostraron en cierta manera la evolución de las ideas generadas en una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", enfatizando en el apoyo que debe recibir el facilitador para una buena elección del tiempo en que debe realizar las intervenciones.

En el presente, se trabaja en base a un modelo lineal planteado por [7] para dar solución a conjeturas instaladas en la sociedad sobre los efectos que producen los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación, en las sesiones creativas tipo "lluvia de ideas". Para ello se presenta una primera sección enfocada en el modelo conceptual, modelo matemático y teorema de existencia y unicidad que explican, detallan y sustentan teóricamente el modelo lineal. Una segunda sección referida al estudio analítico, donde se trabaja y explica a través de dos métodos, los efectos de los factores involucrados en el modelo. Luego, una tercera sección referida al estudio numérico, donde se establecen una serie de cálculos con sus respectivas gráficas, con el fin de observar el desempeño de grupos característicos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", y evidenciar bajo qué condiciones el rendimiento de un grupo es mayor a otro, analizando las variaciones de productividad en relación a la tasa de generación de ideas. Finalmente en las secciones siguientes se presenta la discusión y conclusión de lo realizado.

2 OBJETIVOS

Objetivo general

Estudiar analítica y numéricamente los efectos de decaimiento, bloqueo y acomodación en una sesión grupal tipo “lluvia de ideas” expresadas en forma verbal.

Objetivos específicos

1. Construir una solución analítica del modelo matemático que representa una sesión grupal tipo “lluvia de ideas”.
2. Resolver numéricamente el modelo matemático que representa una sesión grupal tipo “lluvia de ideas”.
3. Simular una reunión creativa tipo “lluvia de ideas”.

3 MATERIALES Y METODOS

3.1 Modelo Conceptual

3.1.1. Reuniones creativas tipo "lluvia de ideas"

Al referirse a reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" se trabaja con la premisa de que existe un grupo de personas a los que se les entregará un problema y se les pedirá encontrar soluciones libremente, de manera que se cumpla a cabalidad el principio básico de una reunión creativa; ninguna idea puede ser rechazada pues todas las ideas son válidas. De esta manera, se entiende que participar en una reunión hace referencia a estar junto a otras personas en un espacio donde se logre una interacción entre los individuos que participan de ella, con el propósito de lograr un objetivo determinado, considerándose una instancia que trae mucho provecho al trabajo en equipo. Si ahora se le impone a que la reunión sea creativa, quiere decir que corresponde a una reunión basada en la presentación de situaciones problemáticas que se desarrollen en torno a la exposición de soluciones que estimulen la creatividad de los participantes. En un concepto más acotado, una reunión creativa tipo "lluvia de ideas" se puede definir como una técnica grupal utilizada para generar ideas, y al mismo tiempo, desarrollar la creatividad de los participantes para estimular la producción de ideas originales.
En esta investigación, una reunión creativa tipo "lluvia de ideas" se definirá como grupos de personas no muy numerosos que se congregan para intercambiar y exponer ideas creativas sobre un tema en particular, teniendo en cuenta que lo que se persigue con este tipo de reuniones es observar las diversas interacciones que se producen entre los individuos, y analizar específicamente cuál es la evolución en el tiempo de las ideas que se van generando. De esta manera se crea una variable que evoluciona de forma continua en el tiempo y propicia el modelamiento de la tasa de generación de ideas producidas en un tiempo determinado. En este escenario, tiene vital importancia los grupos reunidos con el fin de generar ideas creativas dado que se transforman en grupos particulamente adecuados para un enfoque de sistemas dinámicos en los cuales la tasa de producción de ideas de cada individuo proporciona una variable natural de rendimiento, medido en el tiempo [4].

3.1.2. Ventajas y desventajas de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas"

De acuerdo a lo planteado por [13], entre las ventajas de realizar reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" se pueden mencionar:
***** Impulsa y favorece la creatividad y la autonomía en todos los integrantes que participan de la reunión creativa.
***** Es una instancia donde la libre expresión no es coartada, esto quiere decir que los integrantes formulan sus ideas sin temor a ser rechazadas o enjuiciadas.
***** Es válido generar una idea a partir de otra expuesta por algún integrante de la reunión creativa, favoreciendo la generación del máximo de ideas en períodos pequeños de tiempo.
***** Incrementa el desarrollo del pensamiento y el autoestima de todos los integrantes que participan de la reunión creativa.

* La solución propuesta a la problemática que se presenta logra tener un carácter mucho más elaborado, debido a la gran cantidad de ideas que se exponen en la reunión creativa.

En base a lo propuesto por el mismo autor, es posible encontrar las siguientes desventajas de realizar reuniones creativas tipo "lluvia de ideas":
* Muchas veces el período de tiempo dispuesto para la generación de ideas es demasiado, lo que puede provocar un desconcierto en relación a la problemática para la que fueron reunidos.
* La responsabilidad, en cuanto a la producción de ideas, no es constante por parte de todos los integrantes de la reunión creativa.
* Si la reunión creativa consta de muchos integrantes, lo más probable es que no sean consideradas las ideas de algún o algunos integrantes.
* No siempre se considera el hecho de que no todos los integrantes de la reunión creativa se desenvuelven de mejor manera exponiendo verbalmente sus ideas, lo que podría afectar la generación de ideas de algún integrante tímido.
* Contrario a la desventaja anterior, puede darse que dentro del grupo que conforma la reunión creativa, se encuentren varios integrantes que se desenvuelvan muy bien hablando en público. Esto podría provocar que no se escucharan entre ellos y se formaran discusiones no referidas a la problemática que se quiere desarrollar.

3.1.3. Factores involucrados en una reunión creativa tipo "lluvia de ideas"

En relación a lo explicado anteriormente en torno al concepto de reunión creativa tipo "lluvia de ideas", éste conlleva una serie de subconceptos que son necesarios explicar, para entender la lógica del modelo matemático con el que se trabajará más adelante. Es por esto que de acuerdo a lo propuesto por la Real Academia Española[2], se tiene que:

- Idea (del latín *idĕa*: imagen, forma, apariencia; y del griego *ιδέα*: *idéa*): 'imagen o representación que queda en la mente luego de percibir una cosa' y/o 'ingenio para disponer, inventar o trazar una cosa'.
- Generación (del latín *generatio*, $-\bar{o}nis$): 'acción y efecto de generar', es decir el acto de 'ocurrencia' y/o 'propuesta verbalizada'.
- Creatividad (de *creativo* e $-idad$): 'estimulación de la capacidad para crear o inventar'.
- Resolución de problemas (resolución del latín *resolutio*, $-\bar{o}nis$; problema del latín *problēma* y del griego *πρόβλημα*: *próblēma*): 'efecto de resolver o aclarar una cuestión'.

Por lo tanto, en base a todas estas definiciones es posible puntualizar el concepto de reunión creativa tipo "lluvia de ideas" como la **'acción que realiza cada integrante del grupo, de verbalizar una propuesta que supuestamente podría aportar en la solución de un problema'**.

[2]Fuente: Diccionario de la Real Academia Española en linea, `http://dle.rae.es/?w=diccionario`

Por otra parte, dada la diversidad tanto de pensamiento como de comportamiento que existe entre las personas que conforman el grupo de reunión creativa, existen factores sociales y motivacionales que actúan sobre la tasa de generación de ideas provocando, generalmente, inhibiciones en el desarrollo de una reunión creativa; es decir, estos factores pueden motivar o desmotivar la producción de ideas de un individuo. Entre los factores más importantes se encuentran:

1. Decaimiento (Output decay): Para [4] este factor representa una característica específicamente humana, el cual a través del paso del tiempo (entendiéndose esto como una sesión de aproximadamente 30 minutos) desencadena una disminución de la tasa de "ocurrencia", es decir, una disminución de la productividad a través del tiempo. Dicho de otra manera, este factor hace referencia a la baja natural en el rendimiento de una persona provocada por los aspectos intrínsecos que coartan la participación de los integrantes del grupo de la reunión creativa, que se manifiestan a través de la incomodidad, la ansiedad social y la preocupación por las reacciones de los demás.

2. Bloqueo (Blocking): Para [4], el bloqueo es un factor desmotivante en la tasa de generación de ideas el cual está vinculado a aspectos extrínsecos que afectan negativamente el rendimiento del individuo a lo largo de la sesión creativa, impidiendo principalmente la 'verbalización' de sus ideas. Es decir, este factor hace referencia a la auto-inhibición que se relaciona directamente con el déficit de producción en las reuniones creativas debido a que por una parte, no todos los integrantes del grupo pueden hablar a la vez, lo que puede producir un olvido de las ideas que querían comunicar; y por otra parte, si algún integrante considera que sus ideas son muy diferentes a las demás expuestas, lo más probable es que no de a conocer sus pensamientos.

3. Acomodación (Matching): Para [4], este factor puede manifestarse de manera motivacional o desmotivacional dado que en este caso se considera que los individuos ajustan su tasa de productividad para aproximarse más a la tasa promedio del grupo. Es decir, corresponde a una percepción subjetiva que por una parte puede disminuir la productividad de un individuo si su tasa de generación de ideas es más alta que la media del grupo, o en caso contrario, podría aumentar la productividad del individuo si su tasa de generación es más baja que la media del grupo. Dicho de otra manera, se trata de un factor referido a la comparación del rendimiento de un participante respecto del promedio del grupo. Así, la diferencia de producción entre el individuo y el grupo en sí, puede considerarse positiva si un participante que tiene bajo rendimiento se dispone a aumentar su producción, o negativa, si un participante que tiene alto rendimiento intenta disminuir su producción.

4. Procesos Cognitivos (Cognitive Processes): A pesar de que este factor no se considera como parte del modelo lineal que describe la tasa de producción de ideas en esta investigación, al igual que los factores anteriores los procesos cognitivos alteran la producción de ideas. Para [14], los procesos cognitivos son una combinación entre personalidad y cognición que están referidos a cómo las personas usan sus talentos para lograr productos creativos en base al proceso de generación de ideas aleatorias. En este sentido, los procesos

cognitivos que están presentes en una sesión creativa tipo "lluvia de ideas" corresponden a generación de ideas, recuerdo de ideas y producción de ideas [4]. Es decir, los procesos cognitivos influyen en la productividad de un individuo a través de la generación de ideas, la producción de éstas y el almacenamiento de ideas en la memoria a corto plazo. Por esta razón, los procesos cognitivos pueden mejorar o inhibir la ideación creativa debido a que las ideas compartidas por otros pueden estimular las ideas adicionales como también pueden transformarse en distractores [21].

5. Lluvia de Ideas por escrito (Brainstorming in writing): Este tipo de "lluvia de ideas" tampoco se considera como parte del modelo lineal que describe la tasa de generación de ideas en esta investigación, debido a que corresponde a un modelamiento no lineal pero que también influye en la producción de ideas creativas. En este tipo de "lluvia de ideas" no se consideran los factores como la ansiedad social y el bloqueo de producción [20]. Es decir, como no se manifiestan dichos factores en la reunión creativa, no existe el efecto de inhibición al estar cara a cara con otro(s) individuo(s). De esta manera, este tipo de "lluvia de ideas" surge al considerar el factor de acomodación sólo en sentido positivo [7]. Por consiguiente, cuando el individuo posea una percepción subjetiva de que su rendimiento es más bajo que la media del grupo, tratará de aumentar su productividad. No obstante, cuando la percepción subjetiva del individuo corresponda a que su rendimiento es más alto que la media del grupo, no tratará de reducir su rendimiento.

Sintetizando, los factores definidos anteriormente son los responsables de la velocidad de producción de ideas en una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", originando una tasa de generación de ideas para cada individuo.

"El modelo matemático más simple supone que el cambio en la tasa de producción de cualquier individuo, es la suma ponderada de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación" [**4**].

Es decir, este modelo supone la primera propuesta de linealidad de estos tres factores, la cual consiste en conjeturar que la aceleración depende linealmente del decaimiento, bloqueo y acomodación, como se observa en el siguiente modelo matemático:

$$x_i^{'}(t) = -a_i \cdot x_i(t) - b_i \cdot \sum_{j \neq i} x_j(t) + m_i \cdot \left[\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j \neq i} x_j(t) - x_i(t) \right] \tag{1}$$

donde $i = 1, 2, \cdots, n$ corresponde al individuo i-ésimo, $x_i(t)$ es la tasa de producción por persona, a_i es la tasa de decaimiento, b_i es la sensibilidad al bloqueo, m_i es la tendencia a la acomodación y n es el tamaño del grupo.

En relación al modelo (1), éste corresponde a la tasa de producción de ideas del individuo i-ésimo la cual se ve afectada por la falta de ocurrencia debido a la baja natural en el rendimiento del individuo $(-a_i \cdot x_i(t))$, por la auto-inhibición que produce el estar cara a cara frente a otros individuos provocando la no verbalización de las ideas $(-b_i \cdot \sum_{j \neq i} x_j(t))$, y por la percepción subjetiva que posea el individuo respecto de su rendimiento en relación al rendimiento promedio del grupo $\left(m_i \cdot \left[\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j \neq i} x_j(t) - x_i(t)\right]\right)$.

Dado que el factor de acomodación puede manifestarse tanto de manera positiva como negativa debido a la diferencia de producción entre el individuo y el grupo en sí, éste fenómeno puede visualizarse en el tercer término que contempla el lado derecho del modelo (1):

$$\left(m_i \cdot \left[\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j \neq i} x_j(t) - x_i(t)\right]\right)$$

donde el signo (positivo o negativo) resulta de la diferencia entre el rendimiento promedio del grupo$(x_j(t))$ y el rendimiento del individuo $(x_i(t))$. Así, cuando el signo resulte positivo indicará que la percepción subjetiva del individuo respecto de su rendimiento, es menor que el rendimiento promedio del grupo por lo que tratará de aumentar su producción de ideas. Por el contrario, si el signo resulta negativo indicará que la percepción subjetiva del individuo respecto de su rendimiento, es mayor que el rendimiento promedio del grupo por lo que tratará de disminuir su producción de ideas.

Observación: Al suponer $y' = -k \cdot y$, equivalentemente corresponde a $y(x) = e^{-k \cdot x}$. Esto es, que y decae o decrece exponencialmente si $k > 0$. Por lo tanto, el modelo (1) representa una reducción esencialmente exponencial para x.

3.2 Modelo Matemático

El modelo (1) matricialmente queda expresado como:

$$\frac{dx}{dt} = -Ax - Bx + Mx \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_0 \tag{3}$$

en donde n representa el número de integrantes del grupo en la reunión creativa, x es un vector columna de orden n que representa la tasa de generación de ideas, A es una matriz diagonal de dimensión $n \times n$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

cuyas entradas a_i corresponden al coeficiente de decaimiento del individuo i-ésimo, B es una matriz de dimensión $n \times n$ de la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & 0 & b_2 & \dots & b_2 \\ b_3 & b_3 & 0 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donde b_i es el coeficiente de bloqueo del individuo i-ésimo, y M es una matriz de dimensión $n \times n$ de la forma

$$M = \begin{pmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{n-1} & \frac{m_1}{n-1} & \dots & \frac{m_1}{n-1} \\ \frac{m_2}{n-1} & -m_2 & \frac{m_2}{n-1} & \dots & \frac{m_2}{n-1} \\ \frac{m_3}{n-1} & \frac{m_3}{n-1} & -m_3 & \dots & \frac{m_3}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_n}{n-1} & \frac{m_n}{n-1} & \frac{m_n}{n-1} & \dots & -m_n \end{pmatrix}$$

donde m_i es el coeficiente de acomodación del individuo i-ésimo.

A modo de ilustración y para una mayor claridad se consideran las matrices involucradas en el modelo (2)-(3) para grupos de dos y tres personas.

1. Reunión creativa tipo "lluvia de ideas" con dos personas

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -m_1 & m_1 \\ m_2 & -m_2 \end{pmatrix}$$

2. Reunión creativa tipo "lluvia de ideas" con tres personas

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & b_2 \\ b_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2} \\ \frac{m_2}{2} & -m_2 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_3}{2} & \frac{m_3}{2} & -m_3 \end{pmatrix}$$

Ahora, considerando las matrices planteadas anteriormente (específicamente las involucradas en una reunión creativa con tres personas), el modelo (2)-(3) queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & b_2 \\ b_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2} \\ \frac{m_2}{2} & -m_2 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_3}{2} & \frac{m_3}{2} & -m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el modelo (2)-(3) representa linealmente los coeficientes de decaimiento, bloqueo y acomodación de cada individuo pero ignorando los procesos cognitivos profundos, además de ser un tipo de trabajo simultáneo en donde la información es entregada de una vez al inicio de la sesión creativa tipo "lluvia de ideas".
Dicho de otra manera, el modelo describe para cada participante, la evolución del número de ideas a lo largo del tiempo y se formaliza mediante ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, es un proceso dinámico que implica gestionar las relaciones entre los integrantes y contribuir al logro efectivo de los resultados de la reunión creativa [15].

En relación al modelo matemático y los factores involucrados en él, surgen interrogantes tales como ¿Qué otro factor se podría agregar al modelo en sí para asegurar una productividad a lo largo del tiempo? ¿Por qué se trabaja en base a una tasa acumulada de ideas?
Analizando este tipo de preguntas se puede plantear que uno de los factores importantes a considerar dentro de una sesión grupal tipo lluvia de ideas corresponde a los procesos cognitivos de cada uno de los integrantes debido a que son concernientes a la personalidad de cada individuo que permiten el desarrollo de las habilidades intra e interpersonales.
En cuanto al concepto de tasa acumulada, cabe señalar que en este tipo de reuniones grupales no se discrimina por calidad sino por cantidad de ideas generadas.

3.3 Teorema de Existencia y Unicidad

Para llevar a cabo correctamente una modelación matemática de un problema físico en particular, es necesario reflexionar en interrogantes como ¿existe una solución para el problema que se está modelando? ¿esa solución es única? Es por este motivo que se presenta este apartado sobre el teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales, considerando que tanto la existencia como la unicidad son aspectos de suma importancia a la hora de modelar matemáticamente un problema.
Antes de enunciar dicho teorema, se explicarán algunas notaciones y definiciones matemáticas para lograr una mayor comprensión del teorema en sí.

Simbología	Definición
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
S	Sistema lineal de la forma $x^{'} = A(t) \cdot x$
S_f	Sistema lineal de la forma $x^{'} = A(t) \cdot x + f(t)$
$f(t)$	vector de orden n de funciones continuas en intervalo real J. Es decir; $f : J \to \mathbb{R}^n$.
$A \in M_n$	Matriz real de $n \times n$ donde M es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.
I	Matriz identidad de $n \times n$
$X(t)$	Matriz fundamental que corresponde a la solución única del sistema S que se define en el intervalo real J.
$x(t)$	Solución única del sistema S_f tal que $x(t_0) = x_0$. Está dada por la fórmula $x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds$, con $t \in J$.
e^t	La función exponencial e^t puede ser definida de diversas maneras equivalentes entre sí. En particular, como una serie de potencia: $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$
e^{At}	Serie infinita dada por $e^{At} \equiv I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n t^n$ la cual converge para cada A y t, por lo que e^{At} está definida para todas las matrices cuadradas.

Tabla Nº1: Definición de simbologías matemáticas presentes en el teorema de existencia y unicidad.

Teorema[3]
Sea $A \in M_n$ dada. Entonces la matriz fundamental $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, del sistema

$$x^{'} = Ax, \tag{4}$$

con la propiedad $X(0) = I$, está dada por la fórmula $X(t) = e^{tA}$. Asimismo, para el sistema

$$x^{'} = Ax + f(t) \tag{5}$$
$$x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

[3]Fuente: Teorema 3.17 extraído del libro Advanced Ordinary Differential Equations de Kartsatos (2005), página 53 de la tercera edición [16]. Traducción del Inglés realizada por la autora.

la fórmula de variación de parámetros se puede escribir de la forma

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}f(s)ds \tag{7}$$

A continuación se presenta la demostración del teorema, el cual se divide en dos partes. En la primera se demuestra que la matriz fundamental $X(t)$ está dada por (4), y en la segunda se demuestra que la fórmula de variación de parámetros se puede escribir como (5).

Para demostrar que la matriz fundamental $X(t)$ está dada por (4), se debe suponer que $X(t) = e^{t\cdot A}$
Entonces, para $h \neq 0$, se tiene que

$$X(t+h) - X(t) = e^{(t+h)\cdot A} - e^{t\cdot A} = e^{t\cdot A} \cdot (e^{h\cdot A} - I)$$

Sin embargo,

$$e^{h\cdot A} - I = h \cdot A + \frac{(h\cdot A)^2}{2!} + \cdots$$
$$e^{h\cdot A} - I = h \cdot A + h \cdot L(h, A)$$

donde $L(h, A) \to 0$ como $h \to 0$.
Por consiguiente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X^{'}(t) = A \cdot e^{t\cdot A} = A \cdot X(t)$$

Por lo tanto, dado que $x^{'} = A \cdot x$ tiene soluciones únicas con respecto a las condiciones iniciales, se demuestra que $X(t) = e^{t\cdot A}$ satisface $X^{'}(t) = A \cdot X(t)$.

Ahora, para demostrar que la fórmula de variación de parámetros se puede escribir como (5) se asume que $X(t) = e^{t\cdot A}$ (demostrado anteriormente).
Por lo tanto, reemplazando $X(t) = e^{t\cdot A}$ en $x(t)$ (ver Tabla N°1) se tiene que

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)ds$$
$$x(t) = e^{t\cdot A} \cdot e^{-t_0\cdot A} \cdot x_0 + e^{t\cdot A} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-s\cdot A}f(s)ds$$
$$x(t) = e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\cdot A}f(s)ds$$

Por lo tanto, la fórmula de variación de constantes puede ser escrita como (5).
El énfasis en presentar un teorema de existencia y unicidad se encuentra en que al modelar reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" se asume una propuesta de linealidad de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación, la cual consiste en suponer que la tasa de producción de ideas depende linealmente de estos tres factores y equivale a suponer una solución de estructura exponencial, de ahí la relación entre el teorema de existencia y unicidad, y el modelo (2)-(3).

4 RESULTADOS

4.1 Solución Analítica

4.1.1 El Método de los Valores Propios

Toda ecuación diferencial ordinaria o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos o más, se puede escribir, vía transformación de variable, como un sistema de orden uno, tal como

$$\begin{cases} x_1^{'} = g_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2^{'} = g_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ x_n^{'} = g_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

donde x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n corresponden a las incognitas del sistema y g_1, g_2, g_3, $\cdots$, g_n; con $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, son los datos.
En lo que sigue nos ocuparemos del caso lineal y homogéneo

$$\begin{cases} x_1^{'} = a_{11}(t) \cdot x_1 + a_{12}(t) \cdot x_2 + \cdots + a_{1n}(t) \cdot x_n \\ x_2^{'} = a_{21}(t) \cdot x_1 + a_{22}(t) \cdot x_2 + \cdots + a_{2n}(t) \cdot x_n \\ \vdots \\ x_n^{'} = a_{n1}(t) \cdot x_1 + a_{n2}(t) \cdot x_2 + \cdots + a_{nn}(t) \cdot x_n \end{cases}, \text{ donde } a_{ij} \in C[I].$$

Lo que escrito matricialmente corresponde a

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ \vdots \\ x_n^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ es decir; } x^{'} = A \cdot x$$

Además se tiene que

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \text{ y } x(0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \text{ donde } \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ son las constantes dadas.}$$

Por lo tanto es posible plantear condiciones iniciales tales como

$$x(t_0) = x_0$$

Sintetizando lo anterior, la idea es poder determinar x a través de:

$$\begin{cases} x^{'} = A \cdot x \\ s.a.\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

tal que $x(t) = e^{t \cdot \lambda}$

Es aquí donde se introducen las definiciones de valor y vector propio, las cuales serán esenciales en parte del trabajo que se presenta a continuación. En este ámbito, se dirá que "$\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A sí y sólo si existe $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ tal que $A \cdot v = \lambda \cdot v$". Por lo tanto, a través del polinomio característico de A

$$p(x) = det(A - \lambda I) = 0$$

se encontrarán los valores propios. Además, dado que "v es un vector propio asociado al valor propio de λ" entonces

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$A \cdot v - \lambda \cdot v = 0$$

$$(A - \lambda I) \cdot v = 0$$

será la forma de encontrar los vectores propios.
Una vez que se calculan los valores y vectores propios, la solución del sistema (6) se escribe como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

De acuerdo a lo presentado anteriormente, ¿por qué no es **trivial** resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} x' = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad A = (a_{ij})n \times n$$

usando el método de los valores propios?

Al considerar el polinomio n-ésimo $p(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \cdots a_n \cdot \lambda^n$ es posible obtener fórmulas analíticas para λ cuando $n = 2, 3, 4$ pero para $n \geqslant 5$ no existen fórmulas analíticas. Por lo tanto al trabajar con sesiones creativas tipo "lluvia de ideas" para $n = 2, 3, 4, \cdots, 8, 9, 10$, resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias no se transforma en un ejercicio trivial.

En este sentido, ¿El método de los valores propios es un método analítico o un método numérico? ¿En qué momento deja de ser uno de los métodos y se transforma en otro?
Al analizar lo planteado anteriormente, se puede señalar que para $n \geqslant 5$ no existen fórmulas analíticas pero en realidad al momento de trabajar con algún programa computacional, automáticamente el método analítico se considera un método numérico.

A continuación, se presenta un estudio analítico subdividido en dos secciones. La primera referida a una tipología de casos en una reunión creativa con dos integrantes, y una segunda sección referida a una tipología de casos en una reunión creativa con tres integrantes.

A. n=2

Para realizar el estudio analítico de esta investigación se considerará el modelo (2)-(3) y su respectiva condición inicial, subdividiendo esta sección en varios casos que se pueden presentar, considerando los valores de los coeficientes de decaimiento, bloqueo y acomodación, y considerando las condiciones iniciales para una reunión creativa de dos integrantes, como se indica en la siguiente tabla:

Caso	a_i	b_i	m_i	$x_i(0)$
1	$a_1 = a_2$	$b_1 = b_2$	$m_1 = m_2$	$p = q$
2	$a_1 = a_2$	$b_1 = b_2$	$m_1 = m_2$	$p \neq q$
3	$a_1 \neq a_2$	$b_1 \neq b_2$	$m_1 \neq m_2$	$p = q$
4	$a_1 \neq a_2$	$b_1 \neq b_2$	$m_1 \neq m_2$	$p \neq q$

Tabla Nº2: Definición de casos en una reunión creativa de dos integrantes.

Caso Nº1: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -m_1 & m_1 \\ m_1 & -m_1 \end{bmatrix}$$

Se define la nueva matriz auxiliar $C = -A - B + M$:

$$C = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + m_1 \\ -b_1 + m_1 & -a_1 - m_1 \end{bmatrix},$$

y de esta manera el modelo (2)-(3) se puede reescribir de la forma $\frac{dx}{dt} = C \cdot x$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + m_1 \\ -b_1 + m_1 & -a_1 - m_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Se utiliza la ecuación característica $|C - \lambda \cdot I| = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, para determinar los valores propios del sistema (9):

$$\left| \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + m_1 \\ -b_1 + m_1 & -a_1 - m_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

por lo tanto los valores propios corresponden a:

$$\lambda_1 = -(a_1 + b_1)$$
$$\lambda_2 = -(a_1 + 2m_1 - b_1)$$

A continuación se utiliza la ecuación característica $(C - \lambda \cdot I) \cdot v = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, para determinar los vectores propios del sistema (9) considerando cada uno de los valores propios obtenidos:

i) $\lambda_1 = -(a_1 + b_1)$

$$\begin{bmatrix} b_1 - m_1 & m_1 - b_1 \\ m_1 - b_1 & b_1 - m_1 \end{bmatrix} \cdot v_1 = 0$$

definiendo $v_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ se tiene que, $v_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto para $\lambda_1 = -(a_1 + b_1)$ existe $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y de esta manera:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+b_1)t}$$

ii) $\lambda_2 = -(a_1 - b_1 + 2m_1)$

$$\begin{bmatrix} m_1 - b_1 & m_1 - b_1 \\ m_1 - b_1 & m_1 - b_1 \end{bmatrix} \cdot v_2 = 0$$

definiendo $v_2 = \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$ se tiene que, $v_2 = \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_4 \\ k_4 \end{bmatrix} = k_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto para $\lambda_2 = -(a_1 - b_1 + 2m_1)$ existe $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y de esta manera:

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1-b_1+2m_1)t}$$

Una vez obtenidas las expresiones de X_1 y X_2, la solución general del sistema (9) está dada por:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 \text{ esto es;}$$

$$X = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+b_1)\cdot t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+2m_1-b_1)\cdot t}$$

A partir de la solución general planteada anteriormente se calculan las constantes c_1 y c_2 aplicando la condición inicial $x(0) = \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}$, obteniendo la solución particular del sistema (9) que está dada por:

$$X(t) = p \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+b_1)\cdot t}, \text{ con } t \in [0, T]$$

Por lo tanto,

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+b_1)\cdot t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = 1, 2$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Caso Nº2: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) y la nueva matriz auxiliar quedan expresadas de la misma manera que en el **Caso Nº1**, obteniendo de esta forma el modelo (9) nuevamente. De manera que los valores propios, vectores propios y solución general no sufren transformación alguna. Por lo tanto, en relación al caso anterior, la modificación se encuentra en la solución particular del sistema debido a que las condiciones iniciales no son iguales para ambos integrantes de la reunión creativa, de este modo al calcular las constantes c_1 y c_2 aplicando las condiciones iniciales $x(0) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, la solución particular del sistema (9) está dada por:

$$X(t) = \tfrac{p+q}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+b_1)\cdot t} - \tfrac{p-q}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+2m_1-b_1)\cdot t}, \text{ con } t \in [0, T]$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{p+q}{2} \cdot e^{-(a_1+b_1)\cdot t} + \frac{p-q}{2} \cdot e^{-(a_1+2m_1-b_1)\cdot t}$$

$$x_2 = \frac{p+q}{2} \cdot e^{-(a_1+b_1)\cdot t} - \frac{p-q}{2} \cdot e^{-(a_1+2m_1-b_1)\cdot t}$$

donde x_1 y x_2 son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Observación: Un hecho importante que se evidencia en este segundo caso tiene relación con el factor de acomodación. Debido a que en este caso surge el coeficiente $m = m_1$, situación que no se observa en el primer caso. Lo cual indicaría que las condiciones iniciales tienen un impacto relevante en el factor de acomodación. Además, al observar el cuociente $\frac{p-q}{2}$ se explica la ausencia de dicho factor en el primer caso, dado que si $p = q$, $\frac{p-q}{2} = 0$.
Por otra parte, en la expresión del primer exponente $(-(a_1 + b_1)t)$ es posible evidenciar que si $a_1, b_1 > 0$ entonces $e^{-(a_1+b_1)t} \to 0$ si $t \to \infty$. Del mismo modo, de la expresión del segundo exponente $(-(a_1 + 2m_1 - b_1)t)$ es posible evidenciar si $m_1 > \frac{b_1-a_1}{2}$ y b_1 es dominante, esto implicaría que la solución se des-estabiliza.

Caso Nº3: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -m_1 & m_1 \\ m_2 & -m_2 \end{bmatrix}$$

Se define la nueva matriz auxiliar $C = -A - B + M$:

$$C = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + m_1 \\ -b_2 + m_2 & -a_2 - m_2 \end{bmatrix},$$

y de esta manera el modelo (2)-(3) se puede reescribir de la forma $\frac{dx}{dt} = C \cdot x$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + m_1 \\ -b_2 + m_2 & -a_2 - m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Se utiliza la ecuación característica $|C - \lambda \cdot I| = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, para determinar los valores propios del sistema (10):

$$\left| \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + m_1 \\ -b_2 + m_2 & -a_2 - m_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^2 + (-a_1 + m_1 + a_2 + m_2) \cdot \lambda + (a_1 + m_1) \cdot (a_2 + m_2) - (m_2 - b_2) \cdot (m_1 - b_1) = 0$$

Para encontrar los valores y vectores propios se utiliza el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$", arrojando los siguientes resultados[4]:

$$\lambda_1 = \frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2+4b_1b_2+m_1^2+(2a_1-2a_2-4b_2)m_1+m_2^2-(2a_1-2a_2+4b_1-2m_1)m_2}}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2+4b_1b_2+m_1^2+(2a_1-2a_2-4b_2)m_1+m_2^2-(2a_1-2a_2+4b_1-2m_1)m_2}}{2}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-a_1+a_2-m_1+m_2-\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2+4b_1b_2+m_1^2+(2a_1-2a_2-4b_2)m_1+m_2^2-(2a_1-2a_2+4b_1-2m_1)m_2}}{2m_1-2b_1} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{-a_1+a_2-m_1+m_2-\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2+4b_1b_2+m_1^2+(2a_1-2a_2-4b_2)m_1+m_2^2-(2a_1-2a_2+4b_1-2m_1)m_2}}{2m_1-2b_1} \end{bmatrix}$$

[4]Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado B.1 de la sección Anexos.

Observación: En los resultados obtenidos es posible apreciar que $\lambda_2 = -\lambda_1$ y lo mismo ocurre con las segundas componentes de los vectores propios. Por lo tanto, de manera arbitraria se introduce una variable auxiliar ϕ, con la salvedad de que la cantidad subradical sea positiva, para lograr mayor claridad y simplicidad de las expresiones matemáticas posteriores:

$$\phi = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 + 4b_1b_2 + m_1^2 + (2a_1 - 2a_2 - 4b_2)m_1 + m_2^2 - (2a_1 - 2a_2 + 4b_1 - 2m_1)m_2}$$

Que factorizando resulta:

$$\phi = \sqrt{(m_1 + m_2 + a_1 + a_2)^2 - 4((b_1 + a_1)m_2 + (b_2 + a_2)m_1 - b_1b_2 + a_1a_2)}$$

Donde cabe la posibilidad de que;
i) $\phi = 0$
ii) $\phi \in \mathbb{R}$
iii) $\phi \in \mathbb{C}$
Por lo tanto, ϕ es un parámetro que gobierna la solución o dinámica del sistema.

Considerando lo anterior, los nuevos coeficientes de los valores y vectores propios están dados por:

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + a_2 + m_1 + m_2 - \phi}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{a_1 + a_2 + m_1 + m_2 - \phi}{2}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -\frac{a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi}{2m_1 - 2b_1} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi}{2m_1 - 2b_1} \end{bmatrix}$$

Con estos valores es posible plantear la solución general del sistema (10) como:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2, \text{ esto es;}$$

$$X = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -\frac{a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi}{2m_1 - 2b_1} \end{bmatrix} \cdot e^{\frac{a_1 + a_2 + m_1 + m_2 - \phi}{2} \cdot t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \frac{a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi}{2m_1 - 2b_1} \end{bmatrix} \cdot e^{-\frac{a_1 + a_2 + m_1 + m_2 - \phi}{2} \cdot t}$$

Haciendo uso de la condición inicial $x(0) = \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}$ se calculan las constantes c_1 y c_2, obteniendo la solución particular del sistema (10) que está dada por:

$$x_1 = \frac{a_1 - a_2 + 2b_1 - m_1 - m_2 + \phi}{2(a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)} p \cdot e^{\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$
$$+ \frac{a_1 - a_2 - 2b_1 + 3m_1 - m_2 + \phi}{2(a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)} p \cdot e^{-\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$

$$x_2 = -\frac{a_1 - a_2 + 2b_1 - m_1 - m_2 + \phi}{4(m_1 - b_1)} p \cdot e^{\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$
$$+ \frac{a_1 - a_2 - 2b_1 + 3m_1 - m_2 + \phi}{4(m_1 - b_1)} p \cdot e^{-\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$

Donde x_1 y x_2 con $t \in [0, T]$, son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Caso N°4: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) y la nueva matriz auxiliar quedan expresadas de la misma manera que en el **Caso N°3**, obteniendo de esta forma el modelo (10) nuevamente. De manera que los valores propios, vectores propios y solución general no sufren transformación alguna. Por lo tanto, en relación al caso anterior, la modificación se encuentra en la solución particular del sistema debido a que las condiciones iniciales no son iguales para ambos integrantes de la reunión creativa, de este modo al calcular las constantes c_1 y c_2 aplicando las condiciones iniciales $x(0) = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, la solución particular del sistema (10) está dada por:

$$x_1 = \frac{(a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)p - (2m_1 - 2b_1)q}{2(a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)} \cdot e^{\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$
$$+ \frac{(2m_1 - 2b_1)q + (a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)p}{2(a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)} \cdot e^{-\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$

$$x_2 = -\frac{(a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)p - (2m_1 - 2b_1)q}{4(m_1 - b_1)} \cdot e^{\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}$$
$$+ \frac{(2m_1 - 2b_1)q + (a_1 - a_2 + m_1 - m_2 + \phi)p}{4(m_1 - b_1)} \cdot e^{-\frac{a_1+a_2+m_1+m_2-\phi}{2} \cdot t}]$$

Donde x_1 y x_2 con $t \in [0, T]$, son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Observación: Para $n = 2$ se logra resolver el sistema en general dado que considerando las soluciones obtenidas en el caso N°4, si $p = q$ entonces se obtienen las soluciones del caso N°3.

B. n=3

Para realizar el estudio analítico de esta investigación se considerará el modelo (2)-(3) y su respectiva condición inicial, subdividiendo esta sección en tres casos, aunque evidentemente existen más casos, que se pueden presentar considerando los valores de los coeficientes de decaimiento, bloqueo y acomodación, y las condiciones iniciales para una reunión creativa de tres integrantes, como se indica en la siguiente tabla:

Caso	a_i	b_i	m_i	$x_i(0)$
1	$a_1 = a_2 = a_3$	$b_1 = b_2 = b_3$	$m_1 = m_2 = m_3$	$p = q = r$
2	$a_1 = a_2 = a_3$	$b_1 = b_2 = b_3$	$m_1 = m_2 = m_3$	$p \neq q \neq r$
3	$a_1 = a_2 = a_3$	$b_1 = b_2 = b_3$	$m_1 \neq m_2 \neq m_3$	$p \neq q \neq r$

Tabla N°3: Definición de casos en una reunión creativa de tres integrantes.

Observación: Los casos que se plantean en la tabla N°3 son sólo tres debido a que con otros posibles casos no se obtuvo solución a través del método de valores propios usando el programa "$wxMaxima$" y también se omitieron otros debido a la gran extensión de las expresiones matemáticas resultantes, las cuales no aportaban material de análisis en cuanto al desempeño de individuos en una reunión creativa tipo "lluvia de ideas".

Caso N°1: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_1 \\ b_1 & 0 & b_1 \\ b_1 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2} \\ \frac{m_1}{2} & -m_1 & \frac{m_1}{2} \\ \frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2} & -m_1 \end{bmatrix}$$

Se define la nueva matriz auxiliar $C = -A - B + M$:

$$C = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + \frac{m_1}{2} & -b_1 + \frac{m_1}{2} \\ -b_1 + \frac{m_1}{2} & -a_1 - m_1 & -b_1 + \frac{m_1}{2} \\ -b_1 + \frac{m_1}{2} & -b_1 + \frac{m_1}{2} & -a_1 - m_1 \end{bmatrix},$$

y de esta manera el modelo (2)-(3) se puede reescribir de la forma $\frac{dx}{dt} = C \cdot x$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + \frac{m_1}{2} & -b_1 + \frac{m_1}{2} \\ -b_1 + \frac{m_1}{2} & -a_1 - m_1 & -b_1 + \frac{m_1}{2} \\ -b_1 + \frac{m_1}{2} & -b_1 + \frac{m_1}{2} & -a_1 - m_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Utilizando el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$", las soluciones correspondientes a los valores propios del sistema (11) son:

$$\lambda_1 = -2b_1 - a_1$$

$$\lambda_2 = -\frac{3m_1 - 2b_1 + 2a_1}{2}$$

$$\lambda_3 = -\frac{3m_1 - 2b_1 + 2a_1}{2}$$

Observación: Se evidencia multiplicidad 1 en el primer valor propio y multiplicidad 2 en el segundo y tercer valor propio. Es decir, $\lambda_2 = \lambda_3$.

Haciendo uso del mismo programa se obtienen las expresiones para los vectores propios del sistema (11), las cuales son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Conocidos estos valores, la solución general del sistema (11) queda expresada como:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3, \text{ esto es;}$$
$$X = c_1 \cdot v_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot v_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + c_3 \cdot v_3 \cdot e^{\lambda_3 t}, \text{ con } t \in [0, T]$$

Calculando las constantes c_1, c_2 y c_3 aplicando las condiciones iniciales, se obtiene la solución particular del sistema (11) que está dada por:

$$X(t) = p \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-(a_1+2b_1)\cdot t}, \text{ con } t \in [0, T]$$

Por lo tanto,

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+2b_1)\cdot t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Caso Nº2: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) y la nueva matriz auxiliar quedan expresadas de la misma manera que en el **Caso Nº1**, obteniendo de esta forma el modelo (11) nuevamente. De manera que los valores propios, vectores propios y solución general no sufren transformación alguna. Por lo tanto, en relación al caso anterior, la modificación se encuentra en la solución particular del sistema debido a que las condiciones iniciales no son iguales para los integrantes de la reunión creativa, de este modo al calcular las constantes c_1, c_2 y c_3 aplicando las condiciones iniciales $x(0) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$, la solución particular del sistema (11) está dada por:

$$x_1 = \frac{p+q+r}{3} \cdot e^{(-2b_1-a_1)t} + \frac{2p-q-r}{3} \cdot e^{\frac{-2a_1+2b_1-3m_1}{2}t}$$
$$x_2 = \frac{p+q+r}{3} \cdot e^{(-2b_1-a_1)t} - \frac{p-2q+r}{3} \cdot e^{\frac{-2a_1+2b_1-3m_1}{2}t}$$
$$x_3 = \frac{p+q+r}{3} \cdot e^{(-2b_1-a_1)t} - \frac{p+q-2r}{3} \cdot e^{\frac{-2a_1+2b_1-3m_1}{2}t}$$

Donde x_1, x_2 y x_3 con $t \in [0,T]$, son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Caso Nº3: En este caso las matrices del modelo (2)-(3) quedan expresadas de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_1 \\ b_1 & 0 & b_1 \\ b_1 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2} \\ \frac{m_2}{2} & -m_2 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_3}{2} & \frac{m_3}{2} & -m_3 \end{bmatrix}$$

Se define la nueva matriz auxiliar $C = -A - B + M$:

$$C = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + \frac{m_1}{2} & -b_1 + \frac{m_1}{2} \\ -b_1 + \frac{m_2}{2} & -a_1 - m_2 & -b_1 + \frac{m_2}{2} \\ -b_1 + \frac{m_3}{2} & -b_1 + \frac{m_3}{2} & -a_1 - m_3 \end{bmatrix},$$

y de esta manera el modelo (2)-(3) se puede reescribir de la forma $\frac{dx}{dt} = C \cdot x$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 - m_1 & -b_1 + \frac{m_1}{2} & -b_1 + \frac{m_1}{2} \\ -b_1 + \frac{m_2}{2} & -a_1 - m_2 & -b_1 + \frac{m_2}{2} \\ -b_1 + \frac{m_3}{2} & -b_1 + \frac{m_3}{2} & -a_1 - m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Para encontrar los valores y vectores propios se utiliza el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$", arrojando los siguientes resultados[5] (con la salvedad de que la cantidad subradical sea positiva):

$$\lambda_1 = \frac{2a_1-2b_1+m_1+m_2+m_3-\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2+m_3^2-(m_1+m_2)m_3}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2a_1+2b_1-m_1-m_2-m_3+\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2+m_3^2-(m_1+m_2)m_3}}{2}$$

$$\lambda_3 = -a_1 - 2b_1$$

[5]Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado B.2 de la sección Anexos.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2b_1m_1-(2b_1+m_1)m_2+m_2^2-(2b_1-m_2)\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2+m_3^2-(m_1+m_2)m_3}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \\ \frac{2b_1m_1+m_3^2-(2b_1+m_1)m_3+(2b_1-m_3)\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2+m_3^2-(m_1+m_2)m_3}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2b_1m_1-m_2^2+(2b_1+m_1)m_2+(2b_1-m_2)\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2+m_3^2-(m_1+m_2)m_3}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \\ \frac{-2b_1m_1-m_3^2+(2b_1+m_1)m_3-(2b_1-m_3)\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2+m_3^2-(m_1+m_2)m_3}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observación: De manera arbitraria se introduce una variable auxiliar $\tilde{\phi}$, con la salvedad de que la cantidad subradical sea positiva, para lograr mayor claridad y simplicidad de las expresiones matemáticas posteriores:

$$\tilde{\phi} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - m_1m_2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)m_3}$$

donde cabe la posibilidad de que;
i) $\tilde{\phi} = 0$
ii) $\tilde{\phi} \in \mathbb{R}$
iii) $\tilde{\phi} \in \mathbb{C}$
Por lo tanto, $\tilde{\phi}$ es un parámetro que gobierna la solución o dinámica del sistema.

Considerando lo anterior, los nuevos coeficientes de los valores y vectores propios están dados por:

$$\lambda_1 = \frac{2a_1 - 2b_1 + m_1 + m_2 + m_3 - \tilde{\phi}}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2a_1 - 2b_1 + m_1 + m_2 + m_3 - \tilde{\phi}}{2}$$

$$\lambda_3 = -a_1 - 2b_1$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2b_1m_1-(2b_1+m_1)m_2+m_2^2-(2b_1-m_2)\tilde{\phi}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \\ \frac{2b_1m_1+m_3^2-(2b_1+m_1)m_3+(2b_1-m_3)\tilde{\phi}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2b_1m_1-m_2^2+(2b_1+m_1)m_2+(2b_1-m_2)\tilde{\phi}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \\ \frac{-2b_1m_1-m_3^2+(2b_1+m_1)m_3-(2b_1-m_3)\tilde{\phi}}{(2b_1-m_1)(m_2-m_3)} \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir de los resultados obtenidos se plantea la solución general del sistema (12), la cual queda expresada como:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3, \text{ esto es;}$$
$$X = c_1 \cdot v_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot v_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + c_3 \cdot v_3 \cdot e^{\lambda_3 t}, \text{ con } t \in T$$

Observación: La solución general se presenta de esa manera debido a que las expresiones matemáticas de valores y vectores propios son muy extensas para presentarlas en conjunto. Además, cabe mencionar que no se extiende el estudio analítico más allá de los tres casos expuestos para $n = 3$ porque a través del método de valores propios no es posible encontrar las soluciones pertinentes o las soluciones son expresiones muy extensas para ser presentadas[6].

[6]Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado B.2 de la sección Anexos.

4.1.2 Estudio Analítico usando *wxMaxima*

Esta segunda parte de la sección "solución analítica" se enfoca en realizar un estudio analítico usando los comandos que presenta el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$". Para ello se consideran los casos de reuniones creativas para $n = \overline{4,7}$ manteniendo los mismos valores para todos los parámetros involucrados, esto es, $a_i = a_1$, $b_i = b_1$ y $m_i = m_1$.
En cuanto a las condiciones iniciales que se considerarán, en primera instancia se estiman los mismos valores para cada uno de los integrantes, esto es, $x_{i0} = p$; y en segunda instancia se presentan las soluciones considerando diferentes valores de condición inicial para cada integrante, esto es, $x(0) = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}, x_{70}) = (p, q, r, s, u, v, w)$.

A. n=4
Las soluciones[7] que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+3b_1)t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,4}$$

A. n=5
Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+4b_1)t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,5}$$

A. n=6
Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+5b_1)t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,6}$$

A. n=7
Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+6b_1)t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,7}$$

[7] Observación: El detalle se puede revisar en el apartado B.3 de la sección Anexos.

Observación: A continuación se presentan las soluciones obtenidas considerando valores de condiciones iniciales diferentes para cada uno de los integrantes que conforman los distintos grupos.

B. n=4

Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_1(t) = \frac{p+q+r+s}{4} \cdot e^{-(a_1+3b_1)t} + \frac{3p-q-r-s}{4} \cdot e^{-\frac{3a_1-3b_1+4m_1}{3}t}$$

$$x_2(t) = \frac{p+q+r+s}{4} \cdot e^{-(a_1+3b_1)t} - \frac{p-3q+r+s}{4} \cdot e^{-\frac{3a_1-3b_1+4m_1}{3}t}$$

$$x_3(t) = \frac{p+q+r+s}{4} \cdot e^{-(a_1+3b_1)t} - \frac{p+q-3r+s}{4} \cdot e^{-\frac{3a_1-3b_1+4m_1}{3}t}$$

$$x_4(t) = \frac{p+q+r+s}{4} \cdot e^{-(a_1+3b_1)t} - \frac{p+q+r-3s}{4} \cdot e^{-\frac{3a_1-3b_1+4m_1}{3}t}$$

B. n=5

Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_1(t) = \frac{p+q+r+s+u}{5} \cdot e^{-(a_1+4b_1)t} + \frac{4p-q-r-s-u}{5} \cdot e^{-\frac{4a_1-4b_1+5m_1}{4}t}$$

$$x_2(t) = \frac{p+q+r+s+u}{5} \cdot e^{-(a_1+4b_1)t} - \frac{p-4q+r+s+u}{5} \cdot e^{-\frac{4a_1-4b_1+5m_1}{4}t}$$

$$x_3(t) = \frac{p+q+r+s+u}{5} \cdot e^{-(a_1+4b_1)t} - \frac{p+q-4r+s+u}{5} \cdot e^{-\frac{4a_1-4b_1+5m_1}{4}t}$$

$$x_4(t) = \frac{p+q+r+s+u}{5} \cdot e^{-(a_1+4b_1)t} - \frac{p+q+r-4s+u}{5} \cdot e^{-\frac{4a_1-4b_1+5m_1}{4}t}$$

$$x_5(t) = \frac{p+q+r+s+u}{5} \cdot e^{-(a_1+4b_1)t} - \frac{p+q+r+s-4u}{5} \cdot e^{-\frac{4a_1-4b_1+5m_1}{4}t}$$

B. n=6

Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_1(t) = \frac{p+q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-(a_1+5b_1)t} + \frac{5p-q-r-s-u-v}{6} \cdot e^{-\frac{5a_1-5b_1+6m_1}{5}t}$$

$$x_2(t) = \frac{p+q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-(a_1+5b_1)t} - \frac{p-5q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-\frac{5a_1-5b_1+6m_1}{5}t}$$

$$x_3(t) = \frac{p+q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-(a_1+5b_1)t} - \frac{p+q-5r+s+u+v}{6} \cdot e^{-\frac{5a_1-5b_1+6m_1}{5}t}$$

$$x_4(t) = \frac{p+q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-(a_1+5b_1)t} - \frac{p+q+r-5s+u+v}{6} \cdot e^{-\frac{5a_1-5b_1+6m_1}{5}t}$$

$$x_5(t) = \frac{p+q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-(a_1+5b_1)t} - \frac{p+q+r+s-5u+v}{6} \cdot e^{-\frac{5a_1-5b_1+6m_1}{5}t}$$

$$x_6(t) = \frac{p+q+r+s+u+v}{6} \cdot e^{-(a_1+5b_1)t} - \frac{p+q+r+s+u-5v}{6} \cdot e^{-\frac{5a_1-5b_1+6m_1}{5}t}$$

B. n=7

Las soluciones que entrega el programa correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa están dadas por:

$$x_1(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} + \frac{6p-q-r-s-u-v-w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

$$x_2(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} - \frac{p-6q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

$$x_3(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} - \frac{p+q-6r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

$$x_4(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} - \frac{p+q+r-6s+u+v+w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

$$x_5(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} - \frac{p+q+r+s-6u+v+w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

$$x_6(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} - \frac{p+q+r+s+u-6v+w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

$$x_7(t) = \frac{p+q+r+s+u+v+w}{7} \cdot e^{-(a_1+6b_1)t} - \frac{p+q+r+s+u+v-6w}{7} \cdot e^{-\frac{6a_1-6b_1+7m_1}{6}t}$$

Como síntesis de este estudio analítico, se puede mencionar que en las diferentes tipologías de reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" considerando dos y tres integrantes a través del método de los valores propios y también a través de los comandos utilizados por el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$" para mayor número de integrantes, permitieron capturar algunos aspectos esenciales de las dinámicas modeladas.

Sin embargo, dado las complejidades algebraicas y limitaciones del programa computacional, no fue posible obtener soluciones analíticas para $n \geqslant 3$ y las correspondientes matrices arbitrarias A, B, M donde cada uno de los valores de los parámetros involucrados fuese diferente para cada individuo[8].

[8]Observación: Para mayor información revisar la parte final del apartado B.3 de la sección Anexos.

4.2 Solución Numérica

El estudio numérico de esta investigación está enfocado en dos grandes ámbitos que se contextualizan a continuación.
El primero de ellos es realizar variadas simulaciones numéricas utilizando el método de los valores propios, las cuales estarán orientadas en abordar casos de reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" con el propósito de:
* Evidenciar cómo afecta el número de integrantes en la tasa de generación de ideas.
* Evaluar el impacto que producen las condiciones iniciales en la producción de ideas en dichas reuniones creativas.
* Comparar el desempeño logrado en las reuniones creativas considerando grupos con diferentes características.

El segundo ámbito considera resolver el modelo (2)-(3) utilizando comandos numéricos del programa *Octave*, para lo cual se incluye un programa *.m* que se resuelve el sistema mediante la orden *lsode*, y que automatiza el proceso de solución para a_i, b_i, m_i y $x_i(0)$ arbitrarios, con el propósito de obtener las curvas solución. Los objetivos para esta sección son:
* Identificar rangos razonables para los parámetros de los factores involucrados en el modelo a través de un análisis de sensibilidad.
* Comparar el desempeño de grupos en reuniones creativas para $n = \overline{5,7}$ a través de las curvas solución que arroja el programa.

Observación: Con el fin de homogeneizar la entrega de los resultados, todos los valores numéricos serán considerados con tres decimales, a excepción de casos particulares.

A continuación se presenta una tabla resumen con todas las subsecciones que se desarrollan en este capítulo.

Sección 4.2.1	Subsección A	A.1	n=2
		A.2	n=3
		A.3	n=4
		A.4	n=5
		A.5	n=6
		A.6	n=7
		A.7	Comparación de curvas solución
	Subsección B	B.1	n=2
		B.2	n=3
		B.3	n=4
		B.4	n=5
		B.5	n=6
		B.6	Comparación de curvas solución
	Subsección C	C.1	Caso 1: Decaimiento (Grupo 1 y 2)
			Caso 2: Bloqueo (Grupo 3 y 4)
			Caso 3: Combinación decaimiento/ bloqueo (Grupo 5, 6, 7 y 8)
		C.2	Caso 1: Acomodación (Grupo 9, 10, 11 y 12)
			Caso 2: Combinación bloqueo/ acomodación (Grupo 13, 14, 15 y 16)
			Caso 3: Combinación acomodación/ decaimiento (Grupo 17, 18, 19 y 20)
Sección 4.2.2	Subsección A	Programa automatizado	
	Subsección B	Análisis de sensibilidad	
	Subsección C	Curvas solución	

Tabla Nº4: Tabla resumen del capítulo Solución Numérica.

4.2.1 Simulación Numérica vía Método de Valores Propios

A. Evaluación del impacto del número de integrantes ($n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$)

En esta primera parte se resuelve el modelo (2)-(3) en reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" donde participan de dos a siete integrantes ($n = 2$ a $n = 7$). En los casos $n = 2$ y $n = 3$, la metodología para encontrar los valores y vectores propios será la explicada en la sección 4.1.1. De esta manera, la obtención de las soluciones generales y particulares del sistema se realizará de forma manual. En los casos restantes, la obtención de los valores y vectores propios se realizará con los comando del programa de álgebra computacional "$wxMaxima$". En cuanto a los valores numéricos, se utilizarán los mismos considerados en el trabajo de Coskun & Yizmal (2009), es decir cada parámetro de los factores de decaimiento, bloqueo, acomodación y condiciones iniciales será igual para cada uno de los participantes de las reuniones creativas, como se observa en la siguiente tabla:

i	a_i	b_i	m_i	$x_i(0)$
1	0.200	0.035	0.020	36
2	〃	〃	〃	〃
3	〃	〃	〃	〃
4	〃	〃	〃	〃
5	〃	〃	〃	〃
6	〃	〃	〃	〃
7	〃	〃	〃	〃

Tabla N°5: Valores numéricos de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación y condiciones iniciales involucrados en una reunión creativa.

A.1. n=2

Las soluciones particulares[9] para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}235 \cdot t}, \text{ con } t \in [0, 20]$$

Por lo tanto,

$$x_i(t) = 36e^{-0{,}235t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = 1, 2.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

[9] Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado B.4 de la sección Anexos.

A.2. n=3

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,270 \cdot t}, \text{ con } t \in [0, 20]$$

Por lo tanto;

$$x_i(t) = 36e^{-0,270t}, \text{ con } t \geqslant 0, \; i = 1, 2, 3.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

Observación: Las simulaciones de reuniones creativas para $n = \overline{4, 7}$ se resuelven utilizando los comandos del programa de álgebra computacional "$wxMaxima$".

A.3. n=4

Las soluciones particulares[10] para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,304t}, \text{ con } t \in [0, 20]$$

Por lo tanto;

$$x_i(t) = 36e^{-0,304t}, \text{ con } t \geqslant 0, \; i = \overline{1, 4}.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

A.4. n=5

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,340t}, \text{ con } t \in [0, 20]$$

[10] Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado B.5 de la sección Anexos.

Por lo tanto;

$$x_i(t) = 36e^{-0,340t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,5}.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

A.5. n=6

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,375t}, \text{ con } t \in [0, 20]$$

Por lo tanto;

$$x_i(t) = 36e^{-0,375t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,6}.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

A.6. n=7

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,412t}, \text{ con } t \in [0, 20]$$

Por lo tanto;

$$x_i(t) = 36e^{-0,412t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,7}.$$

donde x_i son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

A.7. Comparación gráfica de las soluciones para n=$\overline{2,7}$

La siguiente figura[11] representa cada una de las soluciones obtenidas en los casos de reuniones creativas estudiados anteriormente.

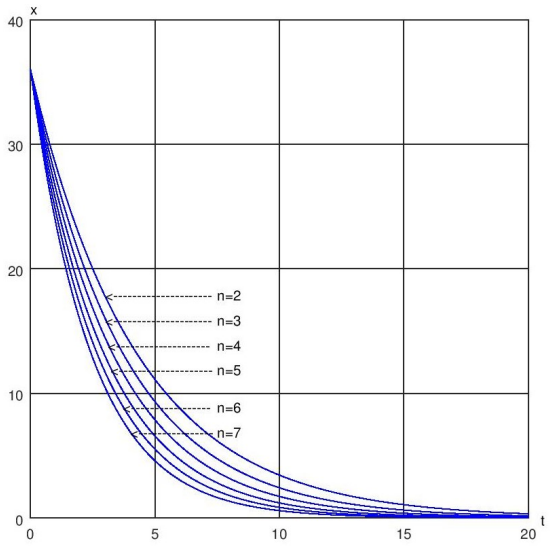

Figura N°1: Evaluación del impacto del número de integrantes.

De la figura anterior es posible conjeturar que a medida que transcurren los minutos se evidencia una disminución en la tasa de generación de ideas por parte de los individuos que participan de la reunión creativa tipo "lluvia de ideas". Dando a entender que existe una estrecha relación entre el número de personas que participan de la reunión creativa y la tasa de producción de ideas. Por lo tanto, evidentemente, grupos con mayor número de integrantes deberían ser menos productivos.

Además, en base a los resultados observados en las curvas solución presentadas en esta figura, se pueden plantear preguntas tales como ¿Por qué el modelo presentado no identifica un n óptimo? ¿Cuál es el número ideal de individuos para generar una máxima productividad? ¿De qué manera debería cambiar el modelo para obtener curvas soluciones que representen una tasa de generación de ideas creciente a lo largo del tiempo que dura la sesión?
Frente a estas interrogantes primero se debe considerar que este tipo de investigaciones no corresponden a temas que estén cerrados, por lo tanto no es posible acceder a una respuesta definitiva. Ahora de acuerdo al gráfico y la revisión bibliográfica, se puede mencionar que por una parte la productividad siempre será decreciente por los factores involucrados en el sistema y por el tipo de solución exponencial que presentan todas las curvas solución, y por otra parte, los participantes de este tipo de sesiones grupales se caracterizan por poseer los mismos parámetros de los factores involucrados en el modelo matemático.

[11] Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado C.1 de la sección Anexos.

B. Evaluación del impacto de las condiciones iniciales

Esta segunda parte del estudio numérico está enfocada en analizar los efectos que produce en la tasa de generación de ideas, el trabajar con condiciones iniciales diferentes para cada integrante de la reunión creativa. Por lo tanto, el cálculo de valores propios, vectores propios y planteamiento de la solución general coinciden con los cálculos obtenidos en la sección A, con la diferencia de que el desempeño de cada integrante será diferente entre uno y otro. Además, sólo se considerarán reuniones creativas con $n = \overline{2,6}$ dado que las diferencias de productividad entre una reunión creativa con $n = 6$ y $n = 7$ son ínfimas, por lo que no aportan datos relevantes y/o significativos. En la siguiente tabla se observan los valores numéricos de las condiciones iniciales, para cada integrante de la reunión creativa.

i	$x_i(0)$
1	31
2	33
3	35
4	37
5	39
6	41

Tabla N°6: Condiciones iniciales
para cada integrante de la reunión creativa.

Observación: Para mayor claridad se entenderá que por ejemplo al considerar una reunión creativa con tres integrantes, el primero de ellos tendrá condición inicial igual a 31, el segundo tendrá condición inicial igual a 33, y el tercero tendrá una condición inicial igual a 35.

B.1. n=2

Las soluciones particulares[12] para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0{,}205t} + 32 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0{,}235t} \text{ con } t \in [0, 10]$$

Por lo tanto;

$x_1 = -e^{-0{,}205t} + 32e^{-0{,}235t}$

$x_2 = e^{-0{,}205t} + 32e^{-0{,}235t}$

donde x_1 y x_2 son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

[12]Observación: El detalle se puede revisar en el apartado B.6 de la sección Anexos.

B.2. n=3

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = -1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{-0,195t} - 1\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}e^{-0,195t} + 33\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{-0,270t} \text{ con } t \in [0,10]$$

Por lo tanto;

$x_1 = -2e^{-0,195t} + 33e^{-0,270t}$

$x_2 = 33e^{-0,270t}$

$x_3 = 2e^{-0,195t} + 33e^{-0,270t}$

donde x_1, x_2 y x_3 son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

B.3. n=4

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 34\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}e^{-0,304t} - 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,192t} - 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,192t} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}e^{-0,192t} \text{ con } t \in [0,10]$$

Por lo tanto;

$x_1 = 34e^{-0,304t} - 3e^{-0,192t}$

$x_2 = 34e^{-0,304t} - e^{-0,192t}$

$x_3 = 34e^{-0,304t} + e^{-0,192t}$

$x_4 = 34e^{-0,304t} + 3e^{-0,192t}$

donde x_1, x_2, x_3 y x_4 son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

B.4. n=5

Las soluciones particulares para esta reunión creativa están dadas por:

$$X(t) = 35\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}e^{-0,340t} - 4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,190t} - 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,190t} + 2\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}e^{-0,190t} \text{ con } t \in [0,10]$$

Por lo tanto;

$x_1 = 35e^{-0,340t} - 4e^{-0,190t}$

$x_2 = 35e^{-0,340t} - 2e^{-0,190t}$

$x_3 = 35e^{-0,340t}$

$x_4 = 35e^{-0,340t} + 2e^{-0,190t}$

$x_5 = 35e^{-0,340t} + 4e^{-0,190t}$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

B.5. n=6

Las soluciones particulares para esta reunión creativa está dada por:

$$X = 36\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}e^{-0,375t} - 5\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,189t} - 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,189t}$$

$$-1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,189t} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{-0,189t} + 3\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}e^{-0,189t}$$

Por lo tanto;

$x_1 = 36e^{-0,375t} - 5e^{-0,189t}$

$x_2 = 36e^{-0,375t} - 3e^{-0,189t}$

$x_3 = 36e^{-0,375t} - e^{-0,189t}$

$x_4 = 36e^{-0,375t} + e^{-0,189t}$

$x_5 = 36e^{-0,375t} + 3e^{-0,189t}$

$x_6 = 36e^{-0,375t} + 5e^{-0,189t}$

donde x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 son las soluciones correspondientes al desempeño de los integrantes de la reunión creativa.

A continuación se presenta la figura que contiene las representaciones[13] de las soluciones obtenidas en la sección B.

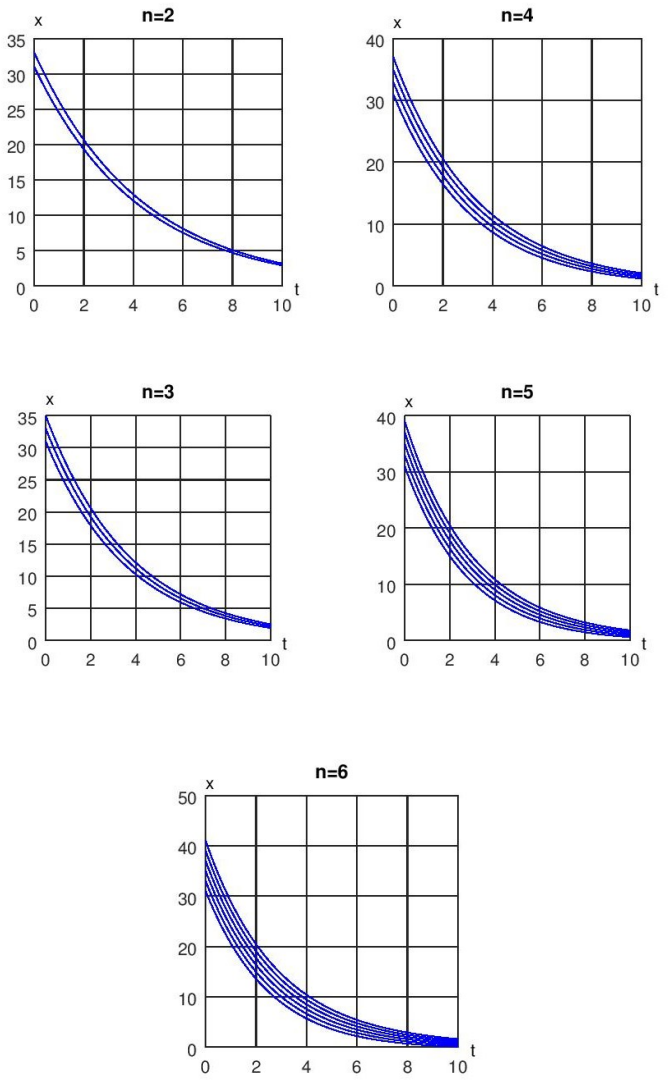

Figura N°2: Evaluación del impacto de las condiciones iniciales.

De la figura anterior, es posible evidenciar que el efecto que producen las condiciones iniciales diferentes en una reunión creativa, no altera significativamente la producción de ideas, en relación a considerar condiciones iniciales iguales para cada integrante de la reunión creativa. Es decir, a medida de transcurren los minutos, el descenso observado en la tasa de generación de ideas es muy similar al contemplado en la sección anterior.
Por lo tanto, el considerar condiciones iniciales diferentes para cada individuo implica, aparentemente, sólo una traslación de las curvas solución. Lo cual significaría que las condiciones iniciales poseen un alto impacto en la forma en que evoluciona el sistema. Además, en cada uno de los gráficos es posible observar que a medida que $t \to \infty$, $X(t) \to 0$.

[13]Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado C.2 de la sección Anexos.

C. Comparación del desempeño de grupos con diferentes características

Esta tercera parte del estudio numérico está enfocada en realizar comparaciones en relación al desempeño que presentan grupos con características particulares, la cual estará dividida en dos secciones.
La primera de ellas está orientada en reuniones creativas con $n = 3$ donde cada uno de los participantes presenta la misma condición inicial ($x_i(0) = 36$). El objetivo de esta sección es analizar grupos que son influenciados por los factores de decaimiento y/o bloqueo, buscando establecer el impacto que producen estos factores, en la producción de ideas de cada grupo. Para ello se trabaja con la metodología de los valores propios y los cálculos son realizados en el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$".
La segunda sección también se caracteriza por trabajar en reuniones creativas con $n = 3$ pero a diferencia de la primera, aquí cada uno de los participantes presentan condiciones iniciales diferentes, cuya variación será $30 \leqslant x_i(0) \leqslant 42$. El objetivo de esta sección es analizar el impacto que produce el factor de acomodación en la producción de ideas de cada grupo, así como el efecto que pueden provocar la influencia del factor de acomodación en conjunto con el factor de decaimiento o el factor de bloqueo. Al igual que la sección anterior, los cálculos son realizados a través del método de los valores propios en el programa de álgebra computacional "$wxMaxima$". Cabe mencionar que en esta sección se trabaja con condiciones iniciales diferentes debido a que se aborda el impacto del factor de acomodación, el cual surge bajo estas circunstancias.

Cada uno de los resultados obtenidos en las secciones, serán comparados en base a los resultados obtenidos en la sección **A.2** (de ahora en adelante, "Grupo de Referencia"), en la cual los tres individuos presentaban el mismo parámetro del factor de decaimiento ($a_i = 0{,}200$), de bloqueo ($b_i = 0{,}035$) y acomodación ($m_i = 0{,}020$), y la misma condición inicial ($x_i(0) = 36$).
Por último, cabe destacar que se trabaja con grupos de tres integrantes en base al trabajo realizado en las secciones anteriores, dado que resulta ser un grupo particular en cuanto a la cantidad de integrantes y la capacidad de levantar observaciones a partir de los resultados y gráficos obtenidos.

C.1 Impacto de los factores de decaimiento y bloqueo en la producción de ideas

La siguiente figura muestra los parámetros de referencia con los cuales se trabajará en esta sección:

Figura N°3: Valores inferiores, centrales y superiores de los coeficientes de decaimiento y bloqueo utilizados en esta sección.

A continuación se presentan cada uno de los casos sobre los cuales se realizará la comparación del desempeño de los grupos en relación a la producción de ideas.

Caso N°1. Comparación del desempeño en relación al factor de decaimiento

En este apartado se estudia el desempeño de grupos de tres individuos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas" donde la particularidad esencial radica en los parámetros del factor de decaimiento que poseen sus integrantes. Los grupos que se comparan con el 'grupo de referencia' son dos; el primer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación al factor de decaimiento, es decir, los tres integrante del grupo presentan un alto coeficiente de decaimiento (ver figura 3: a_s). Mientras que el segundo grupo se caracteriza por tener una débil inclinación al factor de decaimiento, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un bajo coeficiente de decaimiento (ver figura 3: a_i).
En la siguiente tabla se observan las particularidades de los integrante de cada grupo:

Integrante	Grupo N°1	Grupo N°2
1	a_s b_c m_c	a_i b_c m_c
2	a_s b_c m_c	a_i b_c m_c
3	a_s b_c m_c	a_i b_c m_c

Tabla N°7: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación para los grupos con inclinación al factor de decaimiento.

Observación: Con el propósito de lograr mayor comprensión de los grupos presentados en la tabla anterior, se presenta la siguiente figura ilustrativa:

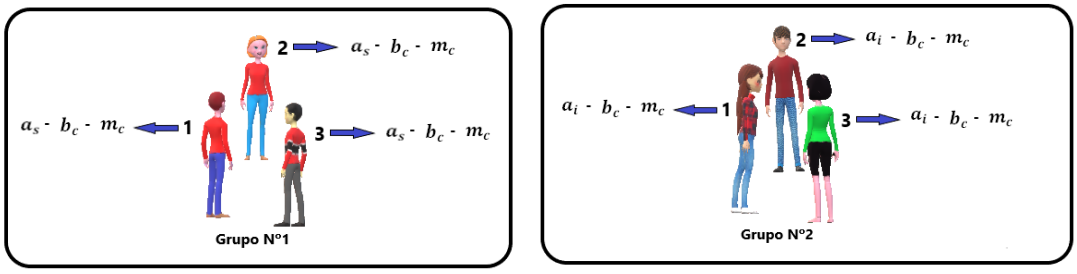

Figura N°4: Ilustración de los Grupos N°1 y N°2.

Grupo Nº1:
Las soluciones particulares[14] que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}370t}, \text{ con } t \in [0, 15]$$

Grupo Nº2:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}170t}$$

La figura que se muestra a continuación corresponde a las soluciones obtenidas para los grupos Nº1 y Nº2, y se incluye para una mejor interpretación, la solución correspondiente al grupo de referencia.

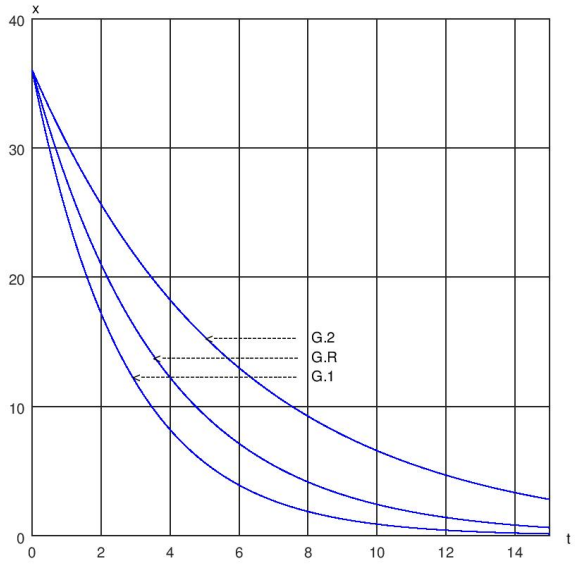

Figura Nº5: Comparación del desempeño del grupo Nº1 (G.1) y grupo Nº2 (G.2) con inclinación al factor de decaimiento, y grupo de referencia (G.R).

De la figura anterior es posible conjeturar que mientras mayor sea la inclinación al factor de decaimiento, menor será la productividad del grupo. Dicho de otra manera, evidentemente el mejor desempeño en relación a la producción de ideas se observa en el grupo Nº2, cuya característica es que los tres integrantes presentan un coeficiente de decaimiento inferior.

[14] Observación: Los detalles se pueden observar en el apartado B.7 de la sección Anexos.

Caso N°2. Comparación del desempeño en relación al factor de bloqueo

Al igual que en el caso anterior, en este apartado se estudia el desempeño de grupos de tres individuos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", con la diferencia de que en este caso la particularidad esencial de los grupos radica en los parámetros del factor de bloqueo que poseen sus integrantes. Los grupos que se comparan con el 'grupo de referencia' también son dos; el primer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación al factor de bloqueo, es decir, los tres integrante del grupo presentan un alto coeficiente de bloqueo (ver figura 3: b_s). Mientras que el segundo grupo se caracteriza por tener una débil inclinación al factor de bloqueo, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un bajo coeficiente de bloqueo (ver figura 3: b_i).
En la siguiente tabla se observa más detalladamente las particularidades de los integrante de cada grupo:

Integrante	Grupo N°3	Grupo N°4
1	a_c b_s m_c	a_c b_i m_c
2	a_c b_s m_c	a_c b_i m_c
3	a_c b_s m_c	a_c b_i m_c

Tabla N°8: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación para los grupos con inclinación al factor de bloqueo.

Grupo N°3:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}305t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo N°4:
Las soluciones particulares que se obtiene para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}235t}, \text{ con } t \in [0, 15]$$

La figura que se muestra a continuación corresponde a las soluciones obtenidas para los grupos N°3 y N°4, y se incluye para una mejor interpretación, la solución correspondiente al grupo de referencia.

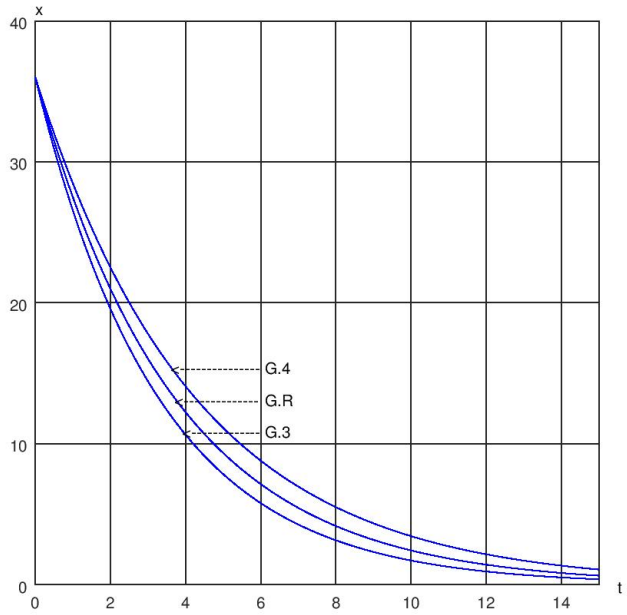

Figura N°6: Comparación del desempeño del grupo N°3 y grupo N°4 con inclinación al factor de bloqueo, y grupo de referencia.

De la figura anterior es posible conjeturar que mientras mayor sea la inclinación al fenómeno de bloqueo, menor será la productividad del grupo. Es decir, evidentemente el mejor desempeño en relación a la producción de ideas se observa en el grupo N°4, cuya característica es que los tres integrantes presentan un coeficiente de bloqueo inferior.
Sin embargo, al comparar estos desempeños con los obtenidos por los grupos N°1 y N°2, es posible observar que en este caso, la diferencia de producción de ideas entre un grupo y otro es menor. Dicho de otra manera, la diferencia de productividad entre el grupo N°3 y el grupo de referencia en la figura N°11, es menor que la diferencia de productividad entre el grupo N°1 y el grupo de referencia en la figura N°10.

Caso N°3. Comparación del desempeño en relación a la combinación del factor de decaimiento y factor de bloqueo

Al igual que en el caso anterior, en este apartado se estudia el desempeño de grupos de tres individuos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", con la diferencia de que en este caso la particularidad esencial de los grupos radica tanto en los parámetros del factor de decaimiento como en los del factor de bloqueo que poseen sus integrantes. Los grupos que se comparan con el 'grupo de referencia' son cuatro; el primer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación tanto al factor de decaimiento como al factor de bloqueo, es decir, los tres integrante del grupo presentan un alto coeficiente de decaimiento y de bloqueo (ver figura 3: a_s y b_s). El segundo grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación al factor de decaimiento pero una débil inclinación al factor de bloqueo, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un alto coeficiente de decaimiento y un bajo coeficiente de bloqueo (ver figura 3: a_s y b_i). El tercer grupo se caracteriza por tener una débil inclinación tanto al factor de decaimiento como al factor de bloqueo, es decir, los tres integrante del grupo presentan un bajo coeficiente de decaimiento y de bloqueo (ver figura 3: a_i y b_i). Mientras que el cuarto grupo se caracteriza por tener una débil inclinación al factor de decaimiento pero una fuerte inclinación al factor de bloqueo, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un bajo coeficiente de decaimiento y un alto coeficiente de bloqueo (ver figura 3: a_i y b_s).
En la siguiente tabla se observa más detalladamente las particularidades de los integrante de cada grupo:

Integrante	Grupo N°5	Grupo N°6	Grupo N°7	Grupo N°8
1	a_s b_s m_c	a_s b_i m_c	a_i b_i m_c	a_i b_s m_c
2	a_s b_s m_c	a_s b_i m_c	a_i b_i m_c	a_i b_s m_c
3	a_s b_s m_c	a_s b_i m_c	a_i b_i m_c	a_i b_s m_c

Tabla N°9: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación para los grupos con inclinación al factor de decaimiento y al factor de bloqueo.

Grupo N°5:
Las soluciones particulares[15] que se obtiene para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,405t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo N°6:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,335t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo N°7:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,135t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo N°8:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 36 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0,205t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

[15] Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado B.8 de la sección Anexos.

La figura[16] que se muestra a continuación corresponde a las soluciones obtenidas para los grupos N°5, N°6, N°7, N°8 y se incluye para una mejor interpretación, la solución correspondiente al grupo de referencia.

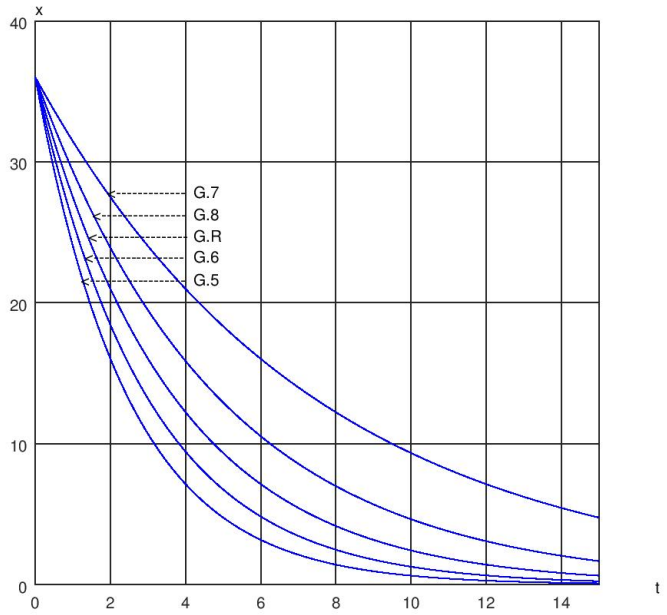

Figura N°7: Comparación del desempeño del grupo N°5, N°6, N°7, N°8 y grupo de referencia.

