

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Aproximación de derivadas fraccionarias mediante momentos ortogonales

Por

Gastón Vergara Hermosilla

Profesor Guía

Dr. Stefan Berres

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco - 28 de septiembre de 2018

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

Dr. Stefan Berres

Profesor informante:

Dr. Ramón Becar

Profesor informante:

Dr. Emilio Cariaga

Evaluador externo:

Dr. Aníbal Coronel

Ministro de fe:

Dra. Pilar Molina Valenzuela

Temuco, 7 de Septiembre de 2018.

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente a:

- 1. Dios
- 2. Mi familia; Mona, Libertad, Melinka y Vakito.
- Mis profesores inspiradores (en orden cronológico); Eduardo Stange (UV), Jesus Juyumaya (UV), Amalia Pizarro (UV), Stefan Berres (UCT) y Emilio Cariaga (UCT).
- 4. Mi Jefe; Don Juan Moncada.
- 5. Mis amigos de la UCT; José Luis Barahona, Fernando Yevilao, Jacobo Hernandez, Stefan Berres.
- Mis amigos de otros tiempos-espacios; Tropita, Ilsia, René, Pedro, Erick, y Koko.
- 7. Mis compañeros del Magíster.

Abstract

In the present investigation, a theoretical and numerical study on the approximation through orthogonal moments of fractional derivatives in the Caputo sense of real functions is developed. An orthogonal moment, refers to a class of orthogonal polynomials with which it is possible to expand real functions. Based on this concept, we will develop analytical results that will allow us to make discrete implementations of Caputo fractional derivatives of the function. Finally, we present results of the numerical implementations of the analitical concepts developed previously, and we make qualitative interpretations about the relative errors of these approximations.

Keywords: Approximation, Orthogonal Moments, Fractional Derivatives, Caputo Derivative, Orthogonal Polynomials, Real Functions.

Resumen

En la presente investigación se desarrolla un estudio teórico y numérico sobre la aproximación mediante momentos ortogonales de derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo de funciones reales cuadrado integrables. Un momento ortogonal, hace referencia a una clase de polinomios ortogonales con la cual es posible expandir funciones reales cuadrado integrables. A partir de este concepto desarrollaremos resultados analíticos que nos permitirán hacer implementaciones discretas de derivadas fraccionarias de Caputo. Para finalizar, presentamos resultados de las implementaciones numéricas de los conceptos analíticos desarrollados anteriormente, y hacemos interpretaciones cualitativas sobre los errores relativos de estas aproximaciones.

Palabras Clave: Aproximación, Momentos Ortogonales, Derivadas Fraccionarias, Derivada de Caputo, Polinomios Ortogonales, Funciones Reales.

Índice general

Perfil	de Egreso	1
Agrae	decimