

Aproximación de la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria

Por

Paulina Andrea Huala Pérez

Profesor Guía

Dr. Stefan Berres

Actividad Formativa Equivalente (AFE), para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas (Profesional).

Temuco - 7 de marzo de 2016

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISION EVALUADORA

Profesor Guía:

Dr. Stefan Berres

Profesor informante:

Dr. Juan Carlos Pozo

Profesor informante:

Dr. Ramón Bécar.

Director del Programa (Ministro de fe):

Dr. Emilio Cariaga

Temuco ·····

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente:

- Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.
- Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.
- Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

Dedicatoria

A Dios

por ir a mi lado, por marcar e iluminarme los días, por darme sabiduría y perseverancia al ver finalizada una de mis metas trazadas en mi formación intelectual, recojo el fruto de mi esfuerzo y dedicación, por eso doy gracias a:

A mis padres Marta y Manuel

a quienes les debo mi ser, me guiaron por el camino del amor y respeto, mi triunfo les pertenece, los amo mucho.

A mi hermano Ignacio

que mi logro le sirva de estímulo y ejemplo para alcanzar sus propias metas.

A Joaquín

que con su amor y paciencia, me ha apoyado en este proceso . Que Dios los bendiga.

Agradecimientos

A los académicos del Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad Católica de Temuco, en especial al Dr. Emilio Cariaga, quien como Director del programa estuvo disponible todo el tiempo para aclarar dudas y guiar mi camino a lo largo de estos dos años.

A los académicos de la Facultad de Ingeniería, quienes han sido más que profesores y colegas, un ejemplo en el trazado de metas con respecto a la formación intelectual, incentivando la continuidad de estudios desde mi formación de pregrado.

A mi director de la Actividad Formativa Equivalente (AFE) Dr. Stefan Berres, por su paciencia, dedicación y aceptar el desafío de trabajar un tema nuevo. A Dr. Juan Pozo, por guiarme y compartir sus conocimientos conmigo.

A mis familiares y amigos, por ser contención, apoyo y fuente de perseverancia en este proceso, por marcar "presencia presente", no solo por su presencia física, sino también por ser un presente en mi vida, regalándome su diario vivir.

Para terminar, a mis compañeros de la primera versión del programa de magíster, quienes me sacaron sonrisas, y compartieron conmigo momentos inolvidables (almuerzos, onces, ...etc), gracias por ser un apoyo en el transcurso de este proceso.

Abstract

In this thesis analytical and numerical methods to solve a time-fractional advection-diffusion equation are applied and compared. We start with a review of relevant historical aspects and resume the main definitions of Fractional Derivatives and their properties, giving the mathematic support for the study of a advection-diffusion equation with fractional time on a finite domain. The equation is obtained from the standard advection-diffusion equation by the replacement of the temporary derivative of primer order by a fractional derivative defined according to Caputo for a fractional order $0 < \alpha \leq 1$. Many physical processes seem to exhibit behavior of fractional order, giving rise to temporal or spatial equations of fractional order. This type of fractional linear partial differential equations that arise in fluid mechanics can be solved by numerical methods as finite difference methods or new analytical techniques as the method of variational iteration and the Adomain decomposition method. These two methods can be used as alternative methods for obtaining the analytical solution and approximate solutions of different types of fractional differential equations.

Keywords: Fractional calculus, Fractional differential equations; Caputo derivative; finite difference; Variational iteration method; Decomposition method; Fluid mechanics.

Resumen

Esta tesis presenta algunos conceptos fundamentales del cálculo fraccional. Se parte de una revisión de los aspectos históricos relevantes y se establece las principales definiciones de derivada fraccional y sus propiedades, lo que da el soporte matemático para el estudio de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionario en un dominio finito, esta ecuación se obtiene de la ecuación de advección-difusión estándar mediante la sustitución de la derivada temporal de primer orden por la derivada fraccionaria definida según Caputo para $0 < \alpha \leq 1$. Muchos procesos físicos parecen exhibir un comportamiento de orden fraccionario, dando origen a ecuaciones de orden fraccional temporal o espacial, para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales parciales fraccionales lineales que surgen en la mecánica de fluidos se implementa en este caso métodos numéricos como diferencias finitas y nuevas técnicas de análisis como el Método de Iteración Variacional y el Método de Descomposición de Adomian, estos dos métodos se pueden emplear como procedimientos alternativos para la obtención de la soluciones analíticas y aproximadas para diferentes tipos de ecuaciones diferenciales fraccionales fraccionarias.

Palabras clave: Cálculo fraccional, Ecuación diferencial fraccionaria, derivada de Caputo, diferencias finitas, método de Variación Iteracional, método de Descomposición de Adomian, mécanica de fluidos.

Índice

1	Introducción										
2	Nociones básicas del Cálculo Fraccional										
	2.1	Funciones Trascendentes Especiales	5								
	2.2	Integral Fraccionaria	7								
	2.3	Derivada Fraccionaria	12								
3	Métodos empleados en la resolución de Ecuaciones Diferenciales										
	2 1	Métada da Dascompacisión da Adamian (AD)	⊿ J ງງ								
	0.1 2.9	Método de Itoración Variacional (MIV)	$\frac{20}{24}$								
	3.3	Resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias	$\frac{24}{25}$								
4	Materiales y Métodos										
	4.1	Modelo Conceptual	32								
		4.1.1 Difusión Anómala	36								
		4.1.2 Camino Aleatorio de Tiempo Continuo	38								
	4.2	Modelo Matemático	42								
	4.3	Solución Analítica	42								
	4.4	Solución Numérica	48								
5	Resultados 51										
	5.1	Simulación Computacional	51								
6	Con	onclusiones									
\mathbf{A}	Obtención de la solución analítica										
в	Códigos computacionales 6										
	B.1	Códigos computacionales MATHEMATICA	64								
	B.2	Códigos computacionales MATLAB									
		B.2.1 Derivada de Grünwald-Letnikov	65								
		B.2.2 Simulación empleando Diferencias Finitas	66								
		B.2.3 Simulación empleando Descomposición de Adomian \hdots	68								
		B.2.4 Simulación empleando método de Iteración Variacional	68								

Objetivos

Objetivo general

Analizar una ecuación unidimensional de advección-difusión tiempo fraccionaria, la cual modela el problema de transporte de un fluido en un medio poroso o el de flujo de aguas subterráneas.

Objetivos específicos

- 1. Desarrollar el modelo matemático y conceptual de un fenómeno de transporte con características de advección-difusión empleando el cálculo fraccional en el modelamiento de un fluido en medio poroso.
- 2. Formular una solución numérica del modelo, utilizando método de diferencias finitas y aquellos propios del cálculo fraccional.
- 3. Implementar computacionalmente los métodos empleados en la resolución de una ecuación de advección-difusión fraccionaria, utilizando la derivada fraccional de Grünwald-Letnikov.

Para el cumplimiento de los objetivos se combinarán las componentes matemáticas y numéricas, en particular, para la aproximación numérica de las ecuaciones diferenciales fraccionarias se considerará la creación de un entorno informático de visualización

1 Introducción

En conjunto con el cálculo diferencial, surge la idea de generalización de derivada para valores no enteros, más tarde la inquietud de que el orden de la derivada fuese un número cualquiera (fraccionario, racional, o complejo) rondó el mundo matemático, recibiendo aportes de destacados Matemáticos como Leibnitz, L'Hopital, Bernoulli, Wallis, Lacroix por mencionar algunos. Hoy se sabe que lo planteado anteriormente puede ser cierto, por lo que el nombre de "cálculo fraccionario" debería evolucionar a "cálculo de orden arbitrario", en el cual destacan los aportes realizados en el siglo XIX por Riemann-Liouville, Caputo y Grünwald-Letnikov [28].

En el año 1974 se realizó en EE.UU (estado de Connecticut) la primera conferencia internacional referente al cálculo fraccionario, teniendo su segunda y tercera versión en 1984 Escocia y 1989 Tokyo respectivamente, lo cual ha servido de estímulo para un gran número de publicaciones, siendo difícil encontrar una rama de la ciencia e ingeniería que no se relacione con el cálculo fraccionario [28].

Dentro del análisis matemático, el cálculo fraccional es una de las áreas que ha tenido mayor desarrollo en los últimos años, debido a que las derivadas fraccionales describen fenómenos con memoria, es decir, acumulan la historia total de una función, lo cual ha significado un incremento en sus aplicaciones [29], las que se expanden por muchas disciplinas como: teoría de probabilidades y procesos estocásticos; ecuaciones integro diferenciales; teoría de transformadas; análisis numéricos; economía y sobre todo física en donde se encuentran fenómenos de visco-elasticidad, electromagnetismo, circuito y difusión anómala la cual es el objeto de estudio de[28]. Hay varios ejemplos de difusión anómala, entre los que se encuentran: difusión a través de materiales porosos o multifase, turbulencia, dispersión de contaminantes en aguas subterráneas, movimientos de petróleo. En la actualidad fenómenos de transporte difusivos anómalos son estudiados desde distintos puntos de vista: en medios porosos [29], difusión térmica en un medio compuesto [12], en combinación con transporte convectivo en una y dos dimensiones [34, 23], en conjunto con un término de reacción [1] entre otros.

Dependiendo de los fenómenos que se desee modelar, se puede utilizar una derivada fraccional espacial o temporal, es decir, es frecuente relacionar saltos de partículas muy largos con derivadas espacio fraccionales [34, 23], mientras que a tiempos de espera extensos con derivadas fraccionales en el tiempo [11]. En [30] se establece que los modelos fraccionarios son un marco apropiado para la descripción del movimiento de soluto en experimentos de transporte en columnas de suelo, del mismo modo en [29] se concluye que existe una gran correspondencia entre los resultados numéricos y teóricos obtenidos mediante difusión anómala.

Parte del estudio del cálculo fraccional consiste en determinar convergencia, consistencia y estabilidad de los métodos aplicados a la solución de ecuaciones fraccionarias, lo cual se puede observar en [20] donde se hace un trabajo de matemática pura para establecer dichos criterios. Del mismo modo el planteamiento de una aproximación numérica es de importancia, destacando la definición de Grünwald-Letnikov [22, 34] ya que al ser desarrollado por serie de coeficientes binomiales hace referencia a la memoria de las derivadas fraccionarias, a diferencia de lo desarrollado en [38, 33] donde se ocupa el

método de Crank Nicolson Fraccional, el cual es incondicionalmente estable, consistente y convergente. Otro método utilizado para encontrar soluciones numérica es el establecido en [29] que consiste en una modificación del método de Lattice Boltzmann fraccional, como una herramienta para estudiar el comportamiento de la solución de la ecuación de advección-difusión anómala.

Ha surgido también una versión modificada de la derivada de Riemann -Liouville sobre la cual se ha trabajado en conjunto con el método de las Características de Lagrange [13, 14, 15, 16, 17, 37] para la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales, mismo objeto de estudio que se retoma en [11, 24] aplicando el método de descomposición de Adomian y método de Iteración Variacional.

En esta tesis se consideran algunas de las ideas mencionadas anteriormente, ya que se realizará una comparación entre métodos como: diferencias finitas, descomposición de Adomian e Iteración Variacional, todos ellos empleados en la resolución de una ecuación diferencial de advección-difusión tiempo fraccional.

La estructura a desarrollar en esta tesis es la siguiente: en el capítulo 1 se presenta un estado del arte, dando una visión general de los trabajos realizados utilizando el cálculo fraccionario, luego en el capítulo 2 se enuncian definiciones, demuestran propiedades y ejemplifican conceptos referentes al cálculo fraccionario, en el capítulo 3 se definen métodos para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales con sus respectivos ejemplos, el capítulo 4 hace relación al fenómeno de transporte que modela la ecuación diferencial de advección-difusión tiempo fraccionaria y los métodos empleados en su resolución (numérico y analítico), el capítulo 5 corresponde a todas las visualizaciones y comparaciones establecidas entre las soluciones encontradas y para finalizar el capítulo 6 contiene las conclusiones y temas pendientes a retomar en un próximo estudio.

2 Nociones básicas del Cálculo Fraccional

En relación a la formación matemática entregada en pregrado por casas de estudios superiores (Universidades), se puede decir que existe una familiarización con el cálculo diferencial de orden entero, cuya notación usual fue establecida por Leibnitz:

$$\frac{df(x)}{dx}$$
, $Df(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $D^2f(x)$.

Desde el año 1695 aproximadamente, L'Hopital, ya reflexionaba acerca de la factibilidad y las consecuencias de emplear el valor de la derivada de orden $\frac{1}{2}$ siendo una paradoja en ese entonces [3].

Luego de los primeros pasos dados por Leibnitz y L'Hopital, el cálculo fraccional (CF), siguió siendo estudio de matemáticos renombrados como Euler (s.XVIII), Laplace, Lacroix, Fourier, Riemann (s. XIX), Hardy y Littlewood (s. XX) quienes se ocuparon del tema a nivel superficial, más no lo profundizaron, debido a la cantidad de interrogante en el ámbito de problemas de tipo ordinario, lo cual dificultaba planteamientos alternativos e innovadores [21].

En 1738, Euler, introduce la generalización de la derivada ordinaria, constatando que la derivación fraccionaria tenía sentido en el caso de una función potencia x^a , años después, en 1819 Lacroix parte de las ideas de Euler tomando la derivada *n*-ésima expresada mediante factorial, generalizándola al utilizar la función gamma, como se puede ver en la siguiente comparación de expressiones:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^a = \frac{m!}{(a-n)!} x^{a-n} \qquad \to \qquad \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} x^{a-\frac{1}{2}}.$$

Cabe destacar que en la primera expresión a > n siendo ambos positivos, y en la generalización fraccionaria se generaliza para valores reales positivos a > n. Años más tarde (1832) Joseph Liouville basado en los aportes hechos por los matemáticos Fourier y Abel (1822-1823), extiende la derivada entera de una función exponencial a una de orden arbitrario p, mediante el desarrollo en serie de una función exponencial arbitraria [3].

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^p}{dx^p}e^{ax} = a^p e^{ax}.$$

Es así como Liouville continúa trabajando en esta rama del cálculo, estudiando la integral fraccional pretendiendo posteriormente obtener el operador inverso o derivada fraccional, hasta que en el año 1832 obtiene la llamada integral fraccional de Liouville de orden α [21].

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{1}{(-1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} t^{\alpha-1}f(x+t)dt \qquad , \quad Re(\alpha) > 0.$$

Estudios posteriores se basaron en la fórmula de Cauchy para la integral repetida, es así como por ejemplo en el año 1847 Riemann escribió un artículo modificando la definición

de Liouville del operador integral fraccionario, cuyos aportes se conocen hoy como la Integral de Riemann-Liouville.

Años más tarde, A. V. Letnikov escribió el artículo "Theory of differentiation of fractional order" (1866), el cual complementa Grünwald, para dar origen al operador conocido como la derivada fraccionaria de Grünwald- Letnikov.

Ya en el siglo XX, se desarrollaron nuevas fórmulas íntegro-diferenciales fraccionarias como: integral fraccionaria de Weyl (1917), integral fraccionaria de Riesz (1936), derivada fraccionaria de Caputo (1967), entre otras [3, 4, 21].

En la actualidad, se ha experimentado un gran auge conceptual en el Cálculo Fraccionario y constituyen un lugar de encuentro de múltiples disciplinas, como la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de la transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico [4].

En la siguiente sección se estudiarán conceptos primordiales del cálculo fraccionario, dentro de los cuales destacan los operadores diferenciales fraccionarios (derivadas e integrales) y se definirán funciones transcendentes y especiales empleadas en el cálculo fraccional.

2.1 Functiones Trascendentes Especiales

En este apartado se encuentran algunas definiciones de funciones trascendentes especiales, y las propiedades de éstas que serán utilizadas en algunas demostraciones y ejemplos. Se llaman transcendentes porque no pueden expresarse como suma finita de funciones algebraicas, y son especiales porque están estudiadas y tienen nombre propio. En general, cuando se trabaja con el cálculo fraccional se llega a expresiones trascendentes, motivo por el cual es conveniente emplear estas funciones y sus propiedades, para expresar las soluciones de derivadas e integrales fraccionarias.

Definición 2.1. Función Gamma

La función gamma de α , siendo $\alpha > 0$, se denota $\Gamma(\alpha)$ y se define a partir de la integral Impropia

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x} dx, \qquad (2.1)$$

la función Gamma, surge paralelamente con el problema de generalización de la función Factorial, es decir, hallar una expresión que sea igual a n! con $n \in \mathbb{N}$ y que pueda ser extendida a cualquier número real (extender el dominio), es en este proceso donde se establecen nexos muy íntimos entre la función Gamma y la función Factorial, por ejemplo:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!, \tag{2.2}$$

mostrando también la similitud en la forma de autorreproducción ya que:

$$\alpha! = \alpha \cdot (\alpha - 1)! \quad y \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \cdot \Gamma(\alpha - 1).$$
(2.3)

A continuación se muestra la gráfica de la función gamma:



Figura 1: Función Gamma en el intervalo [-10,10]

Definición 2.2. Función Mittag-Leffler (M-L)

En 1903 Mittag-Leffler define la función de parámetro $\alpha \in \mathbb{C}$ denotada por E_{α} con E mayúscula recordando la función e de Euler, la función de Mittag-Leffler es la función compleja de variable compleja definida por la serie:

$$E_z(\alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$
(2.4)

posteriormente en el año 1905 Wiman generaliza la función para dos parámetros $\alpha>0,\beta>0$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

$$E_z(\alpha,\beta) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$
(2.5)

En el Cálculo Fraccionario, las funciones de Mittag-Leffler son de especial importancia; pues de la misma manera como las exponenciales surgen de forma natural en las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, la familia de funciones de Mittag-Leffler tiene un rol similar en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias [21].

A continuación se anexan casos especiales de la función M-L, se puede ver como la propia exponencial e^x es un caso particular de esta familia, es por esto que puede considerarse una generalización de las exponenciales.

– Progresión geométrica

$$E_z(0,1) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$
(2.6)

- Función exponencial

$$E_z(1,1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^x,$$
(2.7)

- Función de error

$$E_z\left(\frac{1}{2},1\right) = e^{z^k} erfc(z),\tag{2.8}$$

- Coseno hiperbólico

$$E_z(2,1) = \cosh(\sqrt{z}). \tag{2.9}$$

A continuación se muestra la gráfica de la función Mittag-Leffler



Figura 2: Función Mittag-Leffler para $\alpha=0,1,2,3,4,5,\beta=1$

2.2 Integral Fraccionaria

Para la definición de la integral fraccionaria se comenzará por la fórmula de integral n-ésima, planteada por Cauchy.

$$(I^{n}f)(x) = \int_{0}^{x} (I^{n-1}f(t))dt,$$

Cauchy encontró otra manera de escribir la ecuación anterior y demostró que ésta puede ser reducida a una integral de convolución. Este resultado es conocido como la fórmula de Cauchy y marca el inicio de la integral fraccionaria.

$$(I^{n}f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t) dt, \qquad (2.10)$$

Demostración. La demostración de la fórmula (2.10) se hará vía inducción. - sea n = 1, la primera integral se puede expresar como:

$$I^1 f(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

- se asume válida para un n=k-1

$$I^{k-1}f(x) = \frac{1}{(k-2)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-2} dt,$$

- se pretende probar que se cumple también para un n = k:

$$I^{k}f(x) = \int_{0}^{x} \left[\frac{1}{(k-2)!} \int_{0}^{x} f(t_{k-1})(x-t_{k-1})^{k-2} dt_{k-1} \right] dt_{k}$$

$$= \frac{1}{(k-2)!} \int_{0}^{x} f(t_{k-1}) \left[\int_{t_{k-1}}^{x} (x-t_{k-1})^{k-2} dt_{k} \right] dt_{k-1}$$

$$= \frac{1}{(k-2)!} \int_{0}^{x} f(t_{k-1})(x-t_{k-1})^{k-2} \frac{(x-t_{k-1})}{(k-1)} dt_{k-1}$$

$$= \frac{1}{(k-2)! \cdot (k-1)} \int_{0}^{x} f(t_{k-1})(x-t_{k-1})^{k-1} dt_{k-1}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_{0}^{x} f(t)(x-t)^{k-1} dt$$

En la demostración anterior, se realizaron sucesivos cambios en el orden de la diferencial aplicando sucesivamente el teorema de Fubini que se enuncia a continuación:

Teorema 2.3. Si f es continua entonces las funciones f, f_x y f_y son todas integrables, con $x \in [a, b], y \in [c, d]$ y entonces se obtiene que:

$$\int_{A} f = \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x, y) dy \right) dx = \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x, y) dx \right) dy.$$

Lo que permite Fubini es poder cambiar el orden de integración en una integral de superficie, como lo muestran los siguientes ejemplos para el caso de n = 2 y n = 3:

Ejemplo 2.4. Para n = 2 se tiene la siguiente expresión:

$$I^{2}f(x) = \int_{0}^{x} \left[\int_{0}^{t_{2}} f(t_{1})dt_{1} \right] dt_{2} = \int_{0}^{x} \left[\int_{t_{1}}^{x} f(t_{1})dt_{2} \right] dt_{1},$$

Se puede realizar un cambio de diferencial ya que $f(t_1)$ no es función de t_2 , por lo que se puede extraer de la diferencial



Figura 3: Representación geométrica del cambio de diferencial

$$I^{2}f(x) = \int_{0}^{x} f(t_{1}) \left[\int_{t_{1}}^{x} dt_{2} \right] dt_{1} = \int_{0}^{x} f(t_{1}) \left(x - t_{1} \right) dt_{1} = \int_{0}^{x} f(t) \left(x - t \right) dt_{1}$$

Ejemplo 2.5. - Para n = 3 se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{split} I^{3}f(x) &= \int_{0}^{x} \left\{ \int_{t_{1}}^{x} \left[\int_{t_{2}}^{x} f(t_{1})dt_{3} \right] dt_{2} \right\} dt_{1} = \int_{0}^{x} \left\{ \int_{t_{1}}^{x} f(t_{1}) \left[\int_{t_{2}}^{x} dt_{3} \right] dt_{2} \right\} dt_{1} \\ &= \int_{0}^{x} \left\{ \int_{t_{1}}^{x} f(t_{1}) \left(x - t_{2} \right) dt_{2} \right\} dt_{1} = \int_{0}^{x} f(t_{1}) \left\{ \int_{t_{1}}^{x} \left(x - t_{2} \right) dt_{2} \right\} dt_{1} \\ &= \int_{0}^{x} f(t_{1}) \left[\frac{\left(x - t_{2} \right)^{2}}{-2} \right]_{t_{1}}^{x} dt_{1} = \int_{0}^{x} f(t_{1}) \frac{\left(x - t_{1} \right)^{2}}{2} dt_{1} \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{x} f(t) \left(x - t \right)^{2} dt. \end{split}$$

Considerando los aportes de Cauchy, se puede intercambiar $n \in \mathbb{N}$ por un número $\alpha > 0$ arbitrario, lo cual generaliza el factorial a una función gamma,

$$(I^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$
(2.11)

lo anterior otorga la base de la definición de integral fraccionaria de Riemann-Liouville, la cual define una media ponderada de la función en el dominio [a, x] con sus respectivos pesos determinados por una ley de potencias.

Definición 2.6. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville (R-L)

Sea f una función continua a trozos y localmente integrable en el intervalo (a, ∞) y sea $\Re(\alpha) > 0$ (parte real de α), entonces se define la integral fraccionaria de orden α como ${}_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)$, siendo los subíndices los límites de integración (desde a hasta x o de x a b):

- Integral por la derecha de R-L

$$({}_{a}I_{x}^{\alpha}f)(x) = ({}_{a}D_{x}^{-\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x > a.$$
(2.12)

– Integral por la izquierda de R-L

$$({}_{x}I_{b}^{\alpha}f)(x) = ({}_{x}D_{b}^{-\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b} (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x < b.$$
(2.13)

Proposición 2.7. Ley exponentes o de semi-grupo

Si f es continua en (a, b) y $\alpha, \beta > 0$ entonces:

$${}_{a}I_{x}^{\alpha}({}_{a}I_{x}^{\beta}f)(x) = ({}_{a}I_{x}^{\alpha+\beta}f)(x) = {}_{a}I_{x}^{\beta}({}_{a}I_{x}^{\alpha}f)(x)$$
(2.14)

Demostración. basada en [39]

$$\begin{split} I_x^{\alpha} \left[I_x^{\beta} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} I^{\beta} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\tau (\tau-\varepsilon)^{\beta-1} f(\tau,\varepsilon) d\varepsilon \right] d\tau, \end{split}$$

Aplicando la fórmula de Dirichlet, para f continua en un intervalo [0, x]

$$\begin{split} \int_{0}^{t} (t-\varepsilon)^{u-1} \left[\int_{0}^{\varepsilon} (\varepsilon-x)^{v-1} f(\varepsilon,x) dx \right] d\varepsilon &= \int_{0}^{t} dx \int_{x}^{t} (t-\varepsilon)^{u-1} (\varepsilon-x)^{v-1} f(\varepsilon,x) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} d\varepsilon \int_{\varepsilon}^{x} (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\varepsilon)^{\beta-1} f(\tau,\varepsilon) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} f(\varepsilon) d\varepsilon \int_{\varepsilon}^{x} (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\varepsilon)^{\beta-1} d\tau, \end{split}$$

haciendo el cambio de variable $g(\tau) = (\tau - \varepsilon)^{\beta - 1}$ e integrando con respecto a τ se tiene:

$$I_x^{\alpha} \left[I_x^{\beta} f(x) \right] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x f(\varepsilon) \left[_{\varepsilon} I_x^{\alpha} g(\tau) \right] d\varepsilon,$$

per
o $_{\varepsilon}I_{x}^{\alpha}g(\tau),$ puede verse como la derivada de orde
n $-\alpha$ de una función.

$${}_{\varepsilon}I_{x}^{\alpha}g(\tau) =_{\varepsilon} D_{x}^{-\alpha}g(\tau) =_{\varepsilon} D_{x}^{-\alpha}(\tau-\varepsilon)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\tau-\varepsilon)^{\alpha+\beta-1},$$

con lo cual finalmente se obtiene:

$$I^{\alpha} \left[I^{\beta} f(x) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_{0}^{x} f(\varepsilon) (\tau - \varepsilon)^{\alpha + \beta - 1} d\varepsilon = I^{\alpha + \beta} f(x)$$

Proposición 2.8. Conmutatividad

Sean $_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)$ y $_{a}I_{x}^{\beta}f(x)$ integrales de R-L, por la proposición anterior se cumple:

$${}_{a}I^{\alpha}_{x}({}_{a}I^{\beta}_{x}f)(x) = {}_{a}I^{\beta}_{x}({}_{a}I^{\alpha}_{x}f)(x)$$
(2.15)

Proposición 2.9. Integral como convolución

Si $_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)$ es la integral fraccionaria de orden α de Riemann-Liouville, entonces puede ser representada por la siguiente convolución

$$(I^{\alpha}f)(t) = (\Phi_{\alpha} * f)(t) \quad \text{donde} \quad \Phi_{\alpha} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$
(2.16)

A continuación se muestra una gráfica de integral fraccionaria expresada como convolución $(\Phi_{\alpha} * 1)(x)$ lo que equivale a la integral de la función f(x) = 1:



Figura 4: Visualización de $I^{\alpha}(1)$, expresada como convolución

La figura 4 muestra la integral fraccionaria de orden α expresada como convolución de núcleo Φ_{α} es calculado para distintos valores de α , son características las gráficas correspondientes a los valores límites del rango de α , ya que para $\alpha = 0$ corresponde a la misma función y en cambio para $\alpha = 1$ su gráfica es la función 0.

Proposición 2.10. Integral de orden 0 corresponde a f(x)

Si f es continua en (a, b) entonces se puede verificar que

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(I^{\alpha} f \right)(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$
(2.17)

Proposición 2.11. Integral fraccionaria de funciones $f \in C_{\mu}$ para $\mu \ge -1$ con $\alpha, \beta \ge 0$ $y \gamma > -1$ se puede verificar que:

$$I_x^{\alpha}(x^{\gamma}) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$
(2.18)

2.3 Derivada Fraccionaria

La derivada de orden fraccionario corresponde a una generalización de las derivadas de orden entero n a un orden arbitrario α que puede ser fraccionario o complejo.

Definición 2.12. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Para funciones $f(x) \in L_1(a, b)$ es decir, continua en (a, b) la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}_+$ se define como: $(D^{\alpha}f)(x) = (D^n I^{n-\alpha}f)(x)$.

Donde $n = \lfloor \Re(\alpha) \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ Con lo anterior, se puede comentar que para calcular la derivada fraccionaria de orden α para una función f(x) en el punto x, necesariamente se debe conocer los valores de la función desde a hasta x, información que es almacenada en el núcleo de la integral de Riemann-Liouville.

- Lado izquierdo de la derivada de R-L

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}f(x) = D^{n}\left[{}_{a}I_{x}^{n-\alpha}f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt,$$
 (2.19)

– Lado derecho de la derivada de R-L

$${}_{x}D^{\alpha}_{b}f(x) = D^{n}\left[{}_{x}I^{n-\alpha}_{b}f(x)\right] = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{x}^{b}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt,$$
 (2.20)

A continuación se visualiza la diferencia entre lado izquierdo y lado derecho de la derivada de R-L



(a) Derivada derecha RL

(b) Derivada izquierda RL

Figura 5: Comparación entre la definición de derivada por derecha e izquierda de RL

La figura 5 se compara la definición de la derivada de RL por derecha e izquierda de la función constante f(x) = 1, para valores de $\alpha \in [0, 1]$. Se puede ver que en ambos casos la derivada entera $\alpha = 0$ corresponde a la función, y la primera derivada de la función $\alpha = 1$ es cero, ya que la función es constante.

Proposición 2.13.

El operador de derivación fraccionaria de R-L es el inverso izquierdo del operador de integración fraccionaria de R-L

$${}_aD^{\alpha}_x\left({}_aI^{\alpha}_xf(x)\right) = f(x). \tag{2.21}$$

Demostraci'on.

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}\left({}_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)\right) = {}_{a}D_{x}^{\alpha}\left({}_{a}D_{x}^{-\alpha}f(x)\right) = \frac{d^{n}}{dx^{n}}\left\{{}_{a}D_{x}^{-(n-\alpha)}\left({}_{a}D_{x}^{-\alpha}f(x)\right)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$= \frac{d^{n}}{dx^{n}}\left\{{}_{a}D_{x}^{-\alpha}\right\} = f(x).$$

Nota 2.14. El operador de R-L no es el inverso derecho de la integral fraccionaria de R-L

$${}_{a}I_{x}^{\alpha}\left({}_{a}D_{x}^{\alpha}f(x)\right) = f(x) - \sum_{j=1}^{k} {}_{a}D_{x}^{\alpha-j}f(a)\frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma\left(\alpha-j+1\right)}.$$
(2.22)

Proposición 2.15.

Derivada fraccionaria de R-L de una Integral fraccionaria de R-L

$${}_{a}D_{x}^{\beta}\left({}_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)\right) = {}_{a}I_{x}^{\alpha-\beta}f(x) \quad , \quad \alpha \ge \beta,$$

$$(2.23)$$

$${}_{a}D_{x}^{\beta}\left({}_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)\right) = {}_{a}D_{x}^{\beta-\alpha}f(x) \quad , \quad \alpha \leq \beta.$$

$$(2.24)$$

Proposición 2.16.

Donde I es el operador de identidad.

$${}_{a}D^{0}_{x}f(x) \equiv If(x) = f(x).$$
 (2.25)

Proposición 2.17.

La derivada entera de una derivada de R-L

$${}_{a}D^{n}_{x}\left({}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x)\right) = {}_{a}D^{n+\alpha}_{x}f(x).$$
(2.26)

Proposición 2.18.

La derivada de R-L de una derivada entera

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}\left({}_{a}D_{x}^{n}f(x)\right) = {}_{a}D_{x}^{\alpha+n}f(x) - \sum_{j=1}^{k}D^{n-j}f(a)\frac{(x-a)^{-(j+\alpha)}}{\Gamma(1-j-\alpha)}.$$
(2.27)

Proposición 2.19. Linealidad

El operador diferencial de R-L es un operador lineal para $p \ge q$ constantes arbitrarias

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}\left[pf(x) + qg(x)\right] = p_{a}D_{x}^{\alpha}f(x) + q_{a}D_{x}^{\alpha}g(x).$$
(2.28)

Proposición 2.20. Regla de Leibniz

Se puede interpretar como la derivada fraccionaria del producto de dos funciones, donde $\binom{\alpha}{m} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)}$ son los coeficientes binomiales

$$D_x^{\alpha}\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} \left[D_x^m f(x)\right] \left[D_x^{\alpha-m}g(x)\right].$$
(2.29)

Proposición 2.21. Regla del cuociente

Corresponde a una generalización del resultado anterior de la forma

$$D_x^{\alpha} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} {\alpha \choose m} \left[D_x^m f(x) \right] \left[D_x^{\alpha-m} (g(x))^{-1} \right].$$
(2.30)

Nota 2.22. Cabe destacar que el operador de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville no cumple en general la propiedad de semi-grupo pues:

$$\left({}_{a}D_{x}^{\alpha}\left({}_{a}D_{x}^{\beta}f\right)\right)(x) = {}_{a}D_{x}^{\alpha+\beta} - \sum_{j=1}^{m} \left({}_{a}D_{x}^{\beta-j}f\right)(a)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}.$$
(2.31)

En la siguiente figura se puede visualizar que la derivada de R-L no cumple la propiedad de semi-grupo:



Figura 6: Derivada fraccionaria de RL no cumple ley de semi-grupo

Definición 2.23. Derivada fraccionaria de Caputo

Una definición alternativa a la anterior es la derivada fraccionaria de Caputo, la que utiliza las mismas operaciones de la definición de Riemann-Liouville pero invirtiendo el orden de aplicación. Donde $n = \min\{k \in \mathbb{N}/k > \alpha\}$, se denota por ^cD, agregándole el superíndice c para identificar que se trata de la definición de derivada fraccionaria dada por Caputo.

- Lado izquierdo de la derivada ordinaria de Caputo

$${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}\left[D^{n}f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt.$$
(2.32)

- Lado derecho de la derivada ordinaria de Caputo

$${}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}\left[D^{n}f(x)\right] = \frac{\left(-1\right)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{f^{(n)}(t)}{\left(t-x\right)^{\alpha+1-n}}dt.$$
(2.33)

- Lado izquierdo de la derivada parcial de Caputo

$${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x,t) = {}_{a}I_{x}^{n-\alpha}\left[\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}f(x,t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{\frac{\partial^{n}}{\partial z^{n}}f(z,t)}{(x-z)^{\alpha+1-n}}dz.$$
 (2.34)

- Lado derecho de la derivada parcial de Caputo

$${}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}f(x,t) = {}_{x}I_{b}^{n-\alpha}\left[\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}f(x,t)\right] = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{\frac{\partial^{n}}{\partial z^{n}}f(z,t)}{(z-x)^{\alpha+1-n}}dz.$$
 (2.35)

Proposición 2.24. Equivalencia con derivada ordinaria

En el caso particular, cuando para la derivada de Caputo $\alpha = n \operatorname{con} n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$${}_{a}^{C}D_{x}^{n}f(x,t) = \frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}f(x,t).$$
(2.36)

Proposición 2.25. Derivada de una constante

Esta propiedad evidencia que el valor de la derivada fraccionaria de Caputo, calculado para una constante k, es cero

$${}^{c}_{a}D^{\alpha}_{x}(k) = 0.$$
 (2.37)

Proposición 2.26. Relación entre derivada de Riemann-Liouville y Caputo

La siguiente identidad, es cierta cuando se cumplen las condiciones adecuadas para f(x); por ejemplo, es suficiente que $\forall x \in [a, b], f(x)$ sea n - 1 veces derivable $(n = [\Re(\alpha)] + 1)$, con derivada continua en [a, b], y que $f^{(n)}(x)$ sea integrable en [a, b].

$${}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}f(x) = {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x) + \sum_{j=0}^{n-1}f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)}.$$
(2.38)

Para funciones derivables hasta orden n-1 en a y para las que exista $a^{RL}_{a}D_{x}^{\alpha}f(x)$ se puede presentar una nueva definición de derivada fraccionaria de Caputo:

$${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x) = {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^{j}}{j!}\right].$$
(2.39)

A continuación se muestra la diferencia entre el cálculo de la derivada fraccionaria de Riemann Liouville y Caputo, para un $\alpha = 0.1$, 0.5 de una función polinomial g(x) = (1-x)(2-x)

* Derivada $\alpha=0,1$ de Riemann - Liouville:

$$D^{1}\left[{}_{a}I^{0,1}_{x}g(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-0,1)} \frac{d^{1}}{dx^{1}} \int_{0}^{x} \frac{2-3t+t^{2}}{(x-t)^{0,1}} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} \frac{d^{1}}{dx^{1}} \left[\int_{0}^{x} \frac{2}{(x-t)^{0,1}} dt - \int_{0}^{x} \frac{3t}{(x-t)^{0,1}} dt + \int_{0}^{x} \frac{t^{2}}{(x-t)^{0,1}} dt \right],$$

realizando el siguiente cambio de variable u = x - t, lo cual modifica los límites de integración $t = 0 \rightarrow u = x$ y $t = x \rightarrow u = 0$

$$\begin{aligned} D^{1}\left[{}_{a}I^{0,1}_{x}g(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\frac{d^{1}}{dx^{1}}\left[\int_{0}^{x}\frac{2}{u^{0,1}}du - \int_{0}^{x}\frac{3(x-u)}{u^{0,1}}du + \int_{0}^{x}\frac{(x-u)^{2}}{(u)^{0,1}}du\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\frac{d^{1}}{dx^{1}}\left[\left(\frac{20}{9}x^{0,9}\right) - \left(\frac{100}{57}x^{1,9}\right) + \left(\frac{2000}{4959}x^{2,9}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\left(2x^{-0,1} - \frac{10}{3}x^{0,9} + \frac{200}{171}x^{1,9}\right).\end{aligned}$$

*Derivada $\alpha = 0, 1$ de un polinomio: Mediante la generalización de la fórmula de derivación de un polinomio $f(x) = x^m$ se obtiene: $\frac{d^{\alpha}(x^m)}{dx^{\alpha}} = \frac{m!}{\Gamma(m+1-\alpha)}x^{m-\alpha}$,

$$\begin{split} {}_{a}D_{x}^{0,1}g(x) &= {}_{a}D_{x}^{0,1}\left(2-3x+x^{2}\right) \\ &= {}_{a}D_{x}^{0,1}\left(2\right)-{}_{a}D_{x}^{0,1}\left(3x\right)+{}_{a}D_{x}^{0,1}\left(x^{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{0!}{\Gamma(0+1-0,1)}x^{-0,1}\right)-3\left(\frac{1!}{\Gamma(1+1-0,1)}x^{0,9}\right)+\left(\frac{2!}{\Gamma(2+1-0,1)}x^{1,9}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^{-0,1}}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\right)-3\left(\frac{x^{0,9}}{\Gamma\left(\frac{19}{10}\right)}\right)+\left(\frac{2x^{1,9}}{\Gamma\left(\frac{29}{10}\right)}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^{-0,1}}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\right)-3\left(\frac{x^{0,9}}{\frac{9}{10}\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\right)+\left(\frac{2x^{1,9}}{\frac{19}{10}\left(\frac{9}{10}\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)\right)}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}\left(2x^{-0,1}-\frac{10}{3}x^{0,9}+\frac{200}{171}x^{1,9}\right). \end{split}$$

*Derivada $\alpha = 0, 1$ de Caputo:

realizando el mismo cambio de variable anterior u=x-t,lo cual modifica los límites de integración $t=0 \to u=x$ y $t=x \to u=0$

$${}_{a}^{C}D_{x}^{0,1}g(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} \left[\int_{0}^{x} \frac{-3}{u^{0,1}} du + \int_{0}^{x} \frac{2(x-u)}{u^{0,1}} du \right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} \left(-\frac{10}{3}x^{0,9} + \frac{200}{171}x^{1,9} \right).$$

*Derivada $\alpha = 0, 5$ de Riemann - Liouville:

$$D^{1}\left[{}_{a}I^{0,5}_{x}g(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-0,5)} \frac{d^{1}}{dx^{1}} \int_{0}^{x} \frac{2-3t+t^{2}}{(x-t)^{0,5}} dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d^{1}}{dx^{1}} \left[\int_{0}^{x} \frac{2}{(x-t)^{0,5}} dt - \int_{0}^{x} \frac{3t}{(x-t)^{0,5}} dt + \int_{0}^{x} \frac{t^{2}}{(x-t)^{0,5}} dt \right],$$

realizando el siguiente cambio de variable u=x-t,lo cual modifica los límites de integración $t=0 \to u=x$ y $t=x \to u=0$

$$D^{1}\left[{}_{a}I^{0,5}_{x}g(x)\right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d^{1}}{dx^{1}}\left[\int_{0}^{x}\frac{2}{u^{0,5}}du - \int_{0}^{x}\frac{3(x-u)}{u^{0,5}}du + \int_{0}^{x}\frac{(x-u)^{2}}{(u)^{0,5}}du\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d^{1}}{dx^{1}}\left[\left(4x^{0,5}\right) - \left(4x^{1,5}\right) + \left(\frac{16}{15}x^{2,5}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(2x^{-0,5} - 6x^{0,5} + \frac{8}{3}x^{1,5}\right).$$

*Derivada $\alpha = 0, 5$ de un polinomio mediante la generalización de la fórmula de derivación de un polinomio $f(x) = x^m$ se obtiene: $\frac{d^{\alpha}(x^m)}{dx^{\alpha}} = \frac{m!}{\Gamma(m+1-\alpha)}x^{m-\alpha}$

$$\begin{split} {}_{a}D_{x}^{0,5}g(x) &= {}_{a}D_{x}^{0,5}\left(2-3x+x^{2}\right) \\ &= {}_{a}D_{x}^{0,5}\left(2\right)-{}_{a}D_{x}^{0,5}\left(3x\right)+{}_{a}D_{x}^{0,5}\left(x^{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{0!}{\Gamma(0+1-0,5)}x^{-0,5}\right)-3\left(\frac{1!}{\Gamma(1+1-0,5)}x^{0,5}\right)+\left(\frac{2!}{\Gamma(2+1-0,5)}x^{1,5}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^{-0,5}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)-3\left(\frac{x^{0,5}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right)+\left(\frac{2x^{1,5}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^{-0,5}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)-3\left(\frac{x^{0,5}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)+\left(\frac{2x^{1,5}}{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(2x^{-0,5}-6x^{0,5}+\frac{8}{3}x^{1,5}\right). \end{split}$$

*Derivada $\alpha = 0, 5$ de Caputo:

$$\begin{split} {}_{a}^{C}D_{x}^{0,5}g(x) &= I^{0,5}\left[D^{1}g(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-0,5)} \int_{0}^{x} \frac{(2-3t+t^{2})}{(x-t)^{0,5}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{x} \frac{(-3+2t)}{(x-t)^{0,5}} dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\int_{0}^{x} \frac{-3}{(x-t)^{0,5}} dt + \int_{0}^{x} \frac{2t}{(x-t)^{0,5}} dt \right], \end{split}$$

realizando el mismo cambio de variable anterior u = x - t, lo cual modifica los límites de integración $t = 0 \rightarrow u = x$ y $t = x \rightarrow u = 0$

$${}_{a}^{C}D_{x}^{0,5}g(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\int_{0}^{x} \frac{-3}{u^{0,5}} du + \int_{0}^{x} \frac{2(x-u)}{u^{0,5}} du \right] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(-6x^{0,5} + \frac{8}{3}x^{1,5} \right)$$

A continuación se evidencia visualmente esta diferencia entre la derivada de Caputo y de Riemann-Liouville



Figura 7: Comparación entre la definición de derivada fraccionaria de RL y C

No hace falta mostrar la diferencia notable entre las definiciones de Riemann-Liouville y de Caputo. Para la definición de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de una constante es distinta de cero, mientras que para Caputo el resultado es cero, l cual se puede evidenciar en la figura 7.

Definición 2.27. Forma discreta de la derivada fraccionaria de Caputo

La forma discreta de la derivada fraccionaria de Caputo (2.32) se trabajará en un dominio temporal de $t \in [a, t]$, se empleará la notación $t_k = k\Delta t \operatorname{con} k = 0, 1, 2, \dots \operatorname{con} t_0 = a, t_k = t$ particionando el intervalo en k nodos de tamaño Δt , de modo que $t_0 < t_1 < \dots < t_k$. Los

valores solución u(x,t) en la malla estarán dados por $u(x_j,t_k) \equiv u_j^k \simeq U_j^k$, donde U_j^k corresponde a una estimación numérica de $u(x_j,t_k)$ en el punto (x_j,t_k) .

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left[u(x,t)\right] = I^{n-\alpha}\left[D^{n}u(x,t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{u^{(n)}(x,z)}{(t-z)^{\alpha+1-n}}dz,$$

se considerará un $0<\alpha\leq 1,$ para lo cual $n=[\Re(\alpha)]+1=1$

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left[u(x,t)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{\partial u(x,z)}{\partial z}\frac{dz}{(t-z)^{\alpha}},$$

a continuación expresando la integral como notación de suma de Riemann y realizando el cambio de variable $z = \varepsilon$ se obtiene:

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}\left[u(x,t)\right] \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{k} \int_{t_{m}}^{t_{m+1}} \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{(t-\varepsilon)^{\alpha}} \\ \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{U(x_{j},t_{k+1}) - U(x_{j},t_{k})}{\Delta t}\right) \int_{t_{m}}^{t_{m+1}} \frac{d\varepsilon}{(t_{k+1}-\varepsilon)^{\alpha}},$$

luego realizando el siguiente cambio de variable $B=t_{k+1}-\varepsilon$ se llega a:

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left[u(x,t)\right] \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{U_{j}^{k+1}-U_{j}^{k}}{t_{1}}\right)\int_{t_{k-m}}^{t_{k-m+1}}\frac{dB}{B^{\alpha}},$$

realizando integración por sustitución y cambiando la numeración k = k - m se obtiene:

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t}\left[u(x,t)\right] \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{U^{k-m+1}_{j} - U^{k-m}_{j}}{t_{1}}\right) \frac{B^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{t_{m}}^{t_{m+1}}$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{U^{k-m+1}_{j} - U^{k-m}_{j}}{t_{1}}\right) \left(\frac{(t_{m+1})^{1-\alpha} - (t_{m})^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

finalmente recordando que $t_m = m\Delta t$ y ocupando la propiedad de la función gamma (2.3)

$$\begin{split} {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left[u(x,t)\right] &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{U_{j}^{k-m+1}-U_{j}^{k-m}}{\Delta t}\right)\left(\frac{\left((m+1)\Delta t\right)^{1-\alpha}-\left(m\Delta t\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right) \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{U_{j}^{k-m+1}-U_{j}^{k-m}}{\Delta t}\right)\left(\frac{\Delta t^{1-\alpha}\left((m+1)^{1-\alpha}-m^{1-\alpha}\right)}{1-\alpha}\right) \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{m=0}^{k}\left(\frac{U_{j}^{k-m+1}-U_{j}^{k-m}}{\Delta t}\right)\left(\frac{(m+1)^{1-\alpha}-m^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Delta t^{\alpha-1}}\right) \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{m=0}^{k}\left(U_{j}^{k-m+1}-U_{j}^{k-m}\right)\left[\frac{b}{(\Delta t)^{\alpha}}\right] \end{split}$$

Donde $b = (m+1)^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}$

Definición 2.28. Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

La definición de derivada fraccionaria planteada por Grünwald-Letnikov (G-L), fue introducida por Anton Karl Grünwald en 1867 y un año después por Aleksey Vasilievich Letnikov y surge a partir de la generalización de la fórmula de derivada de orden $n \in N$, para un α no entero.

$$D^{1}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
(2.40)

$$D^{n}f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{m=0}^{n} (-1)^{m} \binom{n}{m} f(x - mh)}{h^{n}}$$
(2.41)

Donde $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, si se sustituye n por $\alpha > 0$ y generalizando el factorial mediante la función gama $\Gamma(z+1) = z!$, se obtiene la derivada de G-L de orden $\alpha \in \mathbb{R}$:

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^{j} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)} f(x-jh)$$

- Lado izquierdo de la derivada de G-L

$${}_{a}D_{x}^{\alpha}f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^{j} \binom{\alpha}{j} f(x-jh)$$
(2.42)

- Lado derecho de la derivada de G-L

$${}_{x}D_{b}^{\alpha}f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} (-1)^{j} {\alpha \choose j} f(x+jh)$$
(2.43)

Para $\alpha > 0$ el operador de derivada definido según Grünwald, es un operador no local que depende de valores lejanos de x, la importancia de f(x) en cada punto (x - jh) está dada por los pesos $g_{\alpha,j} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$, donde los coeficientes binomiales están dados por $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)}$.

La definición de Grünwald-Letnikov, se utiliza para una implementación discreta de la derivada fraccionaria, siendo la base para resolver la ecuación de difusión anómala en muchos códigos numéricos [38].

A continuación se muestra la gráfica de la derivada de G-L aplicada a distintas funciones:



Figura 8: Derivada fraccionaria de G-L de distintas funciones.

Definición 2.29. Forma discreta de la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

En este apartado se verá la forma discreta de la derivada fraccionaria según Grünwald-Letnikov, se trabajará en un dominio temporal de $t \in [a, t]$, se empleará la notación $t_k = k\Delta t \operatorname{con} k = 0, 1, 2, ... t_0 = a, t_k = t$ particionando el intervalo en k nodos de tamaño Δt , de modo que $t_0 < t_1 < ... < t_k$. Los valores solución u(x, t) en la malla estarán dados por $u(x_j, t_k) \equiv u_j^k \simeq U_j^k$, donde U_j^k corresponde a una estimación numérica

de $u(x_j, t_k)$ en el punto (x_j, t_k) .

$${}_{a}D_{t}^{\alpha}\left(u(x,t)\right) = \lim_{h \to 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} (-1)^{m} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} u(x,t-mh)$$

$$\approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{i+1} g_{k}^{(\alpha)} u_{j}^{m-k+1} + O(h),$$

donde los pesos $g_k^{(\alpha)}$ de la función están dados por la siguiente relación de recurrencia $g_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ donde destaca el primer término $g_0^{(\alpha)} = 1$.

Proposición 2.30. Se establece que los pesos que acompañan a los términos de la derivada fraccionaria según GL se pueden calcular por

$$g_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)}$$

A continuación se expone una tabla con pesos $g_k^{(\alpha)}$ que acompañan a los términos de la derivada de GL. 1

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
$\alpha = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha=0,25$	1	-0,25	-0,0938	-0,0547	-0,0376	-0,0282	-0,0223	-0,0183	-0,0155	-0,0133
$\alpha=0,5$	1	-0,5	-0,125	-0,0625	-0,0391	-0,0273	-0,0205	-0,0161	-0,0131	-0,0109
$\alpha=0,75$	1	-0,75	-0,0938	-0,0391	-0,0220	-0,0143	-0,0101	-0,0076	-0,0059	-0,0048
$\alpha = 1$	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha = 1,25$	1	-1,25	$0,\!1562$	0,0391	0,0171	0,0094	0,0059	0,0040	0,0029	0,0021
$\alpha = 1, 5$	1	-1,5	$0,\!375$	0,0625	0,0234	0,0117	0,0068	0,0044	0,0030	0,0022
$\alpha = 1,75$	1	-1,75	$0,\!6562$	$0,\!0547$	0,0171	0,0077	0,0042	0,0025	0,0017	0,0012
$\alpha = 2$	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0

Cuadro 1: Ponderaciones (pesos) de los términos de la derivada de GL

Se puede ver que los pesos que acompañan a los términos de la derivada de GL coinciden para la derivada de orden $\alpha = 0, 1, 2$ en su versión discreta empleando el método de diferencias finitas, del mismo modo si se mira la segunda columna de la tabla, se puede apreciar que tiene la regularidad de ir aumentando en su valor absoluto en la razón de 0,25 , lo que no ocurre con las demás, ya que pareciera que los pesos comprendidos $0 \le \alpha \le 1$ son negativos y a medida k aumenta los valores de g_k se acercan a 0 por la izquierda, mientras que si $1 \le \alpha \le 2$, conforme el crecimiento de k los valores de g_k tienden a 0 por la derecha (salvo la segunda columna).

¹El código empleado para el cálculo de los pesos de la derivada de GL se encuentra en el apéndice

3 Métodos empleados en la resolución de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

3.1 Método de Descompocisión de Adomian (AD)

Un método empleado para la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales, es uno que deriva del Análisis Homotópico [24]. En este apartado se expondrá el método de descomposición de Adomian, el cual es usado para introducir algunos métodos iterativos, con la particularidad de que esta técnica no cambia la naturaleza del problema, en particular no efectúa ninguna linealización ni discretización.

Esta técnica consiste en buscar la solución de una ecuación diferencial en forma de serie y en la descomposición de un operador lineal en serie en donde los términos se calculan de forma recurrente utilizando los polinomios de Adomian, de esta manera la solución está dada por una serie, en la que cada término se obtiene sin dificultad puesto que los polinomios de Adomian se adaptan a la no linealidad, permitiendo así resolver una gama de ecuaciones lineales y no lineales (algebraicas, diferenciales, integrales, en derivadas parciales, ..., etc) [24]. Bajo ciertas condiciones de convergencia, la serie dará la solución exacta, pero en general esta se truncará para dar una buena aproximación.

El método de descomposición requiere que la ecuación diferencial fraccional sea expresada en términos de operadores de tipo diferencial:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + a_0(x)u + a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots + a_n(x)\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = q(x,t)$$
$$D_t^{\alpha} u + a_0(x)u + a_1(x)L_{1x}u + a_2(x)L_{2x}u + \dots + a_n(x)L_{nx}u = q(x,t),$$

donde

$$L_{1x}u = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \qquad L_{2x}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \qquad L_{nx}u = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \qquad \qquad ^C D_t^{\alpha}u = \frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}.$$

Aplicando I^{α} el cual es el inverso de $^{C}D_{t}^{\alpha}u$ se obtiene:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0^+) \frac{t^k}{k!} - I^{\alpha} \left[a_0(x)u + a_1(x)L_{1x}u + \dots + a_n(x)L_{nx}u - q(x,t) \right],$$
(3.1)

Luego suponiendo una solución en serie de u(x,t) dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t),$$
 (3.2)

donde los componentes $u_n(x,t)$ se determinarán de forma recursiva, posteriormente sustituyendo (3.2) en ambos lados de (3.1) se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0^+) \frac{t^k}{k!} - I_t^{\alpha} \left[\sum_{i=0}^n a_i(x) L_{ix} \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right] - q(x,t) \right].$$

Siguiendo el método de descomposición, se introducen las relaciones recursivas:

$$u_0(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x,0^+) \frac{t^k}{k!} + I_t^{\alpha} \left[q(x,t) \right]$$
(3.3)

$$u_{j+1}(x,t) = -I_t^{\alpha} \left[\sum_{i=0}^n a_i(x) L_{ix} \left[\sum_{n=0}^\infty u_n(x,t) \right] \right], \qquad (3.4)$$

donde el valor del número $m \in \mathbb{N}$ natural depende del valor del orden de la derivada fraccional α , siendo:

$$m = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha \le 1\\ 2, & 1 < \alpha \le 2 \end{cases}$$

Nota 3.1. Vale la pena señalar que el primer componente de la serie u_0 se definió con anterioridad y los componentes restantes u_j para $j \ge 1$, se puede determinar de manera recursiva, es decir, cada uno de los términos se obtienen mediante el uso de los términos anteriores, de este modo las soluciones de la serie se determinan por completo.

Finalmente, la solución aproximada u(x,t) corresponde a la serie truncada:

$$\phi_N(x,t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j(x,t) \qquad \lim_{N \to \infty} \phi_N(x,t) = u(x,t).$$

Este método proporciona la solución en la forma de una serie rápidamente convergente que puede conducir a la solución exacta en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales y a una solución numérica eficiente con alta precisión para las ecuaciones no lineales, dicha convergencia ha sido investigada por varios autores como se menciona en [24]. El método de Descomposición de Adomian presenta dificultades adicionales al incluir la condición de contorno en ecuaciones diferenciales fraccionarias, lo cual se puede manejar utilizando el operador diferencial $^{C}D_{t}^{\alpha}$ tiempo fraccional y considerando sólo las condiciones iniciales.

3.2 Método de Iteración Variacional (MIV)

Sea la siguiente ecuación diferencial parcial lineal en tiempo fraccional para $t > 0, x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + a_0(x)u + a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots + a_n(x)\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = q(x,t),$$
(3.5)

La corrección funcional para la ecuación anterior puede expresarse aproximadamente, según lo mencionado en [24]:

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi) (\frac{\partial^m}{\partial \xi^m} u_k(x,t) + a_0(x) \tilde{u}_k(x,\xi) + \dots + a_n(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \tilde{u}_k(x,\xi) - q(x,\xi)) d\xi,$$

donde el valor del número $m \in \mathbb{N}$ depende del valor del orden de la derivada fraccional α , siendo:

$$m = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha \le 1\\ 2, & 1 < \alpha \le 2. \end{cases}$$

Por otra parte los multiplicadores de Lagrange son establecidos, según el valor de m

$$\lambda = -1$$
, para $m = 1$
 $\lambda = -(\tau - t)$, para $m = 2$.

En el caso de m = 1 se obtiene la fórmula de iteración:

$$u_0(x,t) = f(x)$$

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - \int_0^t (\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} u_k(x,\tau) + a_0(x) u_k(x,\tau) + \dots$$

$$+ a_n(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} u_k(x,\tau) - q(x,\tau)) d\tau$$
(3.6)

mientras que para m = 2 se obtiene la fórmula de iteración:

$$u_0(x,t) = f(x) + tg(x)$$

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t (\tau - t)(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}}u_k(x,\tau) + a_0(x)u_k(x,\tau) + \dots$$

$$+ a_n(x)\frac{\partial^n}{\partial x^n}u_k(x,\tau) - q(x,\tau))d\tau,$$
(3.7)

De este modo la solución u(x,t) estará dada por cada iteración por $u_k(x,t)$, a medida que más iteraciones se realicen más próxima estará la solución $u_k(x,t)$ a u(x,t).

3.3 Resolución de ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias

A continuación se expondrán dos ejemplos tomados de [24] los que se resolverán mediante Descomposición de Adomian y el Método de Iteración Variacional, explicando el desarrollo con detalle a diferencia de la referencia, donde cada uno de los términos de la serie y las iteraciones son calculadas con el software computacional MATHEMATICA.

Ejemplo 3.2. Resolver la siguiente ecuación diferencial fraccionaria no lineal con $0 < \alpha \leq 1$:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} = 2t + 2x^{2} + 2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$u(x, 0) = x^{2}$$

– Resolución mediante Método de Descomposición de Adomian:

Se obtiene el primer término de la serie, empleando la condición inicial:

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= \left[\frac{\partial^0 u}{\partial t^0}(x,0)\right] \frac{t^0}{0!} + I_t^{\alpha} \left[2t + 2x^2 + 2\right] \\ &= u(x,0) + I_t^{\alpha} \left[2t\right] + I^{\alpha} \left[2x^2\right] + I_t^{\alpha} \left[2\right] \\ &= x^2 + 2\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha+1}\right] + \left(2x^2 + 2\right)\left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}\right] \\ &= x^2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha+1} + \frac{(2x^2+2)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}, \end{aligned}$$

por recurrencia se determinan los términos siguientes:

$$u_{j+1}(x,t) = -I_t^{\alpha} \left[x L_{1x} u_j(x,t) + L_{2x} u_j(x,t) \right], \qquad j \ge 0.$$

por ejemplo, para el segundo y tercer término se obtiene:

$$\begin{split} u_1(x,t) &= -I_t^{\alpha} \left[x \frac{\partial}{\partial x} (u_0(x,t)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0(x,t)) \right] \\ &= -I_t^{\alpha} \left[x \left(2x + \frac{4xt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) + \left(2 + \frac{4t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right] \\ &= -I_t^{\alpha} \left[2x^2 + \frac{4x^2t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + 2 + \frac{4t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \\ &= -(2x^2+2) I_t^{\alpha} (t^{\alpha}) - \left(\frac{4x^2+4}{\Gamma(\alpha+1)} \right) I_t^{\alpha} (t^{2\alpha}) \\ &= -(2x^2+2) \left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} \right] - \left(\frac{4x^2+4}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} \right] \\ &= -\frac{(2x^2+2)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} - \frac{(4x^2+4)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} \\ u_2(x,t) &= -I_t^{\alpha} \left[x \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1(x,t)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_1(x,t)) \right] \\ &= -I_t^{\alpha} \left[x \left(-\frac{4xt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{8xt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) + \left(-\frac{4t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{8t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right] \\ &= I_t^{\alpha} \left[\frac{4x^2t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{8x^2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{4t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{8t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right] \\ &= \frac{(4x^2+4)}{\Gamma(\alpha+1)} I_t^{\alpha} (t^{\alpha}) + \frac{(8x^2+8)}{\Gamma(2\alpha+1)} I_t^{\alpha} (t^{2\alpha}) \\ &= \frac{(4x^2+4)}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} \right] + \frac{(8x^2+8)}{\Gamma(2\alpha+1)} \left[\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} \right] \\ &= \frac{(4x^2+4)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \frac{(8x^2+8)}{\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha}. \end{split}$$

Se puede observar que al realizar la suma de los términos de la serie, se cancelan todos los términos salvo los dos primeros quedando finalmente:

$$u(x,t) = x^{2} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha+1}$$

– Resolución mediante Método de Iteración Variacional:

Ya que $0 < \alpha \leq 1$ se pueden fijar los siguientes parámetros con anticipación m = 1 y $\lambda = -1$, con lo cual la derivada de Caputo se puede descomponer como $I_{\tau}^{1-\alpha}(D_{\tau}^{1}(f(\tau)))$. De este modo la solución sigue la forma de (3.6):

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha u_k(x,\tau)}{\partial \tau^\alpha} + x \frac{\partial u_k(x,\tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_k(x,\tau)}{\partial x^2} - 2t - 2x^2 - 2 \right] d\tau,$$

llevando a cabo las tres primeras iteraciones se obtiene: *primera iteración:

$$u_{1}(x,t) = x^{2} - \int_{0}^{t} \left[\frac{\partial^{\alpha} (x^{2})}{\partial \tau^{\alpha}} + x \frac{\partial (x^{2})}{\partial x} + \frac{\partial^{2} (x^{2})}{\partial x^{2}} - 2\tau - 2x^{2} - 2 \right] d\tau$$

= $x^{2} - \int_{0}^{t} (x \cdot x + 2 - 2\tau - 2x^{2} - 2) d\tau = x^{2} - \int_{0}^{t} (-2\tau) d\tau = x^{2} + t^{2}$

*segunda iteración:

$$\begin{split} u_2(x,t) &= x^2 + t^2 - \int_0^t \left[\frac{\partial^{\alpha} \left(x^2 + \tau^2 \right)}{\partial \tau^{\alpha}} + x \frac{\partial (x^2 + \tau^2)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (x^2 + \tau^2)}{\partial x^2} - 2\tau - 2x^2 - 2 \right] d\tau \\ &= x^2 + t^2 - \int_0^t \left[I_{\tau}^{1-\alpha} \left(D_{\tau}^1 \left(x^2 + \tau^2 \right) \right) + x \frac{\partial (x^2 + \tau^2)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (x^2 + \tau^2)}{\partial x^2} - 2\tau - 2x^2 - 2 \right] d\tau \\ &= x^2 + t^2 - \int_0^t \left[I_{\tau}^{1-\alpha} \left(2\tau \right) + x \left(2x \right) + 2 - 2\tau - 2x^2 - 2 \right] d\tau \\ &= x^2 + t^2 - \int_0^t \left[\frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - 2\tau \right] d\tau \\ &= x^2 + t^2 - \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + t^2 = x^2 + 2t^2 - \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \end{split}$$

*tercera iteración

$$u_3(x,t) = x^2 + 3t^2 + \frac{2t^{4-2\alpha}}{\Gamma(5-2\alpha)} - \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}.$$

A continuación se presentarán 4 imágenes de la visualización de la solución de u(x,t) correspondiente a la ecuación (3.2) según los dos métodos descritos con anticipación.



Figura 9: Comparación de la solución de la ecuación (3.2)

La figura 9 muestra la comparación de soluciones según el Método de Descomposición de Adomian (-) y el Método de Iteración Variacional (+) para distintos valores de $\alpha = [0.25, 0.5, 0.75, 1]$, cada una de estas soluciones se obtienen considerando $x \in [0, 1]$ para 5 instancias de tiempo t=[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1], se puede apreciar que las curvas de las aproximaciones se ajustan mejor a medida que α se acerca al valor 1. **Ejemplo 3.3.** Resolver la siguiente ecuación diferencial fraccional no lineal, con $1 < \alpha \leq 2$:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(x,0) = x, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^2$$
(3.8)

- Resolución mediante Descomposición de Adomian:

Se determinará el primer término de la serie:

$$u_0(x,t) = \left[\frac{\partial^0 u}{\partial t^0}(x,0)\right] \frac{t^0}{0!} + \left[\frac{\partial^1 u}{\partial t^1}(x,0)\right] \frac{t^1}{1!} = u(x,0) + \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right] \cdot t = x + x^2 t,$$

empleando $u_0(x,t)$ se obtendrán los siguientes términos:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2} I_t^{\alpha} \left[x^2 L_{2x} u_0(x,t) \right].$$

Para aplicar el carácter recursivo, se debe considerar la fórmula de integración fraccionaria del polinomio (2.18), y tener el cuenta que se integra con respecto a la variable t.

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2} I_t^{\alpha} \left[x^2 \frac{\partial^2 \left(x + x^2 t \right)}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{2} I_t^{\alpha} \left[x^2 \left(2t \right) \right] = x^2 I_t^{\alpha} \left[t \right]$$
$$= x^2 \left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \right] = \frac{x^2}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1}.$$

De la misma manera se obtiene el segundo término:

$$u_{2}(x,t) = \frac{1}{2} I_{t}^{\alpha} \left[x^{2} L_{2x} u_{1}(x,t) \right] = \frac{1}{2} I_{t}^{\alpha} \left[x^{2} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left(\frac{x^{2}}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \right) \right] = \frac{1}{2} I_{t}^{\alpha} \left[\frac{2x^{2}}{\Gamma(\alpha+2)} \left(t^{\alpha+1} \right) \right]$$
$$= \frac{x^{2}}{\Gamma(\alpha+2)} I_{t}^{\alpha} \left[t^{\alpha+1} \right] = \frac{x^{2}}{\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} \right] = \frac{x^{2}}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1},$$

y los demás:

$$u_3(x,t) = \frac{x^2}{\Gamma(3\alpha+2)}t^{3\alpha+1} \quad u_4(x,t) = \frac{x^2}{\Gamma(4\alpha+2)}t^{4\alpha+1} \quad u_n(x,t) = \frac{x^2}{\Gamma(n\alpha+2)}t^{n\alpha+1}$$

Finalmente la solución en serie será:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + \dots + u_n(x,t) \\ &= x + x^2 t + \frac{x^2}{\Gamma(1\alpha+2)} t^{1\alpha+1} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+2)} t^{2\alpha+1} + \dots + \frac{x^2}{\Gamma(n\alpha+2)} t^{n\alpha+1} \\ &= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha+1}}{\Gamma(n\alpha+2)} \end{aligned}$$

- Resolución mediante Método de Iteración Variacional:
Como 1 < $\alpha \leq 2$ se pueden establecer los siguientes parámetros con anticipación m = 2y $\lambda = -(\tau - t)$, por otra parte la derivada de Caputo se puede descomponer como $I_{\tau}^{2-\alpha}(D_{\tau}^{2}(f(\tau)))$. De este modo la solución sigue la forma (3.6):

$$u_0(x,t) = x + x^2 t,$$

y las demás iteraciones siguen la fórmula (3.7)

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t (\tau - t) \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} u_k(x,\tau) - \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x,\tau) \right] d\tau,$$

por ejemplo, para las tres primeras iteraciones se tiene: \ast primera iteración

$$\begin{split} u_1(x,t) &= x + x^2 t + \int_0^t (\tau - t) \left[I_{\tau}^{2-\alpha} \left(D_{\tau}^2 (x + x^2 \tau) \right) - \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x + x^2 \tau) \right] d\tau \\ &= x + x^2 t + \int_0^t (\tau - t) \left[I_{\tau}^{2-\alpha} \left(0 \right) - \frac{1}{2} x^2 (2\tau) \right] d\tau \\ &= x + x^2 t + \int_0^t (\tau - t) \left[-x^2 \tau \right] d\tau = x + x^2 t + \int_0^t \left[-\frac{x^2 t \tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + x^2 t \tau \right] d\tau \\ &= x + x^2 t - \frac{x^2 t^3}{3} + \frac{x^2 t^3}{2} = x + x^2 \left(t + \frac{t^3}{6} \right) \end{split}$$

* segunda iteración

$$\begin{split} u_{2}(x,t) &= u_{1}(x,t) + \int_{0}^{t} (\tau-t) \left[I_{\tau}^{2-\alpha} \left(D_{\tau}^{2} \left(x + x^{2} \left(\tau + \frac{\tau^{3}}{6} \right) \right) \right) - \frac{1}{2} x^{2} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left(x + x^{2} \left(\tau + \frac{\tau^{3}}{6} \right) \right) \right] d\tau \\ &= u_{1}(x,t) + \int_{0}^{t} (\tau-t) \left[I_{\tau}^{2-\alpha} \left(x^{2} \tau \right) - x^{2} \left(\tau + \frac{\tau^{3}}{6} \right) \right] d\tau \\ &= u_{1}(x,t) + \int_{0}^{t} (\tau-t) \left[\frac{\Gamma(2) x^{2} \tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - x^{2} \left(\tau + \frac{\tau^{3}}{6} \right) \right] d\tau \\ &= u_{1}(x,t) + \int_{0}^{t} (\tau-t) \left[\frac{x^{2} \tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - x^{2} \tau - \frac{x^{2} \tau^{3}}{6} \right] d\tau \\ &= u_{1}(x,t) + \int_{0}^{t} \left[\frac{x^{2} \tau^{4-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - x^{2} \tau^{2} - \frac{x^{2} \tau^{4}}{6} \right] - \left[\frac{t x^{2} \tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - t x^{2} \tau - \frac{t x^{2} \tau^{3}}{6} \right] d\tau \\ &= u_{1}(x,t) + \left(\frac{x^{2} t^{5-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)(5-\alpha)} - \frac{x^{2} t^{3}}{3} - \frac{x^{2} t^{5}}{30} \right) - \left(\frac{x^{2} t^{5-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{x^{2} t^{3}}{2} - \frac{x^{2} t^{5}}{24} \right) \\ &= x + x^{2} \left(t + \frac{t^{3}}{6} + \frac{t^{5-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)(5-\alpha)} - \frac{t^{3}}{3} - \frac{t^{5}}{30} - \frac{t^{5-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{t^{3}}{2} + \frac{t^{5}}{24} \right) \\ &= x + x^{2} \left(t + \frac{t^{3}}{3} + \frac{t^{5}}{120} - \frac{t^{5-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)} \right) \end{split}$$

* tercera iteración

$$u_3(x,t) = x + x^2 \left(t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{40} + \frac{t^7}{7!} - \frac{3t^{5-\alpha}}{\Gamma(6-\alpha)} - \frac{2t^{7-\alpha}}{\Gamma(8-\alpha)} + \frac{t^{7-2\alpha}}{\Gamma(8-2\alpha)} \right)$$

A continuación se presentan gráficas de las soluciones encontradas:



Figura 10: Comparación de la solución de la ecuación (3.8)

La figura 10 muestra la comparación de soluciones según el Método de Descomposición de Adomian (-) y el Método de Iteración Variacional (+) para distintos valores de $\alpha = [1.25, 1.5, 1.75, 2]$, cada una de estas soluciones son obtenidas considerando $x \in [0, 1]$ para 5 instancias de tiempo t=[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1], se puede apreciar que las curvas de las aproximaciones se ajustan mejor a medida que α se aproxima a 2.

4 Materiales y Métodos

En este apartado se describe el fenómeno de transporte modelado por una ecuación de advección-difusión, se deduce una ecuación de difusión anómala justificando la utilización de una derivada fraccionaria, se establece la ecuación diferencial fraccional a trabajar y se emplean distintos métodos en la resolución de ecuaciones fraccionarias con el propósito de realizar una comparación entre ellos.

4.1 Modelo Conceptual

Con el transcurrir del tiempo, la calidad ambiental a nivel mundial se ha degradado a un ritmo constante y sin precedentes. Lo cual ha llevado a una crisis ambiental caracterizada por una alta contaminación hídrica [22], causada fundamentalmente por los residuos domésticos, actividades agropecuarias, residuos industriales así como actividades mineras. Evidentemente, el abastecimiento de agua potable y el manejo de residuos, están vinculados de alguna manera a la interacción de flujos subterráneos y a peligrosos contaminantes [6], por lo cual, resulta interesante estudiar el modelo basado en la ecuación de advección-difusión, útil para modelar el transporte de solutos en el suelo [30].

En esta tesis se trabajará con una ecuación diferencial fraccional de advección-difusión, que modela un fenómeno de difusión anómala (transporte de un fluido en medio poroso con geometría fractal) no considerando procesos químicos ni biológicos. A continuación se describen los procesos de transporte que define esta ecuación, de igual manera se pretende mostrar, cómo este tipo de transporte se relaciona con ecuaciones que involucran derivadas fraccionarias.

– Advección

El soluto es literalmente "arrastrado" por el flujo de agua subterránea, este proceso se debe al movimiento del fluido. Luego un trazador presente en el agua será pasivamente llevado por este movimiento advectivo de masas, el que es descrito matemáticamente por la dirección y la magnitud de su velocidad, y aunque ocurra dispersión, el centro de masa del elemento que es transportado por Advección, se mueve a velocidad promedio del fluido, siempre y cuando no se produzca adsorción y retardo [7].



Figura 11: Transporte Advectivo

La tasa a la cual un contaminante es transportado por unidad de área (perpendicular a la dirección del movimiento) se expresa generalmente en términos de densidad de flujo (J) de acuerdo a la siguiente expresión: $J = C \cdot v$, donde J: densidad de flujo $\left[\frac{M}{L^2T}\right]$, C: concentración del químico $\left[\frac{M}{L^3}\right]$ y v: es la velocidad del fluido $\left[\frac{L}{T}\right]$ [27]. El cálculo de la masa de soluto transportada por advección, es obtenido por la ley de Darcy



Figura 12: Permeámetro de carga constante

Básicamente un permeámetro es un recipiente de sección constante por el que se hace circular agua conectando a uno de sus extremos un depósito elevado de nivel constante. En el otro extremo se regula el caudal de salida mediante un grifo que en cada experimento mantiene el caudal también constante. Finalmente, se mide la altura de la columna de agua en varios puntos (como mínimo en dos, como en la Figura 12).

$$Q = cte \cdot A \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l},$$

Como el caudal (volumen de agua por unidad de tiempo) Q está expresado en $[\frac{L^3}{T}]$, la sección de área A es $[L^2]$, e Δh e Δl son longitudes [L], con esto se comprueba que las unidades de medida de la permeabilidad (K) son las de una velocidad $[\frac{L}{T}]$ [27]. Actualmente, la Ley de Darcy se expresa de esta forma:

$$q = -K\left(\frac{dh}{dl}\right),\tag{4.1}$$

donde q: es la velocidad de Darcy, equivalente a $\frac{Q}{A}$ es decir, caudal que circula por m^2 de sección de área. K: corresponde a la Conductividad Hidráulica (mejor que 'permeabilidad") $[\frac{L}{T}]$, $\frac{dh}{dl}$: es el gradiente hidráulico expresado en incrementos infinitesimales (el signo menos se debe a que el caudal es una magnitud vectorial, cuya dirección es hacia los dh decrecientes; es decir, que dh o dl es negativo y, por tanto, el caudal será positivo).