De la figura anterior es posible conjeturar que mientras más grande sea la inclinación tanto del factor de decaimiento como del factor de bloqueo, menor será la productividad del grupo, y viceversa. Además, se observa que el factor de decaimiento tiene más influencia en la tasa de generación de ideas que el factor de bloqueo, como es el caso de los grupos N°7 y N°8 ya que aunque el coeficiente de bloqueo no es el mismo para ambos grupos, el desempeño de ambos grupos es mayor que el desempeño del grupo de referencia.

[16]Observación: Los detalles se pueden revisar en el apartado C.3 de la sección Anexos.

C.2. Impacto del factor de acomodación en la producción de ideas

La siguiente figura muestra los parámetros de referencia con los cuales se trabajará en esta sección:

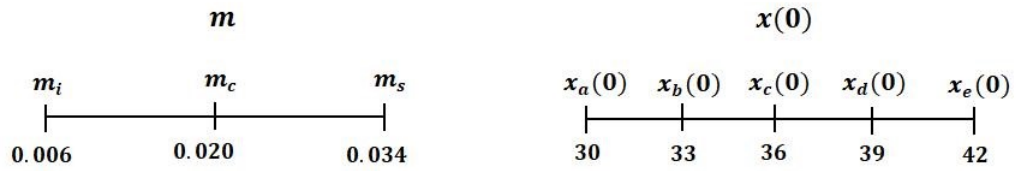

Figura N°8: Parámetros inferiores, centrales y superiores del factor de acomodación, y condiciones iniciales utilizados en esta sección.

Caso N°1. Comparación del desempeño en relación al factor de acomodación

En este apartado se estudia el desempeño de grupos de tres individuos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas". La particularidad esencial de los grupos radica tanto en los parámetros del factor de acomodación como en las condiciones iniciales que poseen sus integrantes. Los grupos que se comparan con el 'grupo de referencia' son cuatro; el primer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación tanto al factor de acomodación como a la condición inicial, es decir, los tres integrante del grupo presentan un alto coeficiente de acomodación y condición inicial (ver figura 8: m_s y $x_e(0)$). El segundo grupo se caracteriza por tener una débil inclinación tanto al factor de acomodación como a la condición inicial, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un bajo coeficiente de acomodación y condición inicial (ver figura 8: m_i y $x_a(0)$). El tercer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación al factor de acomodación y una condición inicial que se encuentra entre la condición inicial central y la condición inicial menor (ver figura 8: m_s y $x_b(0)$). Mientras que el cuarto grupo se caracteriza por tener una débil inclinación al factor de acomodación y una condición inicial que se encuentra entre la condición inicial central y la condición inicial mayor (ver figura 8: m_i y $x_d(0)$).

En la siguiente tabla se observa más detalladamente las particularidades de los integrante de cada grupo:

Persona	Grupo Nº9	Grupo Nº10	Grupo Nº11	Grupo Nº12
1	a_c b_c m_s $x_e(0)$	a_c b_c m_i $x_a(0)$	a_c b_c m_s $x_b(0)$	a_c b_c m_i $x_d(0)$
2	a_c b_c m_i $x_e(0)$	a_c b_c m_s $x_a(0)$	a_c b_c m_i $x_b(0)$	a_c b_c m_s $x_d(0)$
3	a_c b_c m_i $x_e(0)$	a_c b_c m_s $x_a(0)$	a_c b_c m_i $x_b(0)$	a_c b_c m_s $x_d(0)$

Tabla Nº10: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo, acomodación y condición inicial para los grupos con inclinación al factor de acomodación.

Grupo Nº9:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 42 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}270t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº10:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 30 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}270t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº11:
Las soluciones particulares que se obtienen en este grupo están dadas por:

$$X(t) = 33 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}270t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo N°12:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 39 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}270t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

La figura que se muestra a continuación corresponde a las soluciones obtenidas para los grupos N°9, N°10, N°11 y N°12, y se incluye para una mejor interpretación, la solución correspondiente al grupo de referencia.

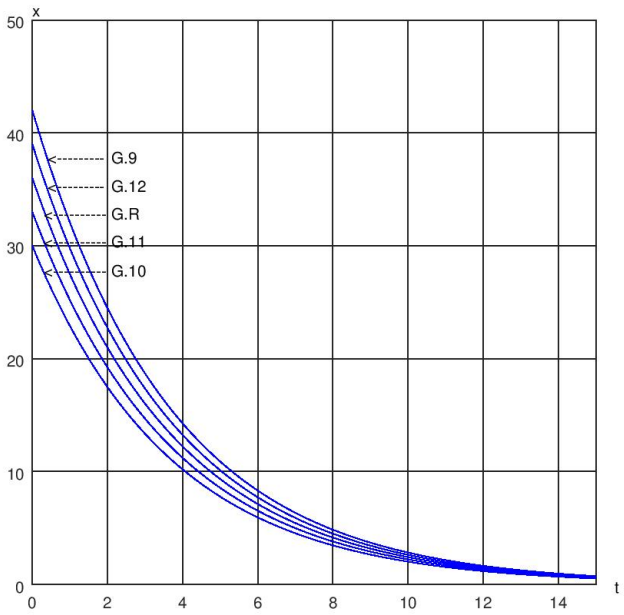

Figura N°9: Comparación del desempeño de los grupos N°9, N°10, N°11, N°12 y del grupo de referencia.

De la figura anterior es posible conjeturar que la producción de ideas de un grupo, influenciado por el factor de acomodación, depende de la condición inicial que esté asociada a dicho grupo. De esta manera, independiente de la inclinación del factor de acomodación (sea fuerte o débil), la productividad será mayor en aquel grupo que posea la condición inicial mayor. Por lo mismo, en el gráfico se observa que el mejor desempeño de producción de ideas lo obtiene el grupo N°9, y el desempeño más bajo lo obtiene el grupo N°10.

Caso N°2. Comparación del desempeño en relación a la combinación del factor de bloqueo y factor de acomodación

Al igual que en el caso anterior, en este apartado se estudia el desempeño de grupos de tres individuos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", con la diferencia de que en este caso la particularidad esencial de los grupos radica tanto en los parámetros del factor de bloqueo como en los del factor de acomodación que poseen sus integrantes. Los grupos que se comparan con el 'grupo de referencia' también son cuatro; el primer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación tanto al factor de bloqueo como al factor de acomodación, es decir, los tres integrante del grupo presentan un alto coeficiente de bloqueo y de acomodación (ver figura 3: b_s, ver figura 8: m_s). El segundo grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación al factor de bloqueo pero una débil inclinación al factor de acomodación, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un alto coeficiente de bloqueo y un bajo coeficiente de acomodación (ver figura 3: b_s, ver figura 8: m_i). El tercer grupo se caracteriza por tener una débil inclinación tanto al factor de bloqueo como al factor de acomodación, es decir, los tres integrante del grupo presentan un bajo coeficiente de bloqueo y de acomodación (ver figura 3: b_i, ver figura 8: m_i). Mientras que el cuarto grupo se caracteriza por tener una débil inclinación al factor de bloqueo pero una fuerte inclinación al factor de acomodación, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un bajo coeficiente de bloqueo y un alto coeficiente de acomodación (ver figura 3: b_i, ver figura 8: m_s).
En la siguiente tabla se observa más detalladamente las particularidades de los integrante de cada grupo y las condiciones iniciales para cada uno de ellos:

Persona	Grupo N°13	Grupo N°14	Grupo N°15	Grupo N°16
1	a_c b_s m_s $x(0)_d$	a_c b_s m_i $x(0)_b$	a_c b_i m_i $x(0)_b$	a_c b_i m_s $x(0)_d$
2	a_c b_s m_i $x(0)_d$	a_c b_s m_s $x(0)_b$	a_c b_i m_s $x(0)_b$	a_c b_i m_i $x(0)_d$
3	a_c b_s m_i $x(0)_d$	a_c b_s m_s $x(0)_b$	a_c b_i m_s $x(0)_b$	a_c b_i m_i $x(0)_d$

Tabla N°11: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación para los grupos con inclinación al factor de bloqueo y al factor de acomodación.

Grupo Nº13:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 39 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}305t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº14:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 33 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}305t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº15:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 33 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}235t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº16:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 39 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}235t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

La figura que se muestra a continuación corresponde a las soluciones obtenidas para los grupos N°13, N°14, N°15, N°16 y se incluye para una mejor interpretación, la solución correspondiente al grupo de referencia.

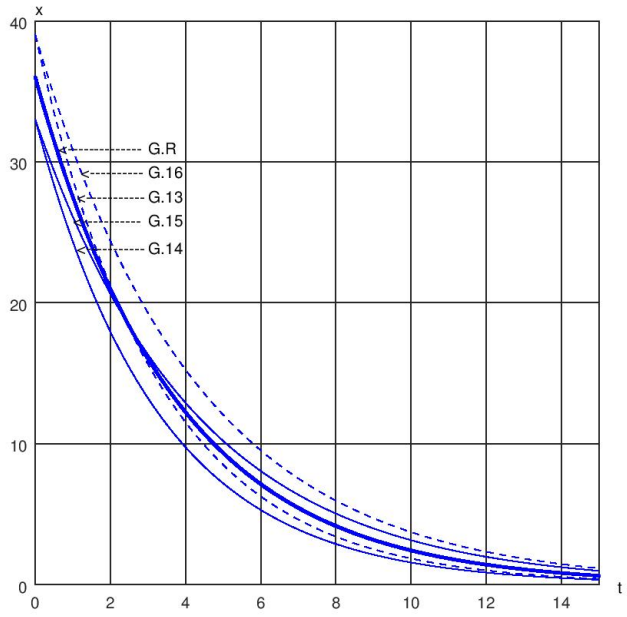

Figura N°10: Comparación del desempeño de los grupos N°13, N°14, N°15, N°16 y el grupo de referencia.

De la figura anterior es posible observar que a diferencia de los casos anteriores, existe un punto de inflexión que altera la productividad de los grupos N°13 y N°15, los cuales se caracterizan por no tener ningún factor ni condición inicial en común. Es decir, el grupo N°13 comienza con un buen desempeño de producción de ideas y luego del punto de inflexión el desempeño declina por debajo del grupo de referencia. Además, el grupo presenta una fuerte inclinación al factor de bloqueo, al factor de acomodación y condición inicial. Ahora observando el grupo N°15, ocurre todo lo contrario.
En cuanto a la diferencia entre el grupo con mayor y menor desempeño, se puede conjeturar que mientras mayor sea la condición inicial e inclinación al factor de acomodación, a la vez, mayor será el productividad del grupo, y viceversa (como se observa en los grupos N°16 y N°14 respectivamente).

Caso N°3. Comparación del desempeño en relación a la combinación del factor de acomodación y factor de decaimiento

Al igual que en el caso anterior, en este apartado se estudia el desempeño de grupos de tres individuos que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", con la diferencia de que en este caso la particularidad esencial de los grupos radica tanto en los parámetros del factor de acomodación como en los del factor de decaimiento que poseen sus integrantes. Los grupos que se comparan con el 'grupo de referencia' también son cuatro; el primer grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación tanto al factor de acomodación como al factor de decaimiento, es decir, los tres integrante del grupo presentan un alto coeficiente de acomodación y de decaimiento (ver figura 3: a_s, ver figura 8: m_s). El segundo grupo se caracteriza por tener una fuerte inclinación al factor de acomodación pero una débil inclinación al factor de decaimiento, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un alto coeficiente de acomodación y un bajo coeficiente de decaimiento (ver figura 3: a_i, ver figura 8: m_s). El tercer grupo se caracteriza por tener una débil inclinación tanto al factor de acomodación como al factor de decaimiento, es decir, los tres integrante del grupo presentan un bajo coeficiente de acomodación y de decaimiento (ver figura 3: a_i, ver figura 8: m_i). Mientras que el cuarto grupo se caracteriza por tener una débil inclinación al factor de acomodación pero una fuerte inclinación al factor de decaimiento, es decir, los tres integrantes del grupo presentan un bajo coeficiente de acomodación y un alto coeficiente de decaimiento (ver figura 3: a_s, ver figura 8: m_i).
En la siguiente tabla se observa más detalladamente las particularidades de los integrante de cada grupo y las condiciones iniciales para cada uno de ellos:

Persona	Grupo N°17	Grupo N°18	Grupo N°19	Grupo N°20
1	a_s b_c m_s $x(0)_d$	a_i b_c m_s $x(0)_d$	a_i b_c m_i $x(0)_b$	a_s b_c m_i $x(0)_b$
2	a_s b_c m_i $x(0)_d$	a_i b_c m_i $x(0)_d$	a_i b_c m_s $x(0)_b$	a_s b_c m_s $x(0)_b$
3	a_s b_c m_i $x(0)_d$	a_i b_c m_i $x(0)_d$	a_i b_c m_s $x(0)_b$	a_s b_c m_s $x(0)_b$

Tabla N°12: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación para los grupos con inclinación al factor de acomodación y factor de decaimiento.

Grupo Nº17:
Las soluciones particulares que se obtienen en este grupo están dadas por:

$$X(t) = 39 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}370t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº18:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 39 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}170t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº19:
Las soluciones particulares que se obtienen en este grupo están dadas por:

$$X(t) = 33 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}170t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

Grupo Nº20:
Las soluciones particulares que se obtienen para este grupo están dadas por:

$$X(t) = 33 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}370t}, \text{ con } t \in [0, 15].$$

La figura que se muestra a continuación corresponde a las soluciones obtenidas para los grupos N°17, N°18, N°19, N°20 y se incluye para una mejor interpretación, la solución correspondiente al grupo de referencia.

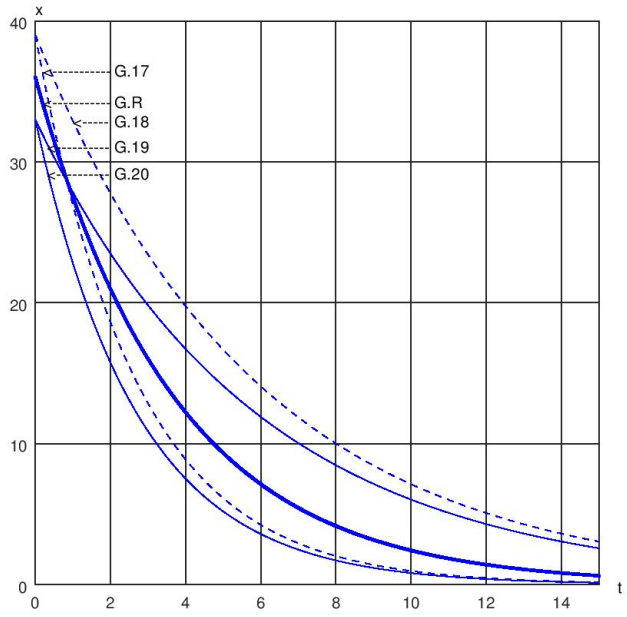

Figura N°11: Comparación del desempeño de los grupos N°17, N°18, N°19, N°20 y del grupo de referencia.

De la figura anterior es posible observar que al que en el caso anterior, existe un punto de inflexión que altera la productividad de los grupos, en particular de los grupo N°17 y N°19, los cuales se caracterizan por no tener ningún factor ni condición inicial en común. Es decir, el grupo N°17 comienza con un buen desempeño de producción de ideas y luego del punto de inflexión el desempeño declina por debajo del grupo de referencia. Además, el grupo presenta una fuerte inclinación al factor de bloqueo, al factor de acomodación y condición inicial. Ahora observando el grupo N°19, ocurre todo lo contrario.
En cuanto a la diferencia entre el grupo con mayor y menor desempeño, se puede conjeturar que mientras mayor sea la condición inicial e inclinación al factor de acomodación, a la vez; mayor será la productividad del grupo, y viceversa (como se observa en los grupos N°18 y N°20 respectivamente).

Observación: A modo general, considerando todos los casos de esta sección C, es posible conjeturar que a medida que $t \to \infty$, $X(t) \to 0$.

4.2.2 Solución Numérica utilizando *Octave*

Esta segunda parte del estudio numérico está enfocada en resolver el sistema (2)-(3) utilizando "*Octave*", a través de la implementación de un programa *.m* que automatiza el proceso de solución de dicho sistema para a_i, b_i, m_i y $x_i(0)$ arbitrarios, mediante el comando *lsode*. Como se explicitó al inicio de este capítulo, los objetivos de esta sección son:
***** Identificar rangos razonables para los parámetros de los factores involucrados en el modelo, a través de un análisis de sensibilidad.
***** Comparar el desempeño de grupos en reuniones creativas para $n = \overline{5,7}$, a través de las curvas solución que arroja el programa.

A. Programa automatizado *.m*
En esta primera sección se da a conocer el programa implementado para solucionar el sistema (2)-(3) a través de "*Octave*". Para ello se realiza una simulación de reunión creativa tipo "lluvia de ideas" donde participan cuatro individuos que se caracterizan por presentar coeficientes de decaimiento, bloqueo y acomodación, y condiciones iniciales diferentes, como se observa en la siguiente tabla:

Individuo	a_i	b_i	m_i	$x_i(0)$
1	0.100	0.0175	0.006	29
2	**0.200**	**0.035**	**0.020**	31
3	0.300	0.0525	0.034	33
4	0.400	0.070	0.048	35

Tabla Nº13: Parámetros de referencia de los factores de decaimiento, bloqueo, acomodación y condiciones iniciales.

Observación: El individuo 2 corresponde al individuo de referencia.

A continuación se presenta el programa *.m* y las respectivas curvas solución que arroja el programa:

```
>> function xdot=f(x,t)
  a1=0.100; a2=0.200; a3=0.300; a4=0.400;

  b1=0.0175; b2=0.035; b3=0.0525; b4=0.070;

  m1=0.006; m2=0.020; m3=0.034; m4=0.048;

  xdot(1)=(-m1-a1)*x(1)+(((m1)/3)-b1)*x(2)+(((m1)/3)-b1)*x(3)+(((m1)/3)-b1)*x(4);
  xdot(2)=(((m2)/3)-b2)*x(1)+(-m2-a2)*x(2)+(((m2)/3)-b2)*x(3)+(((m2)/3)-b2)*x(4);
  xdot(3)=(((m3)/3)-b3)*x(1)+(((m3)/3)-b3)*x(2)+(-m3-a3)*x(3)+(((m3)/3)-b3)*x(4);
  xdot(4)=(((m4)/3)-b4)*x(1)+(((m4)/3)-b4)*x(2)+(((m4)/3)-b4)*x(3)+(-m4-a4)*x(4);
  endfunction
```

```
>> x0=[29,31,33,35];
>> t=linspace(0,20)';
>> x=lsode("f",x0,t);
>>
>> plot(t,x,'b')
>> grid on
>> text(0,41,'x')
>> text(20.500,0,'t')
>> axis([0,20,-10,40],'square')
>> text(1.450,23.300,'<----------------')
>> text(5.100,23.300,'Persona 1')
>> text(1.250,21.070,'<-----------------')
>> text(5.100,21.070,'Persona 2')
>> text(1.250,18.640,'<-----------------')
>> text(5.100,18.640,'Persona 3')
>> text(1.180,16.700,'<-----------------')
>> text(5.100,16.700,'Persona 4')
```

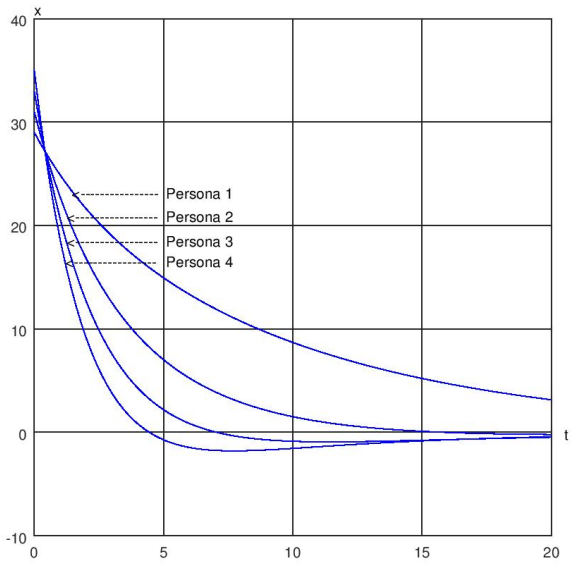

Figura N°12: Curvas solución para $n = 4$ arrojadas por el programa *.m*.

En la figura anterior es posible observar que a medida que transcurre el tiempo, la producción de ideas de ciertos individuos es negativa (lo que en la realidad no puede ocurrir). Por lo tanto, se hace necesario un análisis de sensibilidad para obtener los rangos en los cuales los parámetros de los factores son válidos.

B. Análisis de sensibilidad

En esta segunda sección se realiza un análisis de sensibilidad con el fin de identificar los rangos razonables para los parámetros de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación. Esta sección se justifica analizando el gráfico de la sección anterior (ver figura N°12), en el cual es posible observar valores negativos para x_i. Por lo tanto, se pretende modificar los intervalos en los cuales se mueven los parámetros de los factores y lograr una simulación que arroje una curva solución similar al gráfico de la figura N°12 pero en el cuadrante positivo.
De esta manera, utilizando el programa automatizado a través del método de 'ensayo y error' y considerando el contexto de reunión creativa tipo "lluvia de ideas" descrita en la sección anterior, el proceso de análisis de sensibilidad entrega como rangos razonables los siguientes resultados:

Factor	Rango
Decaimiento	$0{,}100 \leqslant a_i \leqslant 0{,}280$
Bloqueo	$0 \leqslant b_i \leqslant 0{,}050$
Acomodación	$0 \leqslant m_i \leqslant 0{,}0276$
Condición inicial	$0 \leqslant x_i(0) \leqslant 48$

Tabla N°14: Rangos razonables para los parámetros de los factores de decaimiento, bloqueo, acomodación, y condición inicial.

Observación: Los rangos razonables presentados en la tabla determinan valores positivos de x_i, considerando que:

* Los parámetros de los factores de decaimiento y acomodación deben ser asignados de manera ascendente. Es decir, a la primera persona se le asigna los parámetros menores de cada factor, mientras que a la cuarta persona se le asigna los parámetros mayores.
* Los parámetros del factor de bloqueo y condiciones iniciales deben ser asignados de manera descendente. Es decir, a la primera persona se le asigna los parámetros mayores de cada factor, y viceversa para la cuarta persona.

A continuación se reemplazan los valores de los parámetros considerados en la tabla N°13, por valores dentro de los rangos razonables obtenidos para cada factor:

Individuo	a_i	b_i	m_i	$x_i(0)$
1	0.100	0.050	0.000	48
2	0.125	0.030	0.020	33
3	0.150	0.020	0.022	31
4	0.280	0.000	0.0276	0

Tabla N°15: Parámetros de referencia de los factores involucrados, dentro de los rangos razonables obtenidos en el análisis de sensibilidad.

Considerando los valores de la tabla, se presenta el gráfico correspondiente:

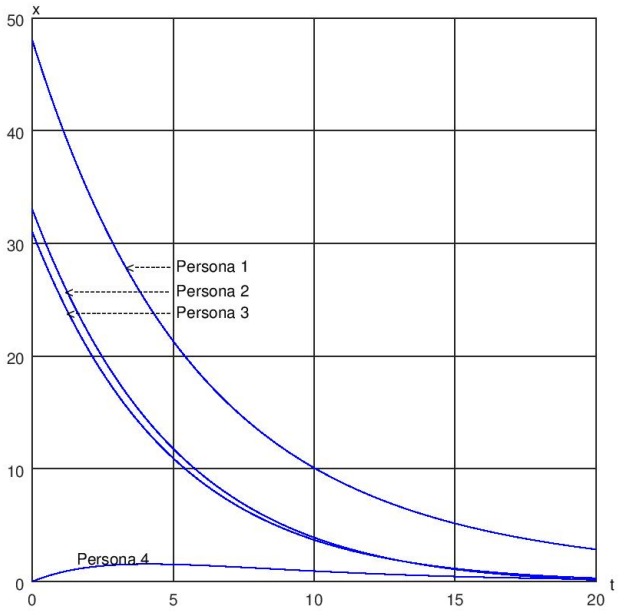

Figura N°13: Curvas solución para $n = 4$ considerando rangos razonables.

De la figura anterior es posible observar que el mejor desempeño lo presenta el primer individuo cuyas características son que dicho integrante no presenta parámetro asociado al factor de acomodación, dentro del grupo es el integrante con menor parámetro asociado al factor de decaimiento pero mayor parámetro asociado al factor de bloqueo y condición inicial. Además, se observa que aunque la cuarta persona presente condición inicial $x_4(0) = 0$ igual presenta una leve generación de ideas, evidenciando que la condición inicial no es factor limitante en la productividad de un individuo.

C. Curvas solución para $n = \overline{5,7}$

En esta sección se presentan tres gráficos que serán ejecutados en el programa implementado en "*Octave*", considerando los rangos razonables para cada factor involucrado en el sistema (2)-(3) y con el propósito de analizar y comparar el desempeño de estos tres grupos ($n = 7$, $n = 6$ y $n = 5$ respectivamente). A continuación se presentan los parámetros de los factores de decaimiento, bloqueo, acomodación y condiciones iniciales que se consideraron en esta sección:

Individuo	a_i	b_i	m_i	$x_i(0)$
1	0.100	0.048	0.016	48
2	0.120	0.040	0.018	45
3	0.140	0.035	0.020	42
4	0.180	0.025	0.022	39
5	0.210	0.020	0.024	36
6	0.240	0.015	0.026	33
7	0.250	0.008	0.027	30

Tabla Nº16: Parámetros de referencia de los factores involucrados, dentro de los rangos razonables obtenidos en el análisis de sensibilidad.

Considerando los valores de la tabla, se presentan el gráfico correspondiente a las curvas solución para $n = 7$:

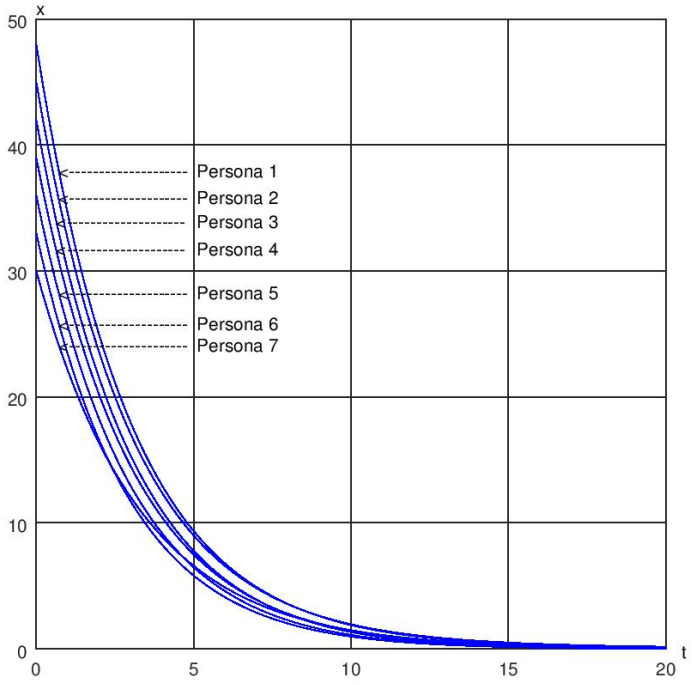

Figura Nº14: Curvas solución para $n = 7$ arrojados por el programa *.m*.

Además, se presentan los gráficos correspondientes a las curvas solución para $n = 6$ y $n = 5$:

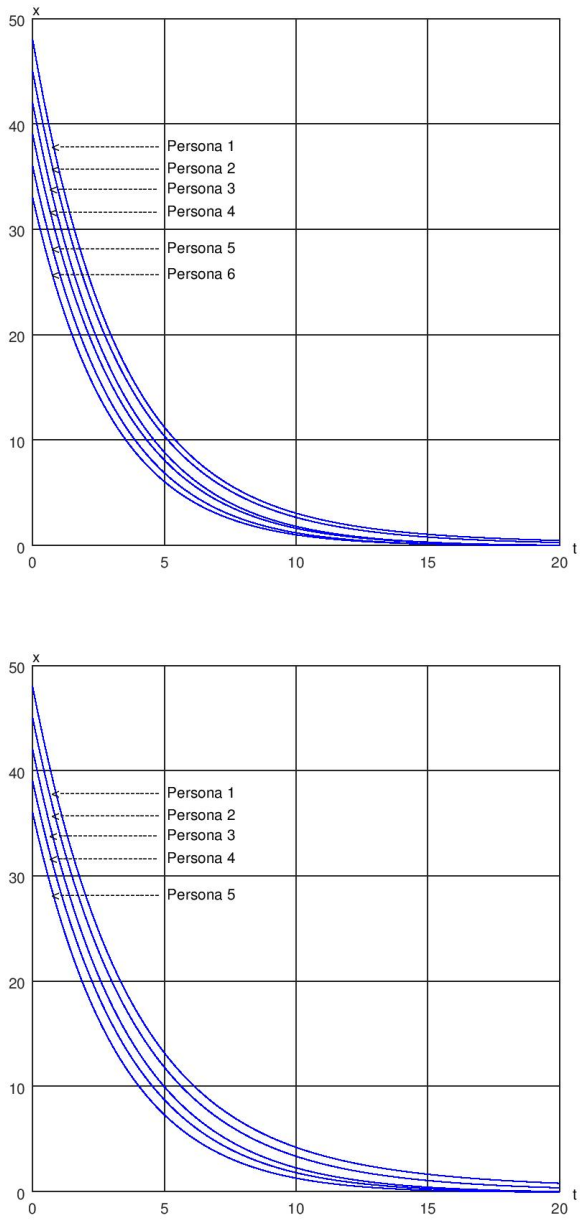

Figura Nº15: Curvas solución para $n = 6$ y $n = 5$, arrojados por el programa $.m$.

De las figuras Nº14 y Nº15 anterior es posible interpretar que el parámetro de la condición inicial muestra principalmente una traslación de las curvas de producción de ideas de cada individuo. Además, el mejor desempeño lo obtiene aquel individuo que presenta un alto coeficiente de bloqueo pero un bajo coeficiente de decaimiento y acomodación. Ocurriendo lo contrario si se observa al individuo con menor desempeño de producción de ideas.

5 DISCUSION

El modelo (2)-(3) presentado aquí representa el rendimiento de un grupo de personas que participan de una reunión creativa tipo "lluvia de ideas", la cual corresponde al resultado de la interacción de numerosos factores sociales y de personalidad. En particular, estos factores son concernientes al decaimiento, bloqueo y acomodación, los cuales influyen en la producción, provocando generalmente, inhibición de dicha producción a través del deterioro del fenómeno de ocurrencia y verbalización de las ideas. Este modelo, basado en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, supone que la razón de cambio en la tasa de generación de ideas depende linealmente de los factores mencionados anteriormente.
Es importante mencionar que este modelo no discrimina en términos de calidad sino en la cantidad de ideas producidas en un período de tiempo (sesiones de aproximadamente 20-30 minutos). Esto es debido a los principios que sustentan este tipo de reuniones creativas, los cuales hacen énfasis en que toda idea es válida, ninguna idea puede ser rechazada y es posible generar ideas a partir de una idea ya señalada por algún otro integrante del grupo.

El estudio analítico de esta investigación se realizó mediante el método de valores propios y los comandos del programa "$wxMaxima$".
Utilizando el método de los valores propios se trabajó en la tipología de casos en reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" con $n = 2$ y $n = 3$ integrantes. Los resultados obtenidos en esta parte del estudio analítico, tienen relación con que al trabajar en reuniones creativas con integrantes que presentan igual parámetro de condición inicial, el factor de acomodación no se considera en la solución del sistema; ocurriendo lo contrario en caso de realizar una reunión creativa con integrantes que presentan diferentes parámetros de condición inicial. Esto se explica en las soluciones obtenidas en el segundo caso de la sección A (ver página 20), en el cual el factor numérico $\frac{p-q}{2}$ se hace cero cuando las condiciones iniciales son iguales $(p = q)$, como se observa en el primer caso de dicha sección. Por lo tanto se podría conjeturar en primera instancia, que las condiciones iniciales tienen un impacto relevante en el factor de acomodación.
En cuanto al estudio analítico usando el programa "$wxMaxima$", los resultados obtenidos dan cuenta de que es posible suponer una generalidad en cuanto al tipo de soluciones encontradas y considerando la misma condición inicial para todos los integrantes del grupo; esto es, para $n = k$:

$$x_i(t) = p \cdot e^{-(a_1+(k-1)b_1)t}, \text{ con } t \geqslant 0,\ i = \overline{1,n}$$

Las simulaciones numéricas de esta investigación también se resolvieron mediante el método de valores propios, los comandos del programa "*wxMaxima*" y la ejecución del programa "*Octave*".

En relación al impacto del número de integrantes en una reunión creativa tipo "lluvia de ideas" los resultados muestran una evidente disminución en la tasa de generación de ideas, la cual se hace más notoria a medida que aumenta el número de integrantes. Por lo tanto, es posible conjeturar que a medida que aumenta el número de integrantes, los grupos deberían ser menos productivos.

En relación al impacto de las condiciones iniciales sobre los grupos de reuniones creativas, los resultados obtenidos muestran evidencia de que las condiciones iniciales diferentes no alteran significativamente el productividad de los integrantes de la reunión creativas, por lo que sería posible conjeturar que las condiciones iniciales diferentes implicarían sólo una traslación de las curvas solución, presentando un alto impacto en la forma en que evoluciona el sistema.

En cuanto a la comparación del desempeño de grupos con diferentes características, los resultados obtenidos indican que por una parte, los grupos más productivos serán aquellos que presenten una baja inclinación al fenómeno de decaimiento, evidenciando que la productividad está por sobre la productividad del grupo de referencia (recibe este nombre debido a que sus coeficientes de decaimiento, bloqueo, acomodación y condiciones iniciales son los utilizados en la investigación de [7]). Además, en relación al impacto del factor de bloqueo, los resultados indican que el grupo más productivo será aquel que presente menor inclinación a dicho factor, sobrepasando de igual manera la productividad del grupo de referencia. Por otra parte, los resultados obtenidos en relación al impacto que producen en conjunto los factores de decaimiento y bloqueo, indican que el grupo más productivo corresponderá a aquel que presente menor inclinación a ambos factores, de manera que interpretando las soluciones, es posible conjeturar que aparentemente el factor de decaimiento tiene un mayor impacto en relación al factor de bloqueo.

En relación al impacto del factor de acomodación en el desempeño de los grupos de reunión creativa, los resultados indican que la productividad depende de los parámetros de la condición inicial (ver figura 9). No obstante, cuando el impacto del factor de acomodación se combina con el impacto del factor de bloqueo o del factor de decaimiento, las curvas solución muestran evidencia de un punto de inflexión que produce una variación en la productividad (ver figura 10 y 11). Es decir, la tasa de generación de ideas puede comenzar por sobre la productividad del grupo de referencia, y luego de un cierto instante de tiempo, dicha productividad disminuye hasta por debajo del grupo de referencia, y viceversa.

6 CONCLUSIONES

Con los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, es posible concluir que:
Considerando la propuesta de [7], quienes plantearon a través del modelo (2)-(3) que los grupos reunidos en una sesión creativa tenían tendencia a bajar la tasa de generación de ideas; se puede mencionar que esto se debería a que los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación son alusivos a actitudes intrínsecas y extrínsecas que poseen los integrantes del grupo en cuestión, y conducen a un estado en los individuos que se caracteriza por una desmotivación o preocupación excesiva por la evaluación de sus pares.

En relación al primer objetivo específico propuesto; "Construir una solución analítica del modelo matemático que representa una sesión grupal tipo lluvia de ideas", se puede mencionar que fue posible obtener expresiones algebraicas que dan muestra de las soluciones analíticas para variados casos de reuniones creativas, revelando implícitamente, la importancia de cada uno de los factores involucrados en el sistema, y el impacto de las condiciones iniciales sobre el factor de acomodación.

En relación al segundo objetivo específico propuesto; "Resolver numéricamente el modelo matemático que representa una sesión grupal tipo lluvia de ideas", es posible mencionar que por una parte, la cantidad de integrantes que componen la sesión grupal, tiene estrecha relación con producción de ideas de éste. Lo cual a través del gráfico comparativo ilustrado en dicha sección, supone que a mayor cantidad de integrantes en un grupo, menor es la tasa de generación de ideas del mismo.
Además, se concluye que el impacto de las condiciones iniciales sobre la productividad de un grupo, no produce cambios sustantivos en la tendencia de producción de estos. Por último, la variedad de composiciones grupales presentadas para comparar el desempeño de éstos, determina que el impacto de los factores en la tasa de generación de ideas es decisivo en la comparación con el grupo de referencia.

En relación al tercer objetivo específico propuesto; "Simular una reunión creativa tipo lluvia de ideas", se concluye que la creación de un programa que automatiza el proceso de solución, conlleva a realizar simulaciones con grupos más numerosos en menos tiempo que con los métodos tradicionales. Además, a través del análisis de sensibilidad realizado, fue posible identificar los rangos razonables de los factores de decaimiento, bloqueo y acomodación, y con ello tener mayor libertad y más opciones de simular otros escenarios.

Queda pendiente, como trabajo futuro, obtener datos experimentales de reuniones creativas tipo "lluvia de ideas", con el fin de obtener datos más cercanos a la realidad. Por otra parte, queda pendiente considerar cómo afectan los procesos cognitivos en la producción de ideas. Así también, la productividad de los grupos en reuniones creativas tipo "lluvia de ideas" de forma escrita, los cuales son aspectos que no fueron considerados en esta investigación, pero si son mencionados en [7].

7 BIBLIOGRAFIA

[**1**] Aravena, M., Caamaño, C., Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos.*Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(1), 49-92.

[**2**] Belski, I., Adunka, R., Mayer, O. (2016). Educating a Creative Engineer: Learning from Engineering Professionals.*Elsevier B.V*, 39, 79-84.

[**3**] Bronson, R., Costa, G. (s.f.). Ecuaciones Diferenciales (tercera edición). *Editorial McGraw-Hill*.

[**4**] Brown, V., Paulus, P. B. (1996). A simple dynamic model of social factors in group brainstorming. *Small Group Research*, 27, 91-114.

[**5**] Brown, V., Paulus, P. B. (2002). Making Group Brainstorming More Effective: Recommendations From an Associative Memory Perspective. *Current Directions in Psychological Science*, 11, 208-212.

[**6**] Brown, V., Tumeo, M., Larey, T., Paulus, P. B. (1998). Modeling cognitive interactions during group brainstorming. *Small Group Research*, 29, 495-526.

[**7**] Coskun, H., Yizmal, O. (2009). A new dynamical model of brainstorming: Linear, nonlinear, continuous (simultaneous) and impulsive (sequential) cases. *Journal of Mathematical Psychology*, 53, 253-264.

[**8**] Coskun, H. (2011). Close Associations and Memory in Brainwriting Groups. *Journal of Creative Behavior*, 45, 59-75.

[**9**] Cuello, P., Vizcaya, M. (2002). Uso de técnicas de enseñanza para desarrollar el potencial creativo en los estudiantes del programa de educación integral de la UPEL-IPB. *Investigación y Postgrado*, 17(1), 83-113.

[**10**] Dautermann, W. (2017). Maxima Manual. Version 5.41.0a. Recuperado de: `http://maxima.sourceforge.net/documentation.html`

[**11**] Eaton, J., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring, R. (2018). GNU Octave 4.4.0. A high-level interactive language for numerical computations. Free Your Numbers. *Free Software Foundation*, 4, 1-1058.

[**12**] Gómez, A., Acosta, H. (2003). Acerca del trabajo en grupos o equipos. *ACIMED*, 11(6).

[**13**] González, M. (2008). Tormenta de ideas: ¡Qué tontería más genial!. *ACIMED*, 17(4).

[**14**] Guastello, S. (2000). Nonlinear Dynamics in Psychology. *Overseas Publishers Association*, 1-20.

[**15**] Haddou, H. A., Camilleri, G., Zaraté, P. (2014). Prediction of Ideas Number During a Brainstorming Session. *Group Decis Negot*, 23, 271-298.

[**16**] Kartsatos, A. (2005). Advanced Ordinary Differential Equations, third edition. New York, USA. *Hindawi Publishing Corporation.*

[**17**] Labarthe, J., Vásquez, L. (2016). Potenciando la creatividad humana: talles de escritura creativa. *Papeles de trabajo- Centro de Estudios Interdisciplinarios en Etnolingüística y Antropología Socio-Cultural*, (31), 19-37.