La expresión anterior plantea que la velocidad de Darcy es proporcional al gradiente hidráulico, para determinar la velocidad real que fluye entre los poros se debe determinar la tasa de flujo volumétrico por unidad de área que considere la proporción volumétrica del fluido en movimiento:

$$V = \frac{q}{m_e},\tag{4.2}$$

donde V es la velocidad real, q: corresponde a la velocidad Darcy y m_e es la porosidad eficaz (Volumen de agua drenada por gravedad / volumen total) El numerador de esta expresión representa el volumen de los poros que se ha vaciado. Se expresa igual que la porosidad total (% o en tanto por 1).

– Difusión molecular

El transporte molecular de una sustancia con respecto a otra se denomina difusión [2], es decir, la difusión ocurre cuando existe espacialmente un diferencial de partículas, dando origen a un flujo de materia que viaja desde la alta a la baja concentración, debido al efecto del movimiento Browniano de las moléculas de la sustancia difundida, el que comúnmente se modela a través de las leyes de Fick [7].



Figura 13: Difusión normal de partículas

Se puede apreciar la difusión molecular en la figura 16, en este fenómeno las sustancias disueltas se mueven por un gradiente de concentración, que tiende al equilibrio.

Se diferenciará la difusión molecular, y difusión en un medio poroso.

1. **Difusión molecular**: La primera ley de Fick es usada para describir la densidad de flujo debido a difusión molecular, se expresa unidimensionalmente como:

$$J = -D_m \left(\frac{dC}{dx}\right),\tag{4.3}$$

donde J: densidad de flujo $\left[\frac{M}{L^2T}\right]$, D_m : coeficiente de transporte de masa de Fick $\left[\frac{L^2}{T}\right]$, C: corresponde a la concentración del soluto $\left[\frac{M}{L^3}\right]$ y x: distancia sobre la cual se consideran cambios en la concentración [L], luego la expresión $\frac{dC}{dx}$ es el gradiente de concentración (entre dos puntos situados a una distancia dx existe una diferencia de concentraciones dC) [27].

2. Difusión en medios porosos: Si el proceso difusivo se desarrolla en el agua que se encuentra en un medio poroso, la factibilidad de movimiento disminuye y hay que considerar las características del medio poroso (principalmente la porosidad eficaz y la tortuosidad), lo que se define a continuación:

* Porosidad eficaz (m_e) : Se define la porosidad eficaz como el volumen de huecos disponible para el flujo respecto del volumen total. Aproximadamente son cantidades equivalentes: el agua que queda adherida a los granos y que no puede extraerse tampoco permite el flujo:



Figura 14: Porosidad eficaz para el flujo

En la figura 14 se representa en rayado el agua adherida a los granos; los huecos que quedan (en blanco en el dibujo) representan tanto el agua extraíble como la sección utilizable por el flujo del agua subterránea, es decir, el agua adherida a los granos no puede ser extraída y tampoco forma parte de la sección disponible para el flujo

* Tortuosidad (τ): Los poros interconectados de la roca que representan los canales de flujo de fluidos en el yacimiento no son tubos capilares rectos ni tampoco tienen pared lisa. Debido a la presencia de interfases entre fluidos, que originan presiones capilares que afectan los procesos de desplazamiento, es necesario definir la tortuosidad como la razón entre la longitud real que debe recorrer una partícula de fluido para unir dos puntos en el seno del medio poroso y la distancia en línea recta entre dichos puntos.



Figura 15: Tortuosidad

matemáticamente se expresa por:

$$\tau = \left(\frac{L_r}{L}\right)^2,\tag{4.4}$$

donde: Lr es la longitud real del trayecto del flujo, y L corresponde a la longitud de la muestra de roca.

De la ecuación (4.4) se puede apreciar que a medida que el medio poroso se asemeja a tubos capilares rectos, la tortuosidad del sistema se aproxima a 1, siendo este el menor valor de tortuosidad que se puede obtener, el cual se obtiene cuando la longitud real del trayecto del flujo es igual a la longitud de la muestra de roca.

Por lo anterior, es evidente que cuando ocurre la difusión en un medio poroso, la materia o soluto no puede desplazarse tan libremente como en un fluido, ya que depende de la porosidad y si evidencia tortuosidad:



Figura 16: Difusión de partículas en un medio poroso.

Para poder incluir las características del medio, el coeficiente de difusión planteado en (4.3) se modifica a:

$$D^* = D_m \cdot m_e \cdot \left(\frac{\delta}{\tau^2}\right)$$

donde m_e es la porosidad eficaz, τ corresponde a la tortuosidad y δ es el factor de constricción. El problema surge, ya que normalmente los coeficientes τ y δ son desconocidos, replanteándose en función de la porosidad eficaz:

$$D^* = D_m \cdot (m_e)^c$$

donde m_e es porosidad eficaz y c es un coeficiente (1,8 a 2,0 para materiales consolidados; 1,3 para arenas no consolidadas). En cualquiera de estos caso, la ecuación correspondiente a la primera ley de Fick para un medio poroso es la misma anterior, pero utilizando el coeficiente de difusión efectiva D^*

4.1.1 Difusión Anómala

Para establacer la relación entre difusión y movimiento Browniano se tomará una cita de [9]: "las fuerzas que agitan a las moléculas causan la difusión. A escala microscópica,

la difusión es una forma de movimiento aleatorio caracterizado por cambios abruptos y frecuentes de dirección. Esta aleatoriedad es el resultado de la colisión con moléculas presentes en el entorno, las cuales a su vez también se están moviendo aleatoriamente. Esta forma de movimiento se llama movimiento Browniano".

Para definir el Movimiento Browniano, se emplea la formulación matemática de un modelo para caminata aleatoria o "random walk", el cual en palabras simples describe la trayectoria de un sistema que evoluciona dando pasos sucesivos en forma aleatoria, el cual no sólo se usa para modelar el movimiento de moléculas o partículas, sino que también describe fenómenos tan diversos como la toma de decisiones, la evolución de un ecosistema ó las fluctuaciones de la bolsa de valores [35].

Pero, este modelo no describe fenómenos como la señalización de las células biológicas o el comportamiento de los animales en la búsqueda de comida, parece que el movimiento total de un objeto se describe mejor por pasos que no son independientes y que pueden tomar tiempos enormemente diferentes para realizarse [36], este tipo de movimiento fractal, (descrito por Benoît Mandelbrot) se denomina "difusión anómala", diferenciando los fenómenos "sub-difusivos" y "súper-difusivos".

La difusión anómala, se ha evidenciado en el comportamiento de numerosas especies, desde los tiburones a las abejas. El patrón consiste en alternar una serie de movimientos cortos al azar de tipo Browniano con otros de trayectorias más largas.



Figura 17: Vuelo de Levy y Movimiento Browniano.

La figura 17 muestra a la izquierda el vuelo de Levy y a la derecha un movimiento Browniano. En el vuelo de Levy el comportamiento del caminante está dominado por los pasos más grandes o por los tiempos más largos en los que no hay movimiento. Esto quiere decir que la "memoria" acerca de estos eventos poco comunes nunca se borra [36]. Por ejemplo, en hidrología [18], esta difusión anómala se plantea que como resultado del estancamiento, los tiempos de viaje de los contaminantes en agua subterránea son más largos que los esperados por la difusión clásica, es decir que los contaminantes se difunden más lentamente que lo que lo harían en el caso de la difusión normal, este tipo de difusión anormal (o anómala) es llamada "sub-difusión", ya que el desplazamiento cuadrático medio de las partículas crece más lento que la primera potencias del tiempo en la ecuación de difusión de Fick.

En [5] se toma en cuenta estos tiempos de retención extraordinariamente largos y distinguen entre difusión normal y anómala, ahondando en más detalle, ellos investigaron los efectos de la memoria del sistema sobre patrones de contaminación sobre períodos largos, y concluyeron que la ecuación de difusión estándar debe reemplazarse por la versión en derivadas fraccionarias.

4.1.2 Camino Aleatorio de Tiempo Continuo

El siguiente planteamiento fue rescatado del documento [29], en donde se modela un proceso de difusión anómala, mediante una ecuación diferencial fraccionaria en el tiempo, empleando leyes de potencia y propiedades estocásticas.

Existen sistemas complejos como vidrios, cristales líquidos, polímeros, proteínas, organismos vivos o ecosistemas, que se caracterizan por presentar un gran número de elementos unitarios que interaccionan entre ellos, lo cual hace que estos sistemas manifiesten una evolución anómala en el tiempo.De esta manera, la relajación en los sistemas complejos no sigue el patrón exponencial clásico $\phi(t) = \phi_0 e^{-\frac{t}{2}}$, sino más bien que se describe una ley exponencial generalizada que adopta la forma $\phi(t) = \phi_0 e^{-(\frac{t}{2})^{\alpha}}$ con $0 < \alpha < 1$ o mediante una ley de potencias asintótica $\phi(t) = \phi_0 (1 + \frac{t}{2})^{-n}$ con n > 0.

Del mismo modo, los procesos de difusión de los sistemas complejos o difusión anómala normalmente no siguen una estadística gaussiana, es decir no están modelados a través del teorema central del límite y el movimiento browniano,



Figura 18: Partícula browniana - trayectoria de una partícula browniana

el que es caracterizado por un desplazamiento cuadrado medio linealmente dependiente del tiempo,

$$\lim_{t \to \infty} \left\langle \sigma_x^2(t) \right\rangle \sim K_1 t,$$

con K_1 constante, sino más bien presentan una difusión anómala, dependiendo no linealmente del tiempo,

$$\lim_{t \to \infty} \left\langle \sigma_x^2(t) \right\rangle \sim K_\alpha t^\alpha$$

con K_α constante, modelo basado en el teorema central del límite generalizado de Lévy-Gnedenko. En donde se puede diferenciar el exponente de difusión, asociado al parámetro α

 $0 < \alpha < 1$, sub-difusión $\alpha = 1$, difusión normal $1 < \alpha \le 2$, súper- difusión

Esta tesis se enfocará en el caso sub-difusivo, cuyo comportamiento se ejemplifica en la siguiente figura:



Figura 19: Comparación de tiempo físico y tiempo de funcionamiento

En la figura 19 se evidencia el tiempo de funcionamiento de un proceso CTRW 2 con una ley de potencias esperando distribución del tiempo entre los pasos. Los pasos siguen muy irregularmente en el tiempo físico, y muestran intervalos de paso libre en todas las escalas de tiempo. En promedio, el tiempo de funcionamiento está en retardo en comparación con el físico.

A partir de la difusión anómala se han desarrollado aproximaciones consistentes empleando el modelo CTRW y las ecuaciones de Langevin generalizadas, los cuales constituyeron un herramienta eficaz disponible, con la salvedad de que no permiten incorporar directamente campos de fuerzas, plantear problemas de valores límites o considerar la dinámica del espacio de fases.

Como alternativa para solventar estas limitaciones aparecen las ecuaciones fraccionarias, con las propiedades de no localidad y memoria.

El modelo CTRW se basa en la existencia de 2 variables aleatorias: tiempo de espera T y longitud del salto X, en donde la función de densidad de probabilidad para cada una de ellas viene dada por: $\lambda(x) = \int_0^\infty \psi(x,t)dt$ y $w(t) = \int_{-\infty}^\infty \psi(x,t)dx$. donde $\psi(x,t)$ representa la función de densidad de probabilidad conjunta de ambas variables aleatorias, la cual está dada por $\psi(x,t) = \lambda(x)w(t)$ para variables aleatorias T y X independientes; la expresión $\lambda(x)dx$ representa la probabilidad de que la longitud de salto sea x, mientras que w(t)dt representa la probabilidad de que el tiempo de espera hasta el siguiente salto sea t.

 $^{^2 \}mathrm{Camino}$ aleatorio en tiempo continuo llamado CTRW por sus siglas en inglés Continuous Time Random Walk.

Finalmente, siguiendo el desarrollo del modelo CTRW, la probabilidad de estar en la posición x en el tiempo t, W(x,t), viene dada en el espacio transformado de Fourier-Laplace por la fórmula siguiente:

$$W(x, u) = \frac{1 - w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1 - \psi(k, u)},$$

donde $W_0(k)$ es la transformada de Fourier de la condición inicial, $W_0(k) = W(x, 0)$. Se considera ahora el momento de orden 1 (media) del tiempo de espera,

$$T = E(T) = \int_0^\infty tw(t)dt = \tau,$$

y el momento de orden 2 de la longitud de salto,

$$\Sigma^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda(x) dx = 2\sigma^2,$$

Se supone que la varianza de la longitud de salto se mantiene finita, de forma que la variable aleatoria X tiene una función densidad de probabilidad gaussiana,

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{4\sigma^2}},$$

cuya transformada de Fourier es:

$$\lambda(k) \sim 1 - (\sigma k)^2 + O(k^4)$$

Por otra parte, suponiendo que la media del tiempo de espera diverge, la función de densidad de la variable T es de la forma:

$$w(t) \sim A_{\alpha} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1+\alpha}$$
, donde $0 < \alpha < 1$, y $A_{\alpha} = \text{constante}$,

cuya transformada de Laplace es:

$$w(u) \sim 1 - (u\tau)^{\alpha} + O(u^{2\alpha}).$$

A continuación se introducen las transformadas de Fourier y Laplace dadas con anterioridad en la ecuación de densidad de probabilidad $W(x, u) = \frac{1-w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1-\psi(k,u)}$ despreciando términos pequeños, $O(k^4)$ y $O(u^{2\alpha})$, con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$W(x,u) = \frac{1-w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1-\psi(k,u)} = \frac{(u\tau)^{\alpha}}{u} \frac{W_0(k)}{(u\tau)^{\alpha} + (\sigma k)^2}$$
$$= \frac{\frac{W_0(k)}{u}}{\frac{(u\tau)^{\alpha} + (\sigma k)^2}{(u\tau)^{\alpha}}} = \frac{\frac{W_0(k)}{u}}{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^{\alpha}}u^{-\alpha}k^2},$$

reordenando y considerando $K_{\alpha} = \frac{\sigma^2}{\tau^{\alpha}}$ constante de difusión, se obtiene:

$$-K_{\alpha}u^{-\alpha}k^{2}W(k,u) = W(k,u) - \frac{1}{u}W_{0}(k)$$

Puede apreciarse que la ecuación anterior corresponde a la ecuación de difusión fraccionaria en el espacio transformado de Fourier-Laplace, pues:

$$\mathcal{L}\left\{I_{0+,t}^{\alpha}W(x,t)\right\} = u^{-\alpha}W(x,u), \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t)\right\} = -k^2W(k,t),$$

donde $I^{\alpha}_{0+,t}$ es el operador integral de Riemann-Liouville, luego:

$$\mathcal{F} - \mathcal{L}\left\{I_{0+,t}^{\alpha}K_{\alpha}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}W(x,t)\right\} = -K_{\alpha}u^{-\alpha}k^{2}W(k,u)$$
$$\mathcal{F} - \mathcal{L}\left\{W(x,t) - W_{0}(x)\right\} = W(k,u) - \frac{1}{u}W_{0}(k),$$

igualando ambas ecuaciones, y volviendo al espacio directo se obtiene:

$$W(x,t) - W_0(x) = I^{\alpha}_{0+,t} K_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t).$$

Para finalizar, aplicando la derivada parcial respecto al tiempo, y empleando la propiedad (2.23) se obtiene la ecuación de difusión fraccionaria:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = D_{0+,t}^{1-\alpha} K_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t)$$

Se puede observar que la ecuación anterior, es una ecuación íntegro-diferencial y que, bajo ciertas condiciones de regularidad, si aplicamos en ambos miembros el operador integral de Riemann-Liouville respecto al tiempo $I_{0+,t}^{1-\alpha}$, se obtiene la ecuación de difusión fraccionaria con el operador diferencial de Caputo:

$${}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}W(x,t) = K_{\alpha}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}W(x,t)$$

$$\tag{4.5}$$

Este modelo es considerado en 1986 Nigmatullin, quien publica el artículo "The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry" donde considera la ecuación que lleva su nombre:

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}u(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t) \tag{4.6}$$

 $0 < \alpha < 1, k \in \mathbb{R}$ y t > 0, donde $-\infty < x < \infty$ con condiciones de borde $u(t, \pm \infty) = 0$, u(0, x) = f(x), esta ecuación describe, en física, el fenómeno de difusión en tipos especiales de medios porosos, que exhiben geometría fractal.

Las ecuaciones (4.5) y (4.6) otorgan los cimientos de ecuación diferencial de difusión tiempo fraccionaria para esta tesis, en la siguiente sección se agregará el término advectivo para poder formar una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria, también empleando derivada de Caputo.

4.2 Modelo Matemático

Considerando la ecuación (4.5), que corresponde a una ecuación de difusión fraccionaria en su versión unidimensional, anexando un término advectivo al modelo, considerando $D = K_{\alpha}$ y V constantes, se obtiene una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria:

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} + V \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad L \le x \le R \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = Asen(px) + Bcos(px), \quad L \le x \le R \quad , \quad t > 0$$

$$u(L,t) = u(R,t) = 0 \quad , \quad t > 0,$$

(4.7)

donde u es la concentración del soluto, t es el tiempo, x corresponde a la distancia a lo largo del eje, D es el coeficiente de difusión y V el coeficiente de velocidad de poros. La ecuación (4.7) a diferencia de lo planteado en [34] posee derivada fraccionaria temporal no espacial, la cual se caracteriza por la expresión $\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}$ correspondiente a la derivada de Caputo con parámetro α , cuyo dominio se encuentra entre $0 < \alpha \leq 1$.

4.3 Solución Analítica

Los autores [10] y [19] proponen una solución analítica para la ecuación de adveccióndifusión con tiempo fraccional, empleando Transformada de Laplace y Transformada de Fourier. A continuación se extrapola esta idea con los datos planteados en la ecuación (4.7), dando origen a la solución ³:

$$u(x,t) = \frac{Asen(px) + Bcos(px)}{2} \int_0^\infty H_{11}^{10} \left(\sigma \begin{vmatrix} (1-\alpha,\alpha) \\ (0,1) \end{vmatrix} \right) \left[erfc(\eta) \right] d\sigma$$
(4.8)

Sin embargo, lo medular de la tesis es resolver la ecuación (4.7) empleando dos métodos mencionados con anticipación en la sección 3 el Método de Descomposición de Adomian y el Método de Iteración Variacional, entregando ambos una solución semi-analítica, la cual se desarrolla a continuación.