[**18**] Luce, R. (1995). Four tensions concerning mathematical modeling in Psychology. *Annual Review of Psychology*, 46, 1-26.

[**19**] Narro, A. (1996). Aplicación de algunos modelos matemáticos a la toma de decisiones. *Política y Cultura*, (6), 183-198.

[**20**] Paulus, P., Leggett, K., Dzindolet, M., Coskun, H., Putman, V. (2002). Social and Cognitive Influences in Group Brainstorming: Predicting Production Gains and Losses. *Review of Social Psychology*, 12, 299-324.

[**21**] Paulus, P. B., Levine, D., Brown, V., Minai, A., Doboli, S. (2010). Modeling Ideational Creativity in Groups: Connecting Cognitive, Neural, and Computational Approaches. *Small Group Research*, 41(6), 688-724.

[**22**] Rodríguez, L., Roggero, P. (2014). La modelización y simulación computacional como metodología de investigación social. *Polis (Santiago)*, 13(39), 417-440.

8 ANEXOS

A. Generalizaciones y Modificaciones del Modelo (2)-(3)

A continuación se presentan generalizaciones y modificaciones del modelo (2)-(3), distinguiendo un tipo de trabajo grupal secuencial en donde se le entrega la información al grupo de forma parcializada, de acuerdo a un tiempo pre-establecido para cada etapa; y un tipo de trabajo grupal simultáneo en donde la información es entregada al grupo de una vez al inicio de la sesión de una reunión creativa.

A.1

Este modelo es una modificación de la ecuación (2)-(3) en su forma secuencial, quedando expresado de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = -Ax - Bx + Mx$$

$$x(\theta_i^+) = x(\theta_i^-) + d_i$$

donde $t \neq \theta_i$ y θ_i son los momentos determinados de tiempo cuando se introduce un nuevo tema a debatir, el superíndice $+(-)$ denota el tiempo justo antes o después de entregarle más información al grupo reunido, y d_i es un vector columna constante.

A.2

Este es un nuevo modelo en base a la ecuación (2)-(3), considerando una reunión creativa tipo "tormenta de ideas escrita" en su forma simultánea cuya ecuación es:

$$\frac{dx}{dt} = -Ax + M(x)x \tag{13}$$

donde la matriz A representa la tasa de decaimiento y la matriz $M(x)$ es la matriz de acomodación no lineal dada por:

$$M(x) = M_1 \cdot H$$

donde

$$M_1 = \begin{bmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{n-1} & \frac{m_1}{n-1} & \cdots & \frac{m_1}{n-1} \\ \frac{m_2}{n-1} & -m_2 & \frac{m_2}{n-1} & \cdots & \frac{m_2}{n-1} \\ \frac{m_3}{n-1} & \frac{m_3}{n-1} & -m_3 & \cdots & \frac{m_3}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_n}{n-1} & \frac{m_n}{n-1} & \frac{m_n}{n-1} & \cdots & -m_n \end{bmatrix}$$

y

$$H = \begin{bmatrix} H(x_{r_1}) & H(x_{r_2}) & H(x_{r_3}) & \cdots & H(x_{r_n}) \\ H(x_{r_1}) & H(x_{r_2}) & H(x_{r_3}) & \cdots & H(x_{r_n}) \\ H(x_{r_1}) & H(x_{r_2}) & H(x_{r_3}) & \cdots & H(x_{r_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H(x_{r_1}) & H(x_{r_2}) & H(x_{r_3}) & \cdots & H(x_{r_n}) \end{bmatrix}$$

donde $H(x_{r_i})$ es la función Heaviside de paso unitario y x_{r_i} es el valor relativo de x_i dado por:

$$x_{r_i} = \sum_{j=1(j\neq 1)}^{N} \frac{x_j}{n-1} - x_i$$

A.3

Este modelo es una modificación de la ecuación (11) en su forma secuencial, quedando expresado de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = -Ax + M(x)x$$

donde $x(\theta_i^+) = x(\theta_i^-) + d_i$ y $t \neq \theta_i$.

A.4

Este modelo es una generalización de la ecuación (2)-(3) en su forma simultánea, quedando expresado de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = -Ax - Bx + Mx + Ry$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + z - x$$

$$\frac{dz}{dt} = -Kz - Ex$$

donde $z(t) \geqslant 0$, $K \geqslant y(t) \geqslant 0$, $x(t) \geqslant 0$, K es un entero positivo, x, y y z son vectores n-dimensionales que representan las ideas por unidad de tiempo en la producción, almacenamiento y generación de ideas respectivamente. Las matrices K y E son matrices de $n \times n$ que representan el decaimiento y el bloqueo de la generación de ideas.

A.5

Este modelo es una generalización de la ecuación (2) en su forma secuencial, quedando expresado de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = -Ax - Bx + Mx + Ry$$
$$\frac{dy}{dt} = -Fy + z - x$$
$$\frac{dz}{dt} = -Kz - Ex$$

donde $z(\theta_i^+) = z(\theta_i^-) + g_i$ y $z(t) \geqslant 0$, $K \geqslant y(t) \geqslant 0$, $x(t) \geqslant 0$.

B. Comandos ejecutados en "wxMaxima"

B.1

A continuación se presenta los detalles referidos al cálculo de los valores y vectores propios del caso N°3 de la sección A del Estudio Analítico.

```
 --> A: matrix([a1,0],[0,a2]);
    (A) matrix([a1,0],
               [0,a2])

 --> B: matrix([0,b1],[b2,0]);
    (B) matrix([0,b1],
               [b2,0])

 --> M: matrix([-m1,m1],[m2,-m2]);
    (M) matrix([-m1,m1],
               [m2,-m2])

 --> C=-A-B+M;
(%o4)C=matrix([-m1-a1,m1-b1],
               [m2-b2,-m2-a2])

 --> eigenvalues(matrix([-m1-a1,m1-b1],
                        [m2-b2, -m2-a2]));
(%o5)[[-(sqrt(m2^2+(2*m1-4*b1+2*a2-2*a1)*m2+m1^2+(-4*b2-2*a2+2*a1)*m1+4*b1*b2+a2^2
       -2*a1*a2+a1^2)+m2+m1+a2+a1)/2,(sqrt(m2^2+(2*m1-4*b1+2*a2-2*a1)*m2+m1^2
        +(-4*b2-2*a2+2*a1)*m1+4*b1*b2+a2^2-2*a1*a2+a1^2)-m2-m1-a2-a1)/2],[1,1]]

 --> eigenvectors(matrix([-m1-a1,m1-b1],
                         [m2-b2,-m2-a2]));
(%o6)[[[-(sqrt(m2^2+(2*m1-4*b1+2*a2-2*a1)*m2+m1^2+(-4*b2-2*a2+2*a1)*m1+4*b1*b2+a2^2
        -2*a1*a2+a1^2)+m2+m1+a2+a1)/2,(sqrt(m2^2+(2*m1-4*b1+2*a2-2*a1)*m2+m1^2
        +(-4*b2-2*a2+2*a1)*m1+4*b1*b2+a2^2-2*a1*a2+a1^2)-m2-m1-a2-a1)/2],[1,1]],[[[1,
```

```
        -(sqrt(m2^2+(2*m1-4*b1+2*a2-2*a1)*m2+m1^2+(-4*b2-2*a2+2*a1)*m1+4*b1*b2
        +a2^2-2*a1*a2+a1^2)+m2-m1+a2-a1)/(2*m1-2*b1)]],[[1,(sqrt(m2^2+(2*m1-4*b1
        +2*a2-2*a1)*m2+m1^2+(-4*b2-2*a2+2*a1)*m1+4*b1*b2+a2^2-2*a1*a2+a1^2)-m2+m1
        -a2+a1)/(2*m1-2*b1)]]]]

 --> %/*Reemplazando la expresión completa de la raíz cuadrada por \phi,  las expresiones
        de los vectores propios quedan de la siguiente manera;
        v1=[1, -(a1-a2+m1-m2+\phi)/(2m1-2b1)]
        v2=[1,(a1-a2+m1-m2+\phi)/(2m1-2b1)]
        y con estos valores se resuelve el sistema sabiendo que x(0)=[p,p]:*/

 --> %/*Solución del sistema para el caso N°3: se introducen las variables
        a=a1-a2+m1-m2+\phi
        b=2m1-2b1

 --> linsolve([c1+c2=p, (-a/b)*c1+(a/b)*c2=p], [c1,c2]);
(%o1)[c1=-((b-a)*p)/(2*a),c2=((b+a)*p)/(2*a)]

 --> %/*Por lo tanto, reemplazando los valores de a y b se obtiene:
        c1=[(a1-a2+2b1-m1-m2+\phi)/(2a1-2a2+2m1-2m2+2\phi)]p
        c2=[(a1-a2-2b1+3m1-m2+\phi)/(2a1-2a2+2m1-2m2+2\phi)]p*/
```

B.2.

A continuación se presenta los detalles referidos al cálculo de los valores y vectores propios del caso N°3 de la sección B del Estudio Analítico.

```
 --> A: matrix([a1,0,0],[0,a1,0],[0,0,a1]);
    (A) matrix([a1,0,0],
               [0,a1,0],
               [0,0,a1])

 --> B: matrix([0,b1,b1],[b1,0,b1],[b1,b1,0]);
    (B) matrix([0,b1,b1],
               [b1,0,b1],
               [b1,b1,0])

 --> M: matrix([-m1,(m1)/2,(m1)/2],[(m2)/2,-m2,(m2)/2],[(m3)/2,(m3)/2,-m3]);
    (M) matrix([-m1,m1/2,m1/2],
               [m2/2,-m2,m2/2],
               [m3/2,m3/2,-m3])

 --> C=-A-B+M;
(%o4)C=matrix([-m1-a1,m1/2-b1,m1/2-b1],
              [m2/2-b1,-m2-a1,m2/2-b1],
```

```
              [m3/2-b1,m3/2-b1,-m3-a1])

 --> eigenvectors(matrix([-m1-a1,m1/2-b1,m1/2-b1],
                          [m2/2-b1,-m2-a1,m2/2-b1],
                          [m3/2-b1,m3/2-b1,-m3-a1]));
(%o5)[[[-(sqrt(m3^2+(-m2-m1)*m3+m2^2-m1*m2+m1^2)+m3+m2+m1-2*b1+2*a1)/2,(sqrt(m3^2
        +(-m2-m1)*m3+m2^2-m1*m2+m1^2)-m3-m2-m1+2*b1-2*a1)/2,-2*b1-a1],[1,1,1]],
        [[[1,((m2-2*b1)*sqrt(m3^2+(-m2-m1)*m3+m2^2-m1*m2+m1^2)+m2^2+(-m1-2*b1)*m2
        +2*b1*m1)/((m1-2*b1)*m3+(2*b1-m1)*m2),-((m3-2*b1)*sqrt(m3^2+(-m2-m1)*m3+m2^2
        -m1*m2+m1^2)+m3^2+(-m1-2*b1)*m3+2*b1*m1)/((m1-2*b1)*m3+(2*b1-m1)*m2)]],[[1,
        -((m2-2*b1)*sqrt(m3^2+(-m2-m1)*m3+m2^2-m1*m2+m1^2)-m2^2+(m1+2*b1)*m2
        -2*b1*m1)/((m1-2*b1)*m3+(2*b1-m1)*m2),((m3-2*b1)*sqrt(m3^2+(-m2-m1)*m3+m2^2
        -m1*m2+m1^2)-m3^2+(m1+2*b1)*m3-2*b1*m1)/((m1-2*b1)*m3+(2*b1-m1)*m2)]],[[1,1,1]]]]
```

A continuación se presenta los detalles referidos a la obtención de la solución del sistema (10), del caso N°3 de la sección B del Estudio Analítico.

```
 --> %/*se introducen nuevas variables para encontrar el valor de las constantes:
       v1=[1,k,z]
       v2=[1,-k,-z]
       v3=[1,1,1]*/
(%i1) linsolve([c1+c2+c3=p, k*c1-k*c2+c3=q, z*c1-z*c2+c3=r], [c1,c2,c3]);
(%o1) [c1=(-k*r-r+(z+1)*q+(k-z)*p)/(2*k-2*z),c2=(-k*r+r+(z-1)*q+(k-z)*p)/(2*k-2*z),
       c3=-(z*q-k*r)/(k-z)]
 Reemplazando estos resultados se tiene que la solución particular del sistema (10)
 está dada por:\\
 $$X(t)=[\frac{p}{2}+\frac{m_3^2q-m_2^2r+2b_1m_1(q-r)-4b_1m_3q+2m_1m_2r+(2b_1-m_1)
         (m_2q+m_3r)+[(2b_1-m_3)q+(2b_1-m_2)r]\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}
         +m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{2[m_2^2-m_3^2-(2b_1+m_1)(m_2-m_3)-(4b_1-m_2
         -m_3)\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}]}]\cdot
         \begin{bmatrix}
         1\\\\
         \frac{2b_{1}m_{1}-(2b_{1}+m_{1})m_{2}+m_{2}^{2}-(2b_{1}-m_{2})\sqrt{m_{1}^{2}
         +m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{(2b_{1}-m_{1})(m_{2}
         -m_{3})}\\\\
         \frac{2b_{1}m_{1}+m_{3}^{2}-(2b_{1}+m_{1})m_{3}+(2b_{1}-m_{3})\sqrt{m_{1}^{2}
         +m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{(2b_{1}-m_{1})(m_{2}
         -m_{3})}\end{bmatrix}\cdot
         e^{\frac{2a_{1}-2b_{1}+m_{1}+m_{2}+m_{3}-\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}
         +m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{2}t}
         +[\frac{p}{2}+\frac{m_3^2q-m_2^2r+2b_1m_1(q-r)-2b_1m_2(q-2r)+m_1m_2q-2b_1m_3r
         -m_1m_3(2q-r)+[2b_1(q+r)-m_3q-m_2r]\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}
         +m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{2[m_2^2-m_3^2-(2b_1+m_1)(m_2-m_3)-(4b_1-m_2
         -m_3)\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}]}]\cdot
         \begin{bmatrix}
```

```
1\\\\
\frac{-2b_{1}m_{1}-m_{2}^{2}+(2b_{1}+m_{1})m_{2}+(2b_{1}-m_{2})\sqrt{m_{1}^{2}
+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{(2b_{1}-m_{1})(m_{2}
-m_{3})}\\\\
\frac{-2b_{1}m_{1}-m_{3}^{2}+(2b_{1}+m_{1})m_{3}-(2b_{1}-m_{3})\sqrt{m_{1}^{2}
+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{(2b_{1}-m_{1})(m_{2}
-m_{3})}\end{bmatrix}\cdot
e^{\frac{-2a_{1}+2b_{1}-m_{1}-m_{2}-m_{3}+\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}
+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{2}t}
+\frac{m_2^2r-m_3^2q-2b_1m_1(q-r)+(2b_1+m_1)(m_3q-m_2r)-[2b_1(q+r)-m_3q-m_2r]
\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}{m_2^2
-m_3^2-(2b_1+m_1)(m_2-m_3)-(4b_1-m_2-m_3)\sqrt{m_{1}^{2}+m_{2}^{2}-m_{1}m_{2}
+m_{3}^{2}-(m_{1}+m_{2})m_{3}}}\cdot
\begin{bmatrix}
1\\
1\\
1
\end{bmatrix}\cdot
e^{(-a_{1}-2b_{1})t}$$
```

B.3.

A continuación se presenta los principales detalles referidos al estudio analítico realizado con el programa de álgebra computacional "*wxMaxima*" de la sección A.

```
 -->A: matrix(
 [a1,0,0,0],
 [0,a1,0,0],
 [0,0,a1,0],
 [0,0,0,a1]);

(A) matrix(
[a1,0,0,0],
[0,a1,0,0],
[0,0,a1,0],
[0,0,0,a1])

 -->B: matrix(
 [0,b1,b1,b1],
 [b1,0,b1,b1],
 [b1,b1,0,b1],
 [b1,b1,b1,0]);

(B) matrix(
[0,b1,b1,b1],
```

```
[b1,0,b1,b1],
[b1,b1,0,b1],
[b1,b1,b1,0])

 -->M: matrix(
 [-m1,(m1)/3,(m1)/3,(m1)/3],
 [(m1)/3,-m1,(m1)/3,(m1)/3],
 [(m1)/3,(m1)/3,-m1,(m1)/3],
 [(m1)/3,(m1)/3,(m1)/3,-m1]);

(M) matrix(
[-m1,m1/3,m1/3,m1/3],
[m1/3,-m1,m1/3,m1/3],
[m1/3,m1/3,-m1,m1/3],
[m1/3,m1/3,m1/3,-m1])

 -->C=-A-B+M;
(%o6) C=matrix(
[-m1-a1,m1/3-b1,m1/3-b1,m1/3-b1],
[m1/3-b1,-m1-a1,m1/3-b1,m1/3-b1],
[m1/3-b1,m1/3-b1,-m1-a1,m1/3-b1],
[m1/3-b1,m1/3-b1,m1/3-b1,-m1-a1])

 -->equ1:'diff(x1(t),t)=(-m1-a1)*x1(t)+((m1)/3-b1)*x2(t)+(m1/3-b1)*x3(t)+(m1/3-b1)*x4(t);
(equ1) 'diff(x1(t),t,1)=(m1/3-b1)*x4(t)+(m1/3-b1)*x3(t)+(m1/3-b1)*x2(t)+(-m1-a1)*x1(t)
 -->equ2:'diff(x2(t),t)=(m1/3-b1)*x1(t)+(-m1-a1)*x2(t)+(m1/3-b1)*x3(t)+(m1/3-b1)*x4(t);
(equ2) 'diff(x2(t),t,1)=(m1/3-b1)*x4(t)+(m1/3-b1)*x3(t)+(-m1-a1)*x2(t)+(m1/3-b1)*x1(t)
 -->equ3:'diff(x3(t),t)=(m1/3-b1)*x1(t)+(m1/3-b1)*x2(t)+(-m1-a1)*x3(t)+(m1/3-b1)*x4(t);
(equ3) 'diff(x3(t),t,1)=(m1/3-b1)*x4(t)+(-m1-a1)*x3(t)+(m1/3-b1)*x2(t)+(m1/3-b1)*x1(t)
 -->equ4:'diff(x4(t),t)=(m1/3-b1)*x1(t)+(m1/3-b1)*x2(t)+(m1/3-b1)*x3(t)+(-m1-a1)*x4(t);
(equ4) 'diff(x4(t),t,1)=(-m1-a1)*x4(t)+(m1/3-b1)*x3(t)+(m1/3-b1)*x2(t)+(m1/3-b1)*x1(t)
 -->desolve([equ1,equ2,equ3,equ4],[x1(t),x2(t),x3(t),x4(t)]);
(%o11) [x1(t)=((x4(0)+x3(0)+x2(0)+x1(0))*%e^(-(3*b1+a1)*t))/4-((3*x4(0)+3*x3(0)+3*x2(0)
-9*x1(0))*%e^(-((4*m1-3*b1+3*a1)*t)/3))/12,x2(t)=((x4(0)+x3(0)+x2(0)+x1(0))*%e^(-(3*b1
+a1)*t))/4-((3*x4(0)+3*x3(0)-9*x2(0)+3*x1(0))*%e^(-((4*m1-3*b1+3*a1)*t)/3))/12,x3(t)=
((x4(0)+x3(0)+x2(0)+x1(0))*%e^(-(3*b1+a1)*t))/4-((3*x4(0)-9*x3(0)+3*x2(0)+3*x1(0))*%e^
(-((4*m1-3*b1+3*a1)*t)/3))/12,x4(t)=((9*x4(0)-3*x3(0)-3*x2(0)-3*x1(0))*%e^(-((4*m1-3*b1
+3*a1)*t)/3))/12+((x4(0)+x3(0)+x2(0)+x1(0))*%e^(-(3*b1+a1)*t))/4]
```

A continuación se presentan los resultados arrojados por el programa considerando valores arbitrarios para cada uno de los parámetros involucrados.

```
(%i1) A: matrix(
 [a1,0,0],
 [0,a2,0],
 [0,0,a3]);

(A) matrix(
[a1,0,0],
[0,a2,0],
[0,0,a3])

(%i7) B: matrix(
 [0,b1,b1],
 [b2,0,b2],
 [b3,b3,0]);

(B) matrix(
[0,b1,b1],
[b2,0,b2],
[b3,b3,0])

(%i8) M: matrix(
 [-m1,(m1)/2,(m1)/2],
 [(m2)/2,-m2,(m2)/2],
 [(m3)/2,(m3)/2,-m3]);

(M) matrix(
[-m1,m1/2,m1/2],
[m2/2,-m2,m2/2],
[m3/2,m3/2,-m3])

(%i9) C=-A-B+M;
(%o9) C=matrix(
[-m1-a1,m1/2-b1,m1/2-b1],
[m2/2-b2,-m2-a2,m2/2-b2],
[m3/2-b3,m3/2-b3,-m3-a3])

(%i10) equ1:'diff(x1(t),t)=(-m1-a1)*x1(t)+(m1/2-b1)*x2(t)+(m1/2-b1)*x3(t);
(equ1) 'diff(x1(t),t,1)=(m1/2-b1)*x3(t)+(m1/2-b1)*x2(t)+(-m1-a1)*x1(t)

(%i11) equ2:'diff(x2(t),t)=(m2/2-b2)*x1(t)+(-m2-a2)*x2(t)+(m2/2-b2)*x3(t);
(equ2) 'diff(x2(t),t,1)=(m2/2-b2)*x3(t)+(-m2-a2)*x2(t)+(m2/2-b2)*x1(t)
```

```
(%i12) equ3:'diff(x3(t),t)=(m3/2-b3)*x1(t)+(m3/2-b3)*x2(t)+(-m3-a3)*x3(t);
(equ3) 'diff(x3(t),t,1)=(-m3-a3)*x3(t)+(m3/2-b3)*x2(t)+(m3/2-b3)*x1(t)

(%i13) desolve([equ1,equ2,equ3],[x1(t),x2(t),x3(t)]);

(%o13) [x1(t)=ilt((g18898*(4*x1(0)*m3+4*x1(0)*m2+(2*x3(0)+2*x2(0))*m1+(-4*x3(0)
-4*x2(0))*b1+4*x1(0)*a3+4*x1(0)*a2)+(3*x1(0)*m2+3*x2(0)*m1+2*x1(0)*b2-6*x2(0)*b1
+4*x1(0)*a2)*m3+(3*x3(0)*m1+2*x1(0)*b3-6*x3(0)*b1+4*x1(0)*a3)*m2+(-2*x2(0)*b3
-2*x3(0)*b2+2*x2(0)*a3+2*x3(0)*a2)*m1+4*x1(0)*g18898^2+(4*x2(0)*b1-4*x1(0)*b2)*b3
+4*x3(0)*b1*b2+(-4*x2(0)*a3-4*x3(0)*a2)*b1+4*x1(0)*a2*a3)/(g18898*((3*m2+3*m1+2*b2
+2*b1+4*a2+4*a1)*m3+(3*m1+2*b3+2*b1+4*a3+4*a1)*m2+(2*b3+2*b2+4*a3+4*a2)*m1+(-4*b2
-4*b1)*b3-4*b1*b2+(4*a2+4*a1)*a3+4*a1*a2)+g18898^2*(4*m3+4*m2+4*m1+4*a3+4*a2+4*a1)
+((6*b1+3*a1)*m2+(6*b2+3*a2)*m1+(2*a1-8*b1)*b2+2*a2*b1+4*a1*a2)*m3+((6*b3+3*a3)*m1
+(2*a1-8*b1)*b3+2*a3*b1+4*a1*a3)*m2+((2*a2-8*b2)*b3+2*a3*b2+4*a2*a3)*m1+4*g18898^3
+((8*b1-4*a1)*b2-4*a2*b1)*b3-4*a3*b1*b2+4*a1*a2*a3),g18898,t),

x2(t)=ilt((g18898*(4*x2(0)*m3+(2*x3(0)+2*x1(0))*m2+4*x2(0)*m1+(-4*x3(0)-4*x1(0))*b2
+4*x2(0)*a3+4*x2(0)*a1)+(3*x1(0)*m2+3*x2(0)*m1-6*x1(0)*b2+2*x2(0)*b1+4*x2(0)*a1)*m3
+(3*x3(0)*m1-2*x1(0)*b3-2*x3(0)*b1+2*x1(0)*a3+2*x3(0)*a1)*m2+(2*x2(0)*b3-6*x3(0)*b2
+4*x2(0)*a3)*m1+4*x2(0)*g18898^2+(4*x1(0)*b2-4*x2(0)*b1)*b3+(4*x3(0)*b1-4*x1(0)*a3
-4*x3(0)*a1)*b2+4*x2(0)*a1*a3)/(g18898*((3*m2+3*m1+2*b2+2*b1+4*a2+4*a1)*m3+(3*m1+2*b3
+2*b1+4*a3+4*a1)*m2+(2*b3+2*b2+4*a3+4*a2)*m1+(-4*b2-4*b1)*b3-4*b1*b2+(4*a2+4*a1)*a3
+4*a1*a2)+g18898^2*(4*m3+4*m2+4*m1+4*a3+4*a2+4*a1)+((6*b1+3*a1)*m2+(6*b2+3*a2)*m1+(2*a1
-8*b1)*b2+2*a2*b1+4*a1*a2)*m3+((6*b3+3*a3)*m1+(2*a1-8*b1)*b3+2*a3*b1+4*a1*a3)*m2+((2*a2
-8*b2)*b3+2*a3*b2+4*a2*a3)*m1+4*g18898^3+((8*b1-4*a1)*b2-4*a2*b1)*b3-4*a3*b1*b2
+4*a1*a2*a3),g18898,t),

x3(t)=ilt((g18898*((2*x2(0)+2*x1(0))*m3+4*x3(0)*m2+4*x3(0)*m1+(-4*x2(0)-4*x1(0))*b3
+4*x3(0)*a2+4*x3(0)*a1)+(3*x1(0)*m2+3*x2(0)*m1-2*x1(0)*b2-2*x2(0)*b1+2*x1(0)*a2
+2*x2(0)*a1)*m3+(3*x3(0)*m1-6*x1(0)*b3+2*x3(0)*b1+4*x3(0)*a1)*m2+(-6*x2(0)*b3+2*x3(0)*b2
+4*x3(0)*a2)*m1+4*x3(0)*g18898^2+(4*x1(0)*b2+4*x2(0)*b1-4*x1(0)*a2-4*x2(0)*a1)*b3
-4*x3(0)*b1*b2+4*x3(0)*a1*a2)/(g18898*((3*m2+3*m1+2*b2+2*b1+4*a2+4*a1)*m3+(3*m1+2*b3
+2*b1+4*a3+4*a1)*m2+(2*b3+2*b2+4*a3+4*a2)*m1+(-4*b2
-4*b1)*b3-4*b1*b2+(4*a2+4*a1)*a3+4*a1*a2)+g18898^2*(4*m3+4*m2+4*m1+4*a3+4*a2+4*a1)
+((6*b1+3*a1)*m2+(6*b2+3*a2)*m1+(2*a1-8*b1)*b2+2*a2*b1+4*a1*a2)*m3+((6*b3+3*a3)*m1
+(2*a1-8*b1)*b3+2*a3*b1+4*a1*a3)*m2+((2*a2-8*b2)*b3+2*a3*b2+4*a2*a3)*m1+4*g18898^3
+((8*b1-4*a1)*b2-4*a2*b1)*b3-4*a3*b1*b2+4*a1*a2*a3),g18898,t)]
```

B.4.

A continuación se presenta el detalle de la obtención de la solución en la sección A.1 del Estudio Numérico.

A.1 Las matrices correspondientes a los efectos de decaimiento (A), bloqueo (B) y acomodación (M) están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}200000 & 0 \\ 0 & 0{,}200000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}035000 \\ 0{,}035000 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -0{,}020000 & 0{,}020000 \\ 0{,}020000 & -0{,}020000 \end{bmatrix}$$

y la nueva variable auxiliar $C = -A - B + M$:

$$C = \begin{bmatrix} -0{,}220000 & -0{,}015000 \\ -0{,}015000 & -0{,}220000 \end{bmatrix}$$

De esta manera la ecuación (2) se puede reescribir de la forma $\frac{dx}{dt} = C \cdot x$, es decir:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}220000 & -0{,}015000 \\ -0{,}015000 & -0{,}220000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Usando la ecuación característica $|C - \lambda I| = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, para determinar los valores propios del sistema se tiene que:

$$(\lambda + 0{,}205000) \cdot (\lambda + 0{,}235000) = 0$$

por lo tanto los valores propios del sistema corresponden a:

$$\lambda_1 = -0{,}205000$$
$$\lambda_2 = -0{,}235000$$

A continuación se usa la ecuación característica $(C - \lambda I) \cdot v = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, para determinar los vectores propios del sistema considerando los dos valores propios obtenidos:
i) $\lambda_1 = -0{,}205000$**:**

$$\begin{pmatrix} -0{,}015000 & -0{,}015000 \\ -0{,}015000 & -0{,}015000 \end{pmatrix} \cdot v_1 = 0$$

definiendo

$$v_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

se tiene que,

$$v_1 = \begin{bmatrix} -k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto para $\lambda_1 = -0{,}205000$, existe $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y de esta manera:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}205000t}$$

ii) $\lambda_2 = -0{,}235000$**:**

$$\begin{pmatrix} 0{,}015000 & -0{,}015000 \\ -0{,}015000 & 0{,}015000 \end{pmatrix} \cdot v_2 = 0$$

definiendo

$$v_2 = \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} k_4 \\ k_4 \end{bmatrix} = k_4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto para $\lambda_2 = -0{,}235000$, existe $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, y de esta manera:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}235000t}$$

Una vez obtenidas las expresiones de X_1 y X_2, la solución general del sistema está dada por:

$$X = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2, \text{ esto es;}$$

$$X = c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}205000 \cdot t} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-0{,}235000 \cdot t}$$

B.5

A continuación se presenta los detalles referidos a la obtención de las soluciones de la A.3 del Estudio Numérico.

A.3

Para realizar esta simulación se trabajará con la ejecución del programa de álgebra computacional "$wxMaxima$" y el programador de cálculos numéricos "$OCTAVE$".
La matriz auxiliar correspondiente queda expresada de la siguiente forma:

$$C = \begin{bmatrix} -0{,}220000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 \\ -0{,}028000 & -0{,}220000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 \\ -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}220000 & -0{,}028000 \\ -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}220000 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el sistema (2) se puede reescribir de la forma $\frac{dx}{dt} = C \cdot x$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}220000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 \\ -0{,}028000 & -0{,}220000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 \\ -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}220000 & -0{,}028000 \\ -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}028000 & -0{,}220000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Con la función "$eigenvalues$" se obtienen los valores propios del sistema que corresponden a:

i	λ_i
1	-0.304000
2	-0.192000
3	-0.192000
4	-0.192000

Tabla N°17: Parámetros de los valores propios correspondientes al sistema.

Con la función "$eigenvectors$" se obtienen los vectores propios del sistema que corresponden a:

v_1	v_2	v_3	v_4
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
1	-1	-1	-1

Tabla N°18: Parámetros de los vectores propios correspondientes al sistema.

Considerando los datos de las tablas anteriores se plantea la solución general del sistema que está dada por:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i \cdot v_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

B.6.

A continuación se presenta los detalles referidos a la obtención de las soluciones considerando condiciones iniciales diferentes, correspondiente a la sección B del Estudio Numérico.

```
 --> %/*CASO B.1: COMO SE TRABAJA CONSIDERANDO LOS MISMOS VALORES Y
VECTORES PROPIOS  OBTENIDOS EN EL CASO A.1, SÓLO SE RESUELVE EL
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CORRESPONDIENTE:*/

 --> linsolve([-c1+c2=31, c1+c2=33], [c1,c2]);
(%o1)       [c1=1,c2=32]
```

B.7.

A continuación se presenta los detalles referidos a la obtención de las soluciones de la sección C.1. Caso Nº1.

```
 --> %/* LOS SIGUIENTES DATOS CORRESPONDEN A UN GRUPO CON UNA FUERTE
         INCLINACIÓN AL FACTOR DE DECAIMIENTO.*/

 --> A: matrix([0.3,0,0],[0,0.3,0],[0,0,0.3]);
    (A) matrix([0.3,0,0],
               [0,0.3,0],
               [0,0,0.3])

 --> B: matrix([0,0.035,0.035],[0.035,0,0.035],[0.035,0.035,0]);
    (B) matrix([0,0.035,0.035],
               [0.035,0,0.035],
               [0.035,0.035,0])

 --> M: matrix([-0.02,0.01,0.01],[0.01,-0.02,0.01],[0.01,0.01,-0.02]);
    (M) matrix([-0.02,0.01,0.01],
               [0.01,-0.02,0.01],
               [0.01,0.01,-0.02])
```

```
 -->C=-A-B+M;
(%o4) C=matrix([-0.32,-0.025,-0.025],
               [-0.025,-0.32,-0.025],
               [-0.025,-0.025,-0.32])

 -->eigenvectors(matrix([-0.32,-0.025,-0.025],
                        [-0.025,-0.32,-0.025],
                        [-0.025,-0.025,-0.32]));

rat: replaced 0.025 by 1/40 = 0.025
rat: replaced -6.250000000000001E-4 by -1/1600 = -6.25E-4
rat: replaced -0.025 by -1/40 = -0.025
rat: replaced -0.32 by -8/25 = -0.32

(%o6) [[[-37/100,-59/200],[1,2]],[[[1,1,1]],[[1,0,-1],[0,1,-1]]]]

 -->linsolve([c1+c2=36, c1+c3=36, c1-c2-c3=36], [c1,c2,c3]);
(%o1) [c1=36,c2=0,c3=0]
```

B.8.

A continuación se presenta los detalles referidos a la obtención de las soluciones de la sección C.1. Caso Nº3 del Estudio Numérico.

```
 --> %/* EN ESTE CASO SE TRABAJA CON UN GRUPO QUE PRESENTA UNA FUERTE
         INCLINACIÓN A LOS FACTORES DE DECAIMIENTO Y BLOQUEO.*/

 --> A: matrix([0.3,0,0],[0,0.3,0],[0,0,0.3]);
    (A) matrix([0.3,0,0],
               [0,0.3,0],
               [0,0,0.3])

 --> B: matrix([0,0.0525,0.0525],[0.0525,0,0.0525],[0.0525,0.0525,0]);
    (B) matrix([0,0.0525,0.0525],
               [0.0525,0,0.0525],
               [0.0525,0.0525,0])

 --> M: matrix([-0.02,0.01,0.01],[0.01,-0.02,0.01],[0.01,0.01,-0.02]);
    (M) matrix([-0.02,0.01,0.01],
               [0.01,-0.02,0.01],
               [0.01,0.01,-0.02])
```

```
 -->C=-A-B+M;
(%o4) C=matrix([-0.32,-0.0425,-0.0425],
               [-0.0425,-0.32,-0.0425],
               [-0.0425,-0.0425,-0.32])

 -->eigenvectors(matrix([-0.32,-0.0425,-0.0425],
                        [-0.0425,-0.32,-0.0425],
                        [-0.0425,-0.0425,-0.32]));

rat: replaced 0.0425 by 17/400 = 0.0425
rat: replaced -0.00180625 by -289/160000 = -0.00180625
rat: replaced -0.0425 by -17/400 = -0.0425
rat: replaced -0.32 by -8/25 = -0.32
rat: replaced -0.0425 by -17/400 = -0.0425
rat: replaced 0.00180625 by 289/160000 = 0.00180625

(%o5) [[[-81/200,-111/400],[1,2]],[[[1,1,1]],[[1,0,-1],[0,1,-1]]]]

 -->linsolve([c1+c2=36, c1+c3=36, c1-c2-c3=36], [c1,c2,c3]);
(%o1) [c1=36,c2=0,c3=0]
```

C. Comandos ejecutados en "Octave"

C.1.

A continuación se presentan los comandos ejecutados para obtener la comparación gráfica de las soluciones para $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

```
>> %COMPARACION GRAFICA DE LAS SOLUCIONES PARA N=2,3,4,5,6,7
>>
>>
>> t=0:0.01:20;
>> x=36*[1; 1]*exp(-0.235*t);
>> y=36*[1; 1; 1]*exp(-0.27*t);
>> z=36*[1; 1; 1; 1]*exp(-0.304*t);
>> w=36*[1; 1; 1; 1; 1]*exp(-0.34*t);
>> v=36*[1; 1; 1; 1; 1; 1]*exp(-0.375*t);
>> u=36*[1; 1; 1; 1; 1; 1; 1]*exp(-0.412*t);
>> plot(t,x,'b',t,y,'b',t,z,'b',t,w,'b',t,v,'b',t,u,'b')
>> grid on
>> text(0,41,'x')
>> text(20.5,0,'t')
>> text(7.5,7,'n=7')
```

```
>> text(4,7,'<---------------------')
>> text(3.7,9,'<-----------------------')
>> text(7.5,9,'n=6')
>> text(7.5,12,'n=5')
>> text(3.2,12,'<-------------------------')
>> text(3.1,14,'<-------------------------')
>> text(7.5,14,'n=4')
>> text(3,16,'<-------------------------')
>> text(7.5,16,'n=3')
>> text(7.5,18,'n=2')
>> text(3,18,'<-------------------------')
>>
```

C.2.

A continuación se presentan los comandos ejecutados para realizar la comparación gráfica del impacto de las condiciones iniciales.

```
>> t=0:0.01:20;
>> x=1*[-1;1]*exp(-0.205*t)+32*[1;1]*exp(-0.235*t);
>> y=-1*[1;-1;0]*exp(-0.195*t)-1*[1;1;-2]*exp(-0.195*t)+33*[1;1;1]*exp(-0.27*t);
>> z=34*[1;1;1;1]*exp(-0.304*t)-3*[1;0;0;-1]*exp(-0.192*t)-1*[0;1;0;-1]*exp(-0.192*t)
     +1*[0;0;1;-1]*exp(-0.192*t);
>> w=35*[1;1;1;1;1]*exp(-0.34*t)-4*[1;0;0;0;-1]*exp(-0.19*t)-2*[0;1;0;0;-1]*exp(-0.19*t)
     +2*[0;0;0;1;-1]*exp(-0.19*t);
>> q=36*[1;1;1;1;1;1]*exp(-0.375*t)-5*[1;0;0;0;0;-1]*exp(-0.189*t)-3*[0;1;0;0;0;-1]
     *exp(-0.189*t)-1*[0;0;1;0;0;-1]*exp(-0.189*t)+1*[0;0;0;1;0;-1]
     *exp(-0.189*t)+3*[0;0;0;0;1;-1]*exp(-0.189*t);
>>
>>
>>
>> subplot(5,1,1); p1=plot(t,x,'b'); title('n=2');
>> text(0,38,'x')
>> text(20.5,0,'t')
>> grid on
>>
>> subplot(5,1,2); p2=plot(t,y,'b'); title('n=3');
>> text(0,38,'y')
>> text(20.5,0,'t')
>> grid on
>>
>> subplot(5,1,3); p3=plot(t,z,'b'); title('n=4');
>> text(0,43,'z')
>> text(20.5,0,'t')
>> grid on
```

```
>>
>> subplot(5,1,4); p4=plot(t,w,'b'); title('n=5');
>> text(0,43,'y')
>> text(20.5,0,'x')
>> grid on
>>
>> subplot(5,1,5); p5=plot(t,q,'b'); title('n=6');
>> text(0,53,'y')
>> text(20.5,0,'x')
>> grid on
>>
```

C.3.

A continuación se presentan los comandos utilizados para realizar los gráfico correspondiente a los grupos N°5, N°6, N°7 y N°8.

```
>> t=0:0.01:20;
>>
>> x=36*[1;1;1]*exp(-0.27*t);
>> y=36*[1;1;1]*exp(-0.405*t);
>> z=36*[1;1;1]*exp(-0.335*t);
>> w=36*[1;1;1]*exp(-0.135*t);
>> v=36*[1;1;1]*exp(-0.205*t);
>> plot(t,x,'b',t,y,'b',t,z,'b',t,w,'b',t,v,'b')
>> grid on
>> text(0,41,'x')
>> text(20.5,0,'t')
>> text(1.9,28,'<----------------------------------')
>> text(7.5,28,'a=0.100, b=0.0175')
>> text(1.5,26.4,'<----------------------------------')
>> text(7.5,26.4,'a=0.100, b=0.0525')
>> text(1.4,24.9,'<----------------------------------')
>> text(7.5,24.9,'a=0.200, b=0.035')
>> text(1.3,23.4,'<-----------------------------------')
>> text(7.5,23.4,'a=0.300, b=0.0175')
>> text(1.2,21.8,'<-----------------------------------')
>> text(7.5,21.8,'a=0.300, b=0.0525')
```