Aproximación de la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria via Descomposición de Adomian

Se trabajará con la ecuación (4.7), aplicando un cambio de variable para facilitar la notación referente a la condición inicial

$$E(x) = Asen(px) + Bcos(px), \tag{4.9}$$

y se definirá un operador diferencial de la forma

$$L(u(x)) = \left[D\partial_{xx}(u(x)) - V\partial_x(u(x))\right], \qquad (4.10)$$

recordando que las relaciones recursivas se establecen como (3.4) y que los términos de la serie quedarán expresados en función de (4.9) y (4.10) de la siguiente manera:

³La obtención de la solución se encuentra en el apéndice

$$\begin{split} u_1(x,t) &= I_t^{\alpha} \left[L(E(x)) \right] = L(E(x)) I_t^{\alpha} \left[1 \right] = L(E(x)) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_2(x,t) &= I_t^{\alpha} \left[L\left(L(E(x)) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right] = I_t^{\alpha} \left[L^2(E(x)) \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \\ &= L^2(E(x)) I_t^{\alpha} \left[\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] = L^2(E(x)) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ u_3(x,t) &= I_t^{\alpha} \left[L\left(L^2(E(x)) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \right] = I_t^{\alpha} \left[L^3(E(x)) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right] \\ &= L^3(E(x)) I_t^{\alpha} \left[\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right] = L^3(E(x)) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\ u_4(x,t) &= I_t^{\alpha} \left[L\left(L^3(E(x)) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \right] = I_t^{\alpha} \left[L^4(E(x)) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right] \\ &= L^4(E(x)) I_t^{\alpha} \left[\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right] = L^4(E(x)) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} \\ \vdots \\ u_n(x,t) &= L^n(E(x)) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \end{split}$$

de esta forma la solución $u_k(x,t)$ viene dada por la suma de los términos:

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= E(x) + L(E(x))\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + L^2(E(x))\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + L^3(E(x))\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\ &+ L^4(E(x))\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} + \dots + L^n(E(x))\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \end{aligned}$$

Expresando así el término general y ampliando la sumatoria $(n \to \infty)$ se obtiene:

$$u(x,t) = E(x) + \sum_{k=1}^{\infty} L^k(E(x)) \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

$$(4.11)$$

Aproximación de la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria mediante Método de Iteración Variacional (MIV)

Aplicando MIV se obtendrán las 4 primeras iteraciones, siendo la primera (y no contabilizada) igual a la condición inicial:

$$u(x,0) = Asen(px) + Bcos(px)$$

Para las demás iteraciones se ocupará la siguiente estructura :

$$u_{k}(x,t) = u_{k-1}(x,t) - \int_{0}^{t} \left[\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} u_{k-1}(x,\tau) - D \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} u_{k-1}(x,\tau) + V \frac{\partial}{\partial x} u_{k-1}(x,\tau) \right] d\tau$$

$$= u_{k-1}(x,t) - \int_{0}^{t} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} u_{k-1}(x,\tau) d\tau + \int_{0}^{t} D \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} u_{k-1}(x,\tau) d\tau - \int_{0}^{t} V \frac{\partial}{\partial x} u_{k-1}(x,\tau) d\tau$$

Para la descomposición de $u_k(x,t)$ se ocuparán variables auxiliares a modo de simplificar la notación, cabe destacar que para el cálculo de A (correspondiente a la derivada fraccionaria de Caputo) se empleará la definición (2.32), desarrollando primero la derivada ordinaria de orden 1, y luego la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $1 - \alpha$.

$$A_{k} = \int_{0}^{t} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} u_{k-1}(x,\tau) d\tau, \quad B_{k} = \int_{0}^{t} D \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} u_{k-1}(x,\tau) d\tau, \quad C_{k} = \int_{0}^{t} V \frac{\partial}{\partial x} u_{k-1}(x,\tau) d\tau.$$
(4.12)

Realizando el cambio de variable (4.9) en función de la condición inicial para facilitar la notación, $u_k(x,t)$ en la k iteración quedará determinada:

$$u_k(x,t) = u_{k-1}(x,t) - A_{k-1} + B_{k-1} - C_{k-1},$$
(4.13)

– Primera iteración $u_1(x,t) = u_0(x) - A_0 + B_0 - C_0$

$$A_{0} = \int_{0}^{t} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} E(x) \quad d\tau = \int_{0}^{t} 0 d\tau = 0$$

$$B_{0} = \int_{0}^{t} D \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} E(x) \quad d\tau = \int_{0}^{t} D E''(x) d\tau = D E''(x) t$$

$$C_{0} = \int_{0}^{t} V \frac{\partial}{\partial x} E(x) \quad d\tau = \int_{0}^{t} V E'(x) \quad d\tau = V E'(x) t$$

$$u_1(x,t) = E(x) + DE''(x)t - VE'(x)t = E(x) + [DE''(x) - VE'(x)]t.$$

Para las iteraciones posteriores se ocupará el operador diferencial (4.10) de manera que se pueda replantear $u_1(x,t)$ en función del operador diferencial:

$$u_1(x,t) = E(x) + L(E(x))t.$$

– Segunda iteración $u_2(x,t) = u_1(x,t) - A_1 + B_1 - C_1$

Se calculará A_1 recordando que la derivada de Caputo se puede expresar como $\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial \tau^{\alpha}} = I_{\tau}^{1-\alpha}[D_{\tau}^1(u)]$, esta acotación se asume también para el cálculo de A_k .

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^t \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} \left[E(x) + L(E(x))\tau \right] d\tau &= \int_0^t I_{\tau}^{1-\alpha} \left[D_{\tau}^1 \left(E(x) + L(E(x))\tau \right) \right] d\tau \\ &= \int_0^t I_{\tau}^{1-\alpha} \left[L(E(x)) \right] d\tau = \int_0^t L(E(x)) - I_{\tau}^{1-\alpha} \left[1 \right] d\tau \\ &= \int_0^t L(E(x)) \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} d\tau = \frac{L(E(x))t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, \end{aligned}$$

Para el cálculo de B_1 y C_1 se debe diferenciar la primera o segunda derivada del operador L denotada por L'(E(x)) ó L''(E(x)) respectivamente, del operador L aplicado al operador L(E(x)) escrito matemáticamente como $L(L(E(x))) = L^2(E(x))$ cuya notación se emplea a continuación y es válida para los cálculos de B_k y C_k :

$$B_{1} = \int_{0}^{t} D \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left[E(x) + L(E(x))\tau \right] d\tau = \int_{0}^{t} D \left[E''(x) + L''(E(x))\tau \right] d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \left(DE''(x) + DL''(E(x))\tau \right) d\tau = DE''(x)t + \frac{DL''(E(x))t^{2}}{2}$$

$$C_{1} = \int_{0}^{t} V \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) + L(E(x))\tau \right] d\tau = \int_{0}^{t} V \left[E'(x) + L'(E(x))\tau \right] d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \left[VE'(x) + VL'(E(x))\tau \right] d\tau = VE'(x)t + \frac{VL'(E(x))t^{2}}{2},$$

reemplazando en $u_2(x,t)$ se obtiene:

$$u_2(x,t) = E(x) + 2L(E(x))t - \frac{L(E(x))t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L^2(E(x))t^2}{2}.$$

– Tercera iteración $u_3(x,t)=u_2(x,t)-A_2+B_2-C_2$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^t \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} \left[E(x) + 2L(E(x))\tau - \frac{L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L_2(E(x))\tau^2}{2} \right] d\tau \\ &= \int_0^t I_{\tau}^{1-\alpha} \left[D_{\tau}^1 \left(E(x) + 2L(E(x))\tau - \frac{L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L_2(E(x))\tau^2}{2} \right) \right] d\tau \\ &= \int_0^t I_{\tau}^{1-\alpha} \left[2L(E(x)) - \frac{L(E(x))(2-\alpha)\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + L_2(E(x))\tau \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{2L(E(x))\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{L(E(x))\tau^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)} + \frac{L_2(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] d\tau \\ &= \frac{2L(E(x))t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{L(E(x))t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{L_2(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \end{aligned}$$

$$B_{2} = \int_{0}^{t} D \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left[E(x) + 2L(E(x))\tau - \frac{L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L_{2}(E(x))\tau^{2}}{2} \right] d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} D \left[E''(x) + 2L''(E(x))\tau - \frac{L''(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L''_{2}(E(x))\tau^{2}}{2} \right] d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} \left[DE''(x) + 2DL''(E(x))\tau - \frac{DL''(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{DL''_{2}(E(x))\tau^{2}}{2} \right] d\tau$$

$$= DE''(x)t + DL''(E(x))t^{2} - \frac{DL''(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{DL''_{2}(E(x))t^{3}}{6}$$

$$\begin{split} C_2 &= \int_0^t V \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) + 2L(E(x))\tau - \frac{L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L_2(E(x))\tau^2}{2} \right] d\tau \\ &= \int_0^t V \left[E'(x) + 2L'(E(x))\tau - \frac{L'(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{L'_2(E(x))\tau^2}{2} \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[VE'(x) + 2VL'(E(x))\tau - \frac{VL'(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{VL'_2(E(x))\tau^2}{2} \right] d\tau \\ &= VE'(x)t + VL'(E(x))t^2 - \frac{VL'(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{VL'_2(E(x))t^3}{6}, \end{split}$$

reemplazando en $u_3(x,t)$ se obtiene:

$$u_{3}(x,t) = E(x) + 3L(E(x))t - \frac{3L(E(x))t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L_{2}(E(x))t^{2}}{2} + \frac{L(E(x))t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_{2}(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_{3}(E(x))t^{3}}{6}.$$

– Cuarta iteración $u_4(x,t) = u_3(x,t) - A_3 + B_3 - C_3$

$$\begin{split} A_3 &= \int_0^t \frac{\partial^{\alpha}}{\partial \tau^{\alpha}} \left[E(x) + 3L(E(x))\tau - \frac{3L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))\tau^2}{2} \right] \\ &+ \frac{L(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= \int_0^t I_{\tau}^{1-\alpha} \left[D_{\tau}^1 \left(E(x) + 3L(E(x))\tau - \frac{3L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))\tau^2}{2} \right) \right] d\tau \\ &+ \frac{L(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^3}{6} \right) \right] d\tau \\ &= \int_0^t I_{\tau}^{1-\alpha} \left[3L(E(x)) - \frac{3L(E(x))(2-\alpha)\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + 3L_2(E(x))\tau \right] d\tau \\ &+ \frac{L(E(x))(3-2\alpha)\tau^{2-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))(3-\alpha)\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^2}{2} \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{3L(E(x))\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - \frac{3L(E(x))\tau^{2-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right] d\tau \\ &+ \frac{L(E(x))\tau^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \right] d\tau \\ &= \frac{3L(E(x))t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{3L(E(x))t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \\ &+ \frac{L(E(x))t^{4-3\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \\ &+ \frac{L(E(x))t^{4-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{3L(E(x))t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} \\ &+ \frac{L(E(x))t^{4-3\alpha}}{\Gamma(5-3\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))t^{4-2\alpha}}{\Gamma(5-2\alpha)} + \frac{L_3(E(x))t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \end{split}$$

$$\begin{split} B_3 &= \int_0^t D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x) + 3L(E(x))\tau - \frac{3L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{L(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= \int_0^t D \left[E''(x) + 3L''(E(x))\tau - \frac{3L''(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L''_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{L''(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L'_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L''_3(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[DE''(x) + 3DL''(E(x))\tau - \frac{3DL''(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3DL''_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{DL''(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2DL''_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{DL''_3(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= DE''(x)t + \frac{3DL''(E(x))t^2}{2} - \frac{3DL''(E(x))t^{4-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{DL''_2(E(x))t^3}{2} \\ &+ \frac{DL''(E(x))t^{4-2\alpha}}{\Gamma(5-2\alpha)} - \frac{2DL''_2(E(x))t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{DL''_3(E(x))\tau^4}{24} \\ C_3 &= \int_0^t V \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) + 3L(E(x))\tau - \frac{3L(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{L(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= \int_0^t V \left[E'(x) + 3L'(E(x))\tau - \frac{3L'(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{L'(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2L_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{L_3(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[V E'(x) + 3VL'(E(x))\tau - \frac{3VL'(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3VL'_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{VL'(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2VL_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{VL_3'(E(x))\tau^3}{6} \right] d\tau \\ &= \int_0^t \left[V E'(x) + 3VL'(E(x))\tau - \frac{3VL'(E(x))\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{3VL'_2(E(x))\tau^2}{2} \\ &+ \frac{VL'(E(x))\tau^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{2VL_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{VL_3'(E(x))\tau^3}{2} \right] d\tau \\ &= VE'(x)t + \frac{3VL'(E(x))t^2}{2} - \frac{3VL'(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{VL_3'(E(x))t^3}{2} \\ &+ \frac{VL'(E(x))t^{4-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2VL_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{VL_3'(E(x))t^3}{2} \\ &+ \frac{VL'(E(x))t^{4-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{2VL_2(E(x))\tau^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{VL_3'(E(x))t^4}{2} \end{aligned}$$

Reemplazando los términos anteriores se obtiene la cuarta iteración $u_4(x,t)$

$$u_4(x,t) = E(x) + 4L(E(x))t - \frac{6L(E(x))t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + 3L_2(E(x))t^2 + \frac{4L(E(x))t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{8L_2(E(x))t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{2L_3(E(x))t^3}{3} - \frac{L(E(x))t^{4-3\alpha}}{\Gamma(5-3\alpha)} + \frac{3L_2(E(x))t^{4-2\alpha}}{\Gamma(5-2\alpha)} - \frac{3L_3(E(x))t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} + \frac{L_4(E(x))t^4}{24}$$

4.4 Solución Numérica

La solución numérica de la ecuación 4.7 se hará mediante el método de Diferencias Finitas, lo cual será descrito a continuación:

Aproximación de la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria mediante Diferencias Finitas

Se presenta a continuación una aproximación numérica mediante diferencias finitas, donde se emplea la siguiente notación Δt y Δx corresponden a los saltos en la coordenada temporal y espacial respectivamente, el dominio de la variable x es $L \leq x \leq R$ y de la variable t > 0. Las coordenadas x y t en la malla de puntos estarán estarán dados por $x_j = j\Delta x$ donde j = 0, 1, 2, ..., N siendo $N = \frac{R-L}{\Delta x}$, del mismo modo $t_m = m\Delta t$ con m =0, 1, 2, ... Los valores solución u(x, t) en la malla estarán dados por $u(x_j, t_m) \equiv u_j^m \simeq U_j^m$, donde U_j^m corresponde a una estimación numérica de $u(x_j, t_m)$ en el punto (x_j, t_m) .

Las particiones temporales y espaciales se muestran a continuación:



Figura 20: Partición espacial y temporal.

La figura 20, en la imagen (a) muestra la partición espacial donde hay n nodos, con un tamaño de paso dx, mientras que en la imagen (b) se muestra un mallado generalizado

(espacial y temporal) ocupado en la discretización. Se empleará un esquema de diferencias hacia atrás para la aproximación de la primera derivada espacial, y uno centrado para la derivada de segundo orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(x_j,t_m)} = \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} + O(\Delta x) \simeq \frac{U_j^m - U_{j-1}^m}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(x_j,t_m)} = \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \simeq \frac{U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m}{(\Delta x)^2},$$

para la versión discreta de la derivada fraccionaria temporal, se ocupará la definición de Grünwald-Letnikov

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} \mid_{(x_j, t_m)} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x_j, t_{m-k}) \simeq \frac{1}{(\Delta t)^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\lceil m \rceil} g_k^{(\alpha)} \cdot U_j^{m-k}$$

donde se puede establecer el valor de los pesos de los términos g_k , donde $g_0^{(\alpha)} = 1$, y los términos sucesivos siguen relación de recurrencia $g_k^{(\alpha)} = (-1)^{\alpha} {\alpha \choose k} = (1 - \frac{\alpha+1}{k}) g_{k-1}^{(\alpha)}$. Utilizando lo anterior se obtiene la forma discreta de la ecuación (4.7)

$$\frac{1}{(\Delta t)^{\alpha}} \sum_{k=0}^{m} g_{k}^{(\alpha)} \cdot U_{j}^{m-k} = D\left(\frac{U_{j+1}^{m} - 2U_{j}^{m} + U_{j-1}^{m}}{(\Delta x)^{2}}\right) - V\left(\frac{U_{j}^{m} - U_{j-1}^{m}}{\Delta x}\right)$$
$$\sum_{k=0}^{m} g_{k}^{(\alpha)} \cdot U_{j}^{m-k} = D \cdot \frac{(\Delta t)^{\alpha}}{(\Delta x)^{2}} \left(U_{j+1}^{m} - 2U_{j}^{m} + U_{j-1}^{m}\right) - V \cdot \frac{(\Delta t)^{\alpha}}{\Delta x} \left(U_{j}^{m} - U_{j-1}^{m}\right),$$

realizando un cambio de variable $P = D \cdot \frac{(\Delta t)^{\alpha}}{(\Delta x)^2}$ y $Q = V \cdot \frac{(\Delta t)^{\alpha}}{\Delta x}$,

$$\sum_{k=0}^{m} g_{k}^{(\alpha)} \cdot U_{j}^{m-k} = P\left(U_{j+1}^{m} - 2U_{j}^{m} + U_{j-1}^{m}\right) - Q\left(U_{j}^{m} - U_{j-1}^{m}\right),$$

expandiendo la sumatoria y realizando un nuevo cambio de variable $\sum_{k=1}^{m} g_k^{(\alpha)} = (S_k)$ para denotar los pesos de la derivada fraccionaria de GL, se obtiene:

$$g_0^{(\alpha)} \cdot U_j^m + \sum_{k=1}^m g_k^{(\alpha)} \cdot U_j^{m-k} = PU_{j+1}^m - 2PU_j^m + PU_{j-1}^m - QU_j^m + QU_{j-1}^m$$
$$U_j^m + (S_k) \cdot U_j^{m-k} = PU_{j+1}^m - 2PU_j^m + PU_{j-1}^m - QU_j^m + QU_{j-1}^m$$

Finalmente reordenando los términos:

$$-(P+Q)U_{j-1}^{m} + (Q+2P+1)U_{j}^{m} - PU_{j+1}^{m} = -(S_{k}) \cdot U_{j}^{m-k}$$
(4.14)

Como ejemplo, y para que sea más fácil la estructura del sistema de ecuaciones se realizará el cálculo para 3 posiciones espaciales distintas: la primera x_1 , la última x_n y un intermedio $x_1 < x_j < x_{n-1}$:

$$\begin{aligned} (2P+Q+1)U_1^m - PU_2^m &= -(S_k) \cdot U_1^{m-k} + (P+Q)U_0^m, \quad para \quad j=1\\ -(P+Q)U_1^m + (2P+Q+1)U_2^m - PU_3^m &= -(S_k) \cdot U_2^{m-k}, \quad para \quad j=2:n-2\\ -(P+Q)U_{n-2}^m + (2P+Q+1)U_{n-1}^m &= -(S_k) \cdot U_{n-1}^{m-k} + PU_n^m, \quad para \quad j=n-1 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones anterior se puede expresar de la forma matricial $A\cdot U=b,$ donde los elementos de la matrizA están dados por:

$$\begin{cases} A(1,1) = (2P+Q+1) \\ A(1,2) = -P \end{cases} \begin{cases} A(i,i-1) = -(P+Q) \\ A(i,i) = (2P+Q+1) \\ A(i,i+1) = -P \end{cases} \begin{cases} A(n,n-1) = -(P+Q) \\ A(n,n) = (2P+Q+1) \end{cases}$$

mientras que los elementos de la matriz b están dados por:

$$\begin{cases} B(1) = -(S_k) \cdot U_1^{m-k} + (P+Q)U_0^m \\ B(i) = -(S_k) \cdot U_i^{m-k} \\ B(n) = -(S_k) \cdot U_n^{m-k} + PU_n^m \end{cases}$$

Lo que se puede representar como matriz, tridiagonal y de columna respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2P+Q+1 & -P & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -(P+Q) & 2P+Q+1 & -P & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -(P+Q) & 2P+Q+1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(P+Q) & 2P+Q+1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -(S_k) - (P+Q) \\ -(S_k) \\ \vdots \\ -(S_k) \\ -(S_k) \\ -(S_k) + P \end{pmatrix}$$

5 Resultados

En esta sección se dan a conocer los resultados de la simulación computacional realizando visualizaciones mostrando un conjunto de imágenes en las cuales se compara la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccional.

5.1 Simulación Computacional

A continuación se presentan un conjunto de figuras en donde se muestran comparaciones de la solución de la ecuación (4.7) para el Método de Descomposición de Adomian (-) y el Método de Iteración Variacional (+), las visualizaciones son para distintos instantes de tiempo t=[0, 0.25, 0.5, 0.75, 1] y para valores de $\alpha=[0.25, 0.5, 0.75, 1]$.

• Comparación 1: Ecuación de Advección-Difusión tiempo fraccionaria.



Figura 21: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) para D = V = a = b = p = 1

En la figura 21, en la imagen (a) no se ve mayor coincidencia entre ambas soluciones, al lado en la imagen (b) las curvas alcanzan mayor amplitud, para la solución graficada en (c) se puede ver que las curvas de las aproximaciones se ajustan mejor entre ellas a medida que el valor del parámetro α se acerca al valor 1 (d), coincidiendo en este caso con la derivada entera.

• Comparación 2: Ecuación de Difusión tiempo fraccionaria.



Figura 22: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) para D = a = b = p = 1 y V = 0

En la figura 22, se muestran las soluciones en un dominio espacial de $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, al considerar V = 0 se anuló el término advectivo, no existe un desplazamiento de las curvas al transcurrir el tiempo, sino que se evidencia un comportamiento netamente difusivo, y se puede ver que ambas soluciones se asemejan a medida que α se aproxima a 1.

• Comparación 3: Ecuación de Advección tiempo fraccionaria.



Figura 23: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) para V = a = b = p = 1 y D = 0

En la figura 23 se considera un dominio espacial $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, al designar el parámetro D = 0 se anuló el término difusivo, por lo que se evidencia un desplazamiento de las curvas mostrando el comportamiento netamente advectivo, al igual que en la figura 22 ambas soluciones se asemejan a medida que α se aproxima a 1.

• Comparación 4: Ecuación de Advección tiempo fraccionaria con condición inicial u(x, 0) = sen(x).



Figura 24: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) para V = a = p = 1 y D = b = 0

• Comparación 5: Ecuación de Difusión tiempo fraccionaria con condición inicial u(x, 0) = sen(x).



Figura 25: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) para D=a=p=1 y V=b=0

• Comparación 6: Ecuación de Advección-Difusión tiempo fraccionaria.



Figura 26: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) para D=V=a=b=p=1

En las figuras 24, 25 y 26, se presentan las soluciones obtenidas por el método de Descomposición de Adomian (a), (c), (e), mientras que las obtenidas por Método de Iteración Variacional ocupan las posiciones (b), (d) y (f); ambas consideran un dominio espacial de $0 \le x \le 1$. En la figura 24 se evidencia que ambas soluciones se asemejan, y presentan un comportamiento advectivo en el tiempo a medida que el valor de α tiende a 1, de manera muy similar en la figura 25, se puede apreciar que ambas superficies tienen un comportamiento difusivo en el tiempo a medida que el valor de α tiende a 1 y finalmente en la figura 26, se describe un comportamiento advectivo-difusivo en el tiempo a medida que el valor de α tiende a 1.

• Comparación 7: Ecuación de Advección-Difusión tiempo fraccionaria, con tiempo y espacio fijo.



Figura 27: Comparación de la solución de la ecuación (4.7) variando el parámetro α

En la figura 27 se muestran $u_1 = (\frac{\pi}{4}, t) u_2 = (\frac{\pi}{2}, t) u_3 = (\frac{3\pi}{4}, t) u_4 = (\pi, t)$, se compara la variación del parámetro α en los instantes de tiempo t = 0,5 y t = 1. A nivel general el comportamiento de las soluciones de la ecuación (4.7) tienden a aproximarse suavemente a la solución para $\alpha = 1$ a medida que el parámetro α se aproxima a 1.

6 Conclusiones

Los resultados obtenidos, surgen al resolver una ecuación de Advección-difusión con derivada temporal fraccionaria (4.7), mediante los métodos de Descomposición de Adomian e Iteración Variacional, considerando una serie de parámetros como el orden de la derivada fraccionaria α , las constantes D, V asociadas a la ecuación propiamente tal y los valores de A, B, p relacionados a la condición inicial.

De la aproximación de la solución obtenida por el método de Descomposición de Adomian, se obtuvo una solución semi-analítica que al ser expresada como serie, si se aumentan los términos de ésta más próxima se encuentra de la solución analítica. Por otra parte la solución encontrada mediante el método de Iteración Variacional se puede concluir que a medida que se realizan más iteraciones el u(x,t) queda mejor definido lo que se plantea en [24] en donde se describen los métodos mencionados anteriormente y se realizan 3 ejemplos particulares de ecuaciones con derivada temporal fraccionaria considerando para algunos casos $\alpha \in]0, 1]$ y para otros $\alpha \in [1, 2]$ como único parámetro. Con respecto a las comparaciones se pudo estableer que ambas aproximaciones de la solución tienen un comportamiento similar para valores extremos de α , siendo una función que interpola a una ecuación diferencial de segundo orden homogénea con coeficientes constantes para $\alpha \in [0, 0.25]$ y una ecuación de advección-difusión para valores de $\alpha \in [0.75, 1]$ [4]. Sería interesante resolver la ecuación (4.7) para un $\alpha \in [1, 2]$ de modo que esa interpolación sea entre una ecuación de advección-difusión y una ecuación de onda.

Sin duda, a pesar de que este trabajo es una primera incursión en el cálculo fraccional que resuelve una ecuación de Advección-difusión con derivada temporal fraccionaria (4.7), realiza un aporte al considerar la condición inicial expresada como combinación lineal de las funciones sen(x) y cos(x), ya que esto puede permitir expresar cualquier función en términos de una serie de Fourier.

Queda pendiente, como trabajo futuro, considerar el caso de que las constantes D, Vdependan de las variables (x, t) presentando una variación en el tiempo y en el espacio. Otra variación en post de una generalización sería resolver una ecuación no lineal con derivada fraccionaria en el tiempo y espacio, como por ejemplo una ecuación de Burgers, la cual describe de mejor forma el comportamiento de un fluido en un medio poroso. Por otra parte se podría realizar una modificación a lo presentado en esta tesis definiendo la ecuación (4.7) con derivada fraccionaria como se define en [13], donde se presenta una modificación de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, a la cual se puede aplicar el Método de Iteración Variacional como se plantea [11], o el "Método de las Características de Lagrange" como se propone en [14, 31, 37] con el propósito de comparar más métodos. Finalmente se puede estudiar la convergencia y estabilidad de los métodos empleados en la búsqueda de la solución de la ecuación (4.7), lo cual es un aspecto matemático que no fue considerado en esta tesis, pero si es mencionado en artículos como [24, 20].

Referencias

- Baeumer, B., Kovács, M., Meerschaert, M. M. (2008). Numerical solutions for fractional reaction diffusion equations. Computers and Mathematics with Applications, 55(10), 2212-2226.
- [2] Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N. (2007). *Transport phenomena*. John Wiley and Sons.
- [3] Buesaquillo, V. G., Perez, A., Rugeles, A. (2014). Cálculo fraccional. Revista de Ciencias, 4(1).
- [4] Cebrián, M. P. V. (2008). Modelos Diferenciales y Funciones especiales en el ámbito del Cálculo Fraccionario Trabajo apoyado por el Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid.
- [5] Dentz, M., Cortis, A., Scher, H., & Berkowitz, B. (2004). Time behavior of solute transport in heterogeneous media: transition from anomalous to normal transport. Advances in Water Resources, 27(2), 155-173.
- [6] Durán, M., Muñoz, J., Toledo, P. (2002). Modelación y simulación numérica del fenómeno de Intrusión Salina en Acuíferos Basada en el Método de Volúmenes Finitos. Mecánica Computacional, 21, 2361-2371.
- [7] Galeano Urueña, C. H. (2009). Técnicas de solución numérica de la ecuación de difusión

 advección reacción para el estudio de dispersión de contaminantes/Numerical solution
 techniques of the diffusion-advection-reaction equation for the study of pollutant dispersion
 (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia). Chicago
- [8] Hernández, D. (2014). Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones. Misceláanea Matemática, 58. Rescatado 05/06/2015 de http://www.miscelaneamatematica.org/ Misc58.1/58103.pdf
- [9] Howard, J. (2001). Mechanics of motor proteins and the cytoskeleton.
- [10] Huang, F., & Liu, F. (2005). The time fractional diffusion equation and the advection-dispersion equation. The ANZIAM Journal, 46(03), 317-330.
- [11] Íbis, B., Bayram, M. (2014). Approximate Solution of Time-Fractional Advection-Dispersion Equation via Fractional Variational Iteration Method. The Scientific World Journal, 2014.
- [12] Jiang, X., & Chen, S. (2015). Analytical and numerical solutions of time fractional anomalous thermal diffusion equation in composite medium. ZAMMJournal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 95(2), 156-164.
- [13] Jumarie, G. (2006). Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results. Computers & Mathematics with Applications, 51(9), 1367-1376.

- [14] Jumarie, G.(2006). Lagrange characteristic method for solving a class of nonlinear partial differential equations of fractional order. Applied Mathematics Letters, 19(9), 873-880.
- [15] Jumarie, G. (2007). Fractional partial differential equations and modified Riemann-Liouville derivative new methods for solution. Journal of Applied Mathematics and Computing, 24(1-2), 31-48.
- [16] Jumarie, G. (2009). Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions. Applied Mathematics Letters, 22(3), 378-385.
- [17] Jumarie, G. (2009). Laplaceś transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative. Applied Mathematics Letters, 22(11), 1659-1664.
- [18] Kirchner, J. W., Feng, X., & Neal, C. (2000). Fractal stream chemistry and its implications for contaminant transport in catchments. Nature, 403(6769), 524-527.
- [19] Liu, F., Anh, V. V., Turner, I., & Zhuang, P. (2003). Time fractional advection-dispersion equation. Journal of Applied Mathematics and Computing, 13(1-2), 233-245.
- [20] Liu, F., Zhuang, P., Anh, V., Turner, I., Burrage, K. (2007). Stability and convergence of the difference methods for the space & time fractional advection? diffusion equation. Applied Mathematics and Computation, 191(1), 12-20.
- [21] Lombardero, O. A. (2014). Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana. G.I.E Pensamiento Matemático, IV(1), 077–106, ISSN 2174-0410.
- [22] Meerschaert, M. M., Tadjeran, C. (2004). Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. J. Comput. Appl. Math., 172, 65–77.
- [23] Meerschaert, M. M., Tadjeran, C. (2006). Finite difference approximations for two sided space-fractional partial differential equations. Appl. Numer. Math., 56(1), 80–90.
- [24] Momani, S., & Odibat, Z. (2006). Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics. Physics Letters A, 355(4), 271-279.
- [25] Nigmatullin, R. R. (1986). The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. physica status solidi (b), 133(1), 425-430.
- [26] Ortigueira, M. D., (2011). Fractional Calculus for Scientists and Engineers. Springer Dordrecht Heidelberg London New York. Vol 84, ISSN 1876-1100.
- [27] Oyarzún, R. (2007). Transporte de contaminantes en aguas subterráneas. CEAZA, Chile, http://www.aulados.net/Temas_ambientales/Contaminantes_aguas_subterraneas/ Transporte_contaminantes.pdf.
- [28] Pierantozzi, T. (2007). Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas. [Universidad Complutensa], Servicio de Publicaciones.

- [29] Romero Suárez, B. C. (2011). Método de Lattice Boltzmann para difusión anómala en medios porosos (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia).
- [30] San José, F., Pachepsky, & Y. A., Taguas, F. J. (2007). Modelos Fraccionarios para la descripción del transporte de solutos en columnas de suelo. Estudios de la Zona No Saturada del Suelo, Vol. III.
- [31] Shivanian, E., Khodabandehlo, H. R. (2015). A characteristic difference method for fractional advection-dispersion flow equations. Applied mathematics in Engineering, Management and Technology, 3(1), 618–630.
- [32] Shingareva, I., & Celaya, C. L. (2012). Método de descomposición de Adomian: Soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Memorias de la XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
- [33] Su, L., Wang, W., Yang, Z. (2009). Finite difference approximations for the fractional advection - dispersion equation. Phys. Lett. A, 373(48), 4405–4408.
- [34] Su, L., Cheng, P. (2013). A Weighted Average Finite Difference Method for the Fractional Convection-Diffusion Equation. Advances in Mathematical Physics, Article ID 129404, 5 pages. doi:10.1155/2013/129404.
- [35] Valencia, L. H. J. Modelos y Problemas de Difusión.
- [36] Varea, C., & Hernández, D. (2010). Difusión anómala en sistemas complejos. Volumen 11.
- [37] Wu, G. C. (2011). A fractional characteristic method for solving fractional partial differential equations. Applied Mathematics Letters, 24(7), 1046-1050.
- [38] Yuste, S. B. (2006). Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations. Journal of Computational Physics, 216(1), 264-274.
- [39] Anónimo (s.f). Integración y Derivación Fraccionaria. Rescatado 05/06/2015 de http: //catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lme/ortiz_m_ja/capitulo2.pdf

A Obtención de la solución analítica

Los autores [10] y [19] proponen una solución analítica para la ecuación de adveccióndifusión con tiempo fraccional, empleando transformada de Laplace y Transformada de Fourier, en este apartado se tomarán esas ideas para solucionar (4.7).

Sea la ecuación a resolver:

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = D \frac{\partial^{2} u(x,t)}{\partial x^{2}} - V \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$
$$u(x,0) = Asen(px) + Bcos(px)$$

Aplicando la integral fraccionaria de Riemann-Liouville a la ecuación anterior se obtiene:

$$u(x,t) = u(x,0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(t-\tau\right)^{\alpha-1} \left[-v_x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] d\tau$$
(A.1)

Se sugiere realizar el cambio de variable

$$\varepsilon = \frac{x}{\sqrt{D}} \qquad \mu^2 = \frac{v^2}{4D}$$
 (A.2)

considerando una solución del tipo

$$u(x,t) = u(\xi,t)e^{\left(\frac{v\xi}{2\sqrt{D}}\right)} = u(\xi,t)e^{(\xi\mu)}$$
 (A.3)

Se procede a realizar las derivadas ordinarias aplicando regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \left[\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} e^{(\xi\mu)} + u e^{(\xi\mu)} \cdot \mu \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{\sqrt{D}} + \frac{u e^{(\xi\mu)} \cdot \mu}{\sqrt{D}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{\sqrt{D}} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{\sqrt{D}} \cdot \mu + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot e^{(\xi\mu)} \cdot \frac{v}{2D} + u e^{(\xi\mu)} \cdot \frac{v}{2D} \cdot \mu \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{D}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{D} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{D} \cdot \mu + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)} \cdot v}{2D\sqrt{D}} + \frac{u e^{(\xi\mu)} v \cdot \mu}{2D\sqrt{D}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{D} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)} \mu}{D} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)} \mu}{D} + \frac{u e^{(\xi\mu)} \mu^2}{D} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación original se obtiene:

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial u}{\partial x} = D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{D} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{2e^{(\xi\mu)} \cdot \mu}{D} + \frac{ue^{(\xi\mu)}\mu^2}{D}\right] - v\left[\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{e^{(\xi\mu)}}{\sqrt{D}} + \frac{ue^{(\xi\mu)} \cdot \mu}{\sqrt{D}}\right]$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot e^{(\xi\mu)} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot 2e^{(\xi\mu)} \cdot \mu + ue^{(\xi\mu)}\mu^2 - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\frac{e^{(\xi\mu)}v}{\sqrt{D}} - \frac{uve^{(\xi\mu)} \cdot \mu}{\sqrt{D}}$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot e^{(\xi\mu)} + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot 2e^{(\xi\mu)} \cdot \mu + ue^{(\xi\mu)}\mu^2 - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \cdot 2e^{(\xi\mu)} \cdot \mu - 2ue^{(\xi\mu)} \cdot \mu^2$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} \cdot e^{(\xi\mu)} - ue^{(\xi\mu)} \cdot \mu^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2} - u\mu^2$$

Expresando la ecuación (A.1) en función de las variables ε y t

$$u(\varepsilon,t) = u(\varepsilon,0) + D^{-\alpha} \left[\frac{\partial^2 u(\varepsilon,\tau)}{\partial \varepsilon^2} - \mu^2 u(\varepsilon,\tau) \right]$$
(A.4)

Aplicando la propiedad (??) a la ecuación (A.4) se obtiene:

$$\tilde{u}(\varepsilon, p) = p^{-1}\tilde{u}(\varepsilon, 0) + p^{-\alpha} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}(\varepsilon, p)}{\partial \varepsilon^2} - \mu^2 \tilde{u}(\varepsilon, p) \right]$$

Amplificando por p^{α} y haciendo el cambio de variable $(\mu^2+p^{\alpha})=w^2$

$$p^{\alpha}\tilde{u}(\varepsilon,p) = p^{\alpha-1}\tilde{u}(\varepsilon,0) + \frac{\partial^{2}\tilde{u}(\varepsilon,p)}{\partial\varepsilon^{2}} - \mu^{2}\tilde{u}(\varepsilon,p)$$
$$-p^{\alpha-1}\tilde{u}(\varepsilon,0) = \frac{\partial^{2}\tilde{u}(\varepsilon,p)}{\partial\varepsilon^{2}} - (\mu^{2} + p^{\alpha})\tilde{u}(\varepsilon,p)$$

$$-p^{\alpha-1}\tilde{u}(\varepsilon,0) = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\varepsilon,p)}{\partial \varepsilon^2} - w^2 \tilde{u}(\varepsilon,p)$$
(A.5)

En los artículos [10] [19], se menciona que la ecuación (A.5) fue resuelta por Schneider y Wyss (1989), la cual tiene como solución:

$$\tilde{u}(\xi,t) = \int_0^\infty \tilde{G}^\alpha_\mu \left(\left| \xi - y \right|, p \right) u(y,0) dy$$

Donde se considera la función de Green $\tilde{G}^{\alpha}_{\mu}(r,p) = p^{\alpha-1}k(r,w) = p^{\alpha-1}k(r,\sqrt{\mu^2+p^{\alpha}})$ y $k(r,w) = \left(\frac{r}{2\pi w}\right)^{1/2} K_{1/2}(wr)$ Además en el texto [19] se trabaja más algebraicamente la solución anterior, aplicando

transformada de Mellín y Función de Fox-H

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \int_0^\infty H_{11}^{10} \left(\sigma \begin{vmatrix} (1-\alpha,\alpha) \\ (0,1) \end{vmatrix} \right) \left[erfc(\eta) \right] d\sigma$$

Donde la H-función es definida como una densidad de probabilidad, dada por

$$H_{11}^{10}\left(z \begin{vmatrix} (1-\alpha,\alpha) \\ (0,1) \end{vmatrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1-\alpha-\alpha k)} \frac{z^k}{k!}$$

Y la función de error complementaria:

$$erfc(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Cuya extrapolación a la solución de la ecuación (4.7) sería

$$u(x,t) = \frac{Asen(px) + Bcos(px)}{2} \int_0^\infty H_{11}^{10} \left(\sigma \begin{vmatrix} (1-\alpha,\alpha) \\ (0,1) \end{vmatrix} \right) \left[erfc(\eta) \right] d\sigma$$

B Códigos computacionales

B.1 Códigos computacionales MATHEMATICA

• Aproximación de la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria mediante descomposición de Adomian

Con la ayuda de MATHEMATICA se calcularon los operadores L_n empleados para expresar la solución de la ecuación (4.7), de la misma manera que las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville de 1, t y sus respectivas potencias $t^{k\alpha}$ para llegar a la aproximación de la solución u(x, t) en función de los términos u_o , u_1, u_2, u_3, u_4 :

```
\mathbf{L0} = a \mathbf{Sin}[px] + b \mathbf{Cos}[px]
```

 $b\mathrm{Cos}[px] + a\mathrm{Sin}[px]$

L1 = FullSimplify[d(D[D[u0, x], x]) - v(D[u0, x])]

 $-p((bdp + av)\operatorname{Cos}[px] + (adp - bv)\operatorname{Sin}[px])$

L2 = FullSimplify[d(D[D[u1, x], x]) - v(D[u1, x])]

 $p^{2}((2adpv + b(dp - v)(dp + v))\operatorname{Cos}[px] + (-2bdpv + a(dp - v)(dp + v))\operatorname{Sin}[px])$

$\mathbf{L3} = \mathrm{FullSimplify}[d(D[D[\mathbf{u2}, x], x]) - v(D[\mathbf{u2}, x])]$

 $-p^{3}\left(\left(bd^{3}p^{3}+3ad^{2}p^{2}v-3bdpv^{2}-av^{3}\right)\operatorname{Cos}[px]+\left(ad^{3}p^{3}-3bd^{2}p^{2}v-3adpv^{2}+bv^{3}\right)\operatorname{Sin}[px]\right)$

L4 = FullSimplify[d(D[D[u3, x], x]) - v(D[u3, x])]

 $p^{4}\left(\left(4adp(dp-v)v(dp+v)+b\left(d^{4}p^{4}-6d^{2}p^{2}v^{2}+v^{4}\right)\right)\operatorname{Cos}[px]+\left(4bdpv\left(-d^{2}p^{2}+v^{2}\right)+a\left(d^{4}p^{4}-6d^{2}p^{2}v^{2}+v^{4}\right)\right)\operatorname{Sin}[px]\right)$

${ m t1} = rac{t^{y+{ m alpha}}{ m Gamma[1+y]}}{ m Gamma[{ m alpha}+y+1]}/.y ightarrow 0$

 $\frac{t^{\text{alpha}}}{\text{Gamma}[1+\text{alpha}]}$

$\mathbf{t2} = \frac{t^{y+\mathbf{alpha}}\mathbf{Gamma}[1+y]}{\mathbf{Gamma}[\mathbf{alpha}+y+1]\mathbf{Gamma}[1+y]} / .y \rightarrow \mathbf{alpha}$

 $\frac{t^{2alpha}}{\text{Gamma}[1+2alpha]}$

$\mathbf{t3} = \frac{t^{y+\mathrm{alpha}}\mathrm{Gamma}[1+y]}{\mathrm{Gamma}[\mathrm{alpha}+y+1]\mathrm{Gamma}[1+y]} / .y \rightarrow 2 \mathrm{alpha}$

 $\frac{t^{3alpha}}{Gamma[1+3alpha]}$

 ${
m t4}=rac{t^{y+{
m alpha}}{
m Gamma}[1+y]}{
m Gamma}[1+y+1]{
m Gamma}[1+y]/.y
ightarrow 3{
m alpha}$

 $\frac{t^{4\mathrm{alpha}}}{\mathrm{Gamma}[1+4\mathrm{alpha}]}$

Usol4 = FullSimplify[L0 + L1t1 + L2t2 + L3t3 + L4t4]

 $b\mathrm{Cos}[px] + a\mathrm{Sin}[px] - \frac{pt^{\mathrm{alpha}}}{\mathrm{Gamma}[1 + \mathrm{alpha}]}((bdp + av)\mathrm{Cos}[px] + (adp - bv)\mathrm{Sin}[px])$

 $+\frac{p^2t^{2\mathrm{alpha}}}{\mathrm{Gamma}[1+2\mathrm{alpha}]}((2adpv+b(dp-v)(dp+v))\mathrm{Cos}[px]+(-2bdpv+a(dp-v)(dp+v))\mathrm{Sin}[px])$

 $\frac{\int_{a}^{a_{1}} \int_{a}^{a_{1} + a_{2}} \int_{a}^{a_{1} + a_{1}} \int_{a}^{a_{1} + a_{2}} \left(\left(bd^{3}p^{3} + 3ad^{2}p^{2}v - 3bdpv^{2} - av^{3} \right) \operatorname{Cos}[px] + \left(ad^{3}p^{3} - 3bd^{2}p^{2}v - 3adpv^{2} + bv^{3} \right) \operatorname{Sin}[px] \right)$

 $+\frac{p^{4}t^{41pha}}{\text{Gamma}[1+4alpha]}\left(\left(4adp(dp-v)v(dp+v)+b\left(d^{4}p^{4}-6d^{2}p^{2}v^{2}+v^{4}\right)\right)\text{Cos}[px]+\left(4bdpv\left(-d^{2}p^{2}+v^{2}\right)+a\left(d^{4}p^{4}-6d^{2}p^{2}v^{2}+v^{4}\right)\right)\text{Sin}[px]\right)$

• Aproximación de la solución de una ecuación de advección-difusión tiempo fraccionaria mediante Método de Iteración Variacional

En la implementación del Método de Iteración Variacional, se emplearon los operadores L_n calculados anteriormente con las respectivas potencias de t que se obtuvieron del proceso algebraico, para poder expresar así la iteración 4 denotada $u_4(x,t)$ equivalente a Vsol4 t0 = t:

```
\begin{split} t1 &= \frac{t^{2-alpha}}{Gamma[2-alpha]}; \\ t2 &= t^{2}; \\ t3 &= \frac{t^{3-2alpha}}{Gamma[4-2alpha]}; \\ t4 &= \frac{t^{3-alpha}}{Gamma[4-alpha]}; \\ t5 &= t^{3}; \\ t6 &= \frac{t^{4-3alpha}}{Gamma[5-3alpha]}; \\ t7 &= \frac{t^{4-2alpha}}{Gamma[5-2alpha]}; \\ t8 &= \frac{t^{4-alpha}}{Gamma[5-alpha]}; \\ t9 &= t^{4}; \end{split}
Vsol4 = FullSimplify[L0 + 4L1t0 - 6L1t1 + 3L2t2 + 4L1t3 - 8L2t4 + 2/3L3t5 - L1t6 + 3L2t7 - 3L3t8 + 1/24L4t9]
```

 $b\operatorname{Cos}[px] + a\operatorname{Sin}[px] - 4pt((bdp + av)\operatorname{Cos}[px] + (adp - bv)\operatorname{Sin}[px]) + \frac{pt^{4-3alpha}}{\operatorname{Gamma}[5-3alpha]}((bdp + av)\operatorname{Cos}[px] + (adp - bv)\operatorname{Sin}[px]) - \frac{4pt^{3-2alpha}}{\operatorname{Gamma}[4-2alpha]}((bdp + av)\operatorname{Cos}[px] + (adp - bv)\operatorname{Sin}[px]) + \frac{6pt^{2-alpha}}{\operatorname{Gamma}[2-alpha]}((bdp + av)\operatorname{Cos}[px] + (adp - bv)\operatorname{Sin}[px]) + \frac{6pt^{2-alpha}}{\operatorname{Gamma}[2-alpha]}((bdp + av)\operatorname{Cos}[px] + (adp - bv)\operatorname{Sin}[px]) + \frac{3p^{3}t^{4-alpha}}{\operatorname{Gamma}[5-alpha]}((bd^{3}p^{3} + 3ad^{2}p^{2}v - 3bdpv^{2} - av^{3})\operatorname{Cos}[px] + (ad^{3}p^{3} - 3bd^{2}p^{2}v - 3adpv^{2} + bv^{3})\operatorname{Sin}[px]) + \frac{3p^{3}t^{4-alpha}}{\operatorname{Gamma}[5-alpha]}((bd^{3}p^{3} + 3ad^{2}p^{2}v - 3bdpv^{2} - av^{3})\operatorname{Cos}[px] + (ad^{3}p^{3} - 3bd^{2}p^{2}v - 3adpv^{2} + bv^{3})\operatorname{Sin}[px]) + 3p^{2}t^{2}((2adpv + b(dp - v)(dp + v))\operatorname{Cos}[px] + (-2bdpv + a(dp - v)(dp + v))\operatorname{Sin}[px]) - \frac{8p^{2}t^{3-alpha}}{\operatorname{Gamma}[4-alpha]}((2adpv + b(dp - v)(dp + v))\operatorname{Cos}[px] + (-2bdpv + a(dp - v)(dp + v))\operatorname{Sin}[px]) + \frac{4p^{4}t^{4}\left((4adp(dp - v)v(dp + v) + b\left(d^{4}p^{4} - 6d^{2}p^{2}v^{2} + v^{4}\right)\right)\operatorname{Cos}[px] + (4bdpv\left(-d^{2}p^{2} + v^{2}\right) + a\left(d^{4}p^{4} - 6d^{2}p^{2}v^{2} + v^{4}\right)\operatorname{Sin}[px] \right)$

B.2 Códigos computacionales MATLAB

B.2.1 Derivada de Grünwald-Letnikov

Se empleó el software MATLAB para visualizar la definición derivada según la definición de Grünwald-Letnikov. para una función cualquiera, como la encontrada en [?]:

```
function [w,dy]=glfdiff(y,t,alpha)
h=(t(2)-t(1));
dy(1)=0;
y=y(:);
t=t(:);
w=zeros(length(t));
w=1;
for j=2:length(t),
    w(j)=w(j-1)*(1-(alpha+1)/(j-1));
```
Para su ejecución se debe ingresar la información necesaria como los intervalos sobre los cuales se trabaja y la función que se quiere derivar, como resultado "w" entrega el vector correspondiente a los pesos de la derivada fraccional, y 'dy" la derivada.

```
t=0:0.001:pi;
y=exp(-t).*sin(3*t+1);
[w,dy]=glfdiff(y,t,0.5);
plot(t,dy)
```

Para obtener los coeficientes que acompañan a los términos de la derivada de Grünwald-Letnikow

```
function [bc] = bin_coeff (a,n)
    bc0 = 1.0;
    bc = zeros(1,n);
    bc(1) = (1-(1+a)/1)*bc0;
    for i=2:n
        bc(i)=(1-(1+a)/i)*bc(i-1);
    end
end
```

Lo anterior se ocupa en la siguiente función, que también permite determinar la derivada de GL :

```
function [HU] = sum_GL (U,a,Nf)
    bc = bin_coeff (a,Nf);
    p = length(U);
    if p > Nf
        k = Nf;
    else
        k = p;
    end
    HU = 0.0;
    for j=1:k
        HU = HU + bc(j)*U(p+1-j);
    end
end
```

B.2.2 Simulación empleando Diferencias Finitas

```
clear all;
close all;
% número de nodos
n=6;
m=4;
% dominio temporal y espacial
xi=0; ti=0; tf=1; xf=1*pi;
% tamaño de paso
dx=xf/(n-1);
dt=tf/(m-1);
t=ti:dt:tf;
```

```
x=xi:dx:xf;
%constantes
alpha=0.9;
D=1;
V=1;
a=1;
b=1;
p=1;
%incorporación de constante de difusión y velocidad
P = D*dt^alpha/dx^2;
Q = V*dt^alpha/dx;
Lt=length(t);
Lx=length(x);
%condición inicial
u0 = @(x) a*sin(p*x)+b*cos(p*x);
u = zeros(Lx,Lt);
u(:,1) = u0(x);
%Condición de frontera
u(1,1:Lt)=0;
u(Lx,1:Lt)=0;
A = zeros(n,n);
B = zeros(n,1);
Nf=n;
for j=1:n
    for i=1:m-1
        U = zeros(1,j);
        for ii=1:j
            U(ii) = u(ii,i);
        end
        HU = sum_GL(U,alpha,Nf);
        B(i) = -HU;
    end
 %Formación de la matriz A y B
    A(1,1) = (1+2*P+Q);
    A(1,2) = -(P);
    B(1) = B(1)+(P+Q)*u(j,1);
    for i=2:n-1
        A(i,i-1) = -(P+Q);
        A(i,i)= 1+2*P+Q;
        A(i,i+1) = -(P);
    end
    A(n,n-1) = -(P+Q);
    A(n,n) = 1+2*P+Q;
    B(n)
             = B(n)+(P)*u(j,end);
    X = A \setminus B;
    for l=2:m
        u(j,1) = X(1-1);
    end
end
% Gráficos:
figure(1);
surf(x,t,u')
xlabel x; ylabel t; zlabel u(x,t)
```

B.2.3 Simulación empleando Descomposición de Adomian

```
clc;
clear all;
% tamaño de la malla
n=20;
m=10;
% dominio temporal y espacial
xi=0;
ti=0;
tf=1;
xf=1*pi;
% tamaño de paso
dx=xf/(n-1);
dt=tf/m;
t=ti:dt:tf;
x=xi:dx:xf;
%constantes
alpha=1;
a=1;
b=1;
D=1;
V=1;
p=1;
Lt=length(t);
Lx=length(x);
u=zeros(Lx,Lt); %aproximación por descomposición de Adomian
for j=1:Lt
            %condiciones de contorno tipo Dirichlet
            u(1,j)=0;
            u(Lx,j)=0;
            for i=2:Lx-1
                       LO(i)=a*sin(p*x(i))+b*cos(p*x(i));
                       L1(i)=-p*((b*D*p+a*V)*cos(p*x(i))+(a*D*p-b*V)*sin(p*x(i)));
                       L2(i)=p^2*((2*a*D*p*V+b*(D*p-V)*(D*p+V))*cos(p*x(i))+
                                            (-2*b*D*p*V+a*(D*p-V)*(D*p+V))*sin(p*x(i)));
                       L3(i) = -p^{3*}((b*D^{3*p^{3}+3*a*D^{2*p^{2*V-3*b*D*p*V^{2}-a*V^{3}})*cos(p*x(i))+
                                            (a*D^3*p^3-3*b*D^2*p^2*V-3*a*D*p*V^2+b*V^3)*sin(p*x(i)));
                       L4(i) = p^{4*}((4*a*D*p*(D*p-V)*V*(D*p+V)+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}P^{2}+D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}P^{2}+D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}P^{2}+D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}P^{2}+D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2}+D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))*cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-2*D^{4}))+b*(D^{4*}p^{
                                            (4*b*D*p*V*(-D<sup>2</sup>*p<sup>2</sup>+V<sup>2</sup>)+a*(D<sup>4</sup>*p<sup>4</sup>-6*D<sup>2</sup>*p<sup>2</sup>*V<sup>2</sup>+V<sup>4</sup>))*sin(p*x(i)));
                       u(i,j)=LO(i)+L1(i)*t(j)^{alpha/gamma(1+alpha)+L2(i)*t(j)^{(2*alpha)/gamma(1+2*alpha)+}
                                            L3(i)*t(j)^(3*alpha)/gamma(1+3*alpha)+L4(i)*t(j)^(4*alpha)/gamma(1+4*alpha);
                                            %forma de la solución por AD
            end
end
u=u';
figure(1)
mesh(x,t,u)
xlabel x; ylabel t; zlabel u(x,t)
```

B.2.4 Simulación empleando método de Iteración Variacional

clc; clear all; % tamaño de la malla

```
n=20;
m=10;
% dominio temporal y espacial
xi=0;
ti=0;
tf=1;
xf=1*pi;
% tamaño de paso
dx=xf/(n-1);
dt=tf/m;
t=ti:dt:tf;
x=xi:dx:xf;
%constantes
alpha=1;
a=1;
b=1;
D=1;
V=1;
p=1;
Lt=length(t);
Lx=length(x);
w=zeros(Lx,Lt); %aproximación por método de iteración variacional
for j=1:Lt
        %condiciones de contorno tipo Dirichlet
        w(1,j)=0;
        w(Lx,j)=0;
        for i=2:Lx-1
                LO(i)=a*sin(p*x(i))+b*cos(p*x(i));
                L1(i)=-p*((b*D*p+a*V)*cos(p*x(i))+(a*D*p-b*V)*sin(p*x(i)));
                L2(i)=p^2*((2*a*D*p*V+b*(D*p-V)*(D*p+V))*cos(p*x(i))+
                               (-2*b*D*p*V+a*(D*p-V)*(D*p+V))*sin(p*x(i)));
                L3(i) = -p^{3*}((b*D^{3*p^3+3*a*D^2*p^2*V-3*b*D*p*V^2-a*V^3)*cos(p*x(i))+
                               (a*D^3*p^3-3*b*D^2*p^2*V-3*a*D*p*V^2+b*V^3)*sin(p*x(i)));
                L4(i) = p^{4*}((4*a*D*p*(D*p-V)*V*(D*p+V)+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*\cos(p*x(i))+b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}p^{2*}V^{2}+V^{4}))*b*(D^{4*}p^{4}-6*D^{2*}P^{2*}V^{2}+V^{4}))
                               (4*b*D*p*V*(-D<sup>2</sup>*p<sup>2</sup>+V<sup>2</sup>)+a*(D<sup>4</sup>*p<sup>4</sup>-6*D<sup>2</sup>*p<sup>2</sup>*V<sup>2</sup>+V<sup>4</sup>))*sin(p*x(i)));
                w(i,j)=L0(i)+4*L1(i)*t(j)-6*L1(i)*t(j)^(2-alpha)/gamma(3-alpha)+
                               3*L2(i)*t(j)^2+4*L1(i)*t(j)^(3-2*alpha)/gamma(4-2*alpha)-
                              8*L2(i)*t(j)^(3-alpha)/gamma(4-alpha)+2/3*L3(i)*t(j)^3-
                              L1(i)*t(j)^{(4-3*alpha)/gamma(5-3*alpha)+}
                              3*L2(i)*t(j)^(4-2*alpha)/gamma(5-2*alpha)-
                              3*L3(i)*t(j)^(4-alpha)/gamma(5-alpha)+1/24*L4(i)*t(j)^4;
                              %forma de la solución por MIV
        end
end
figure(2)
w=w';
surf(x,t,w)
xlabel x; ylabel t; zlabel u(x,t)
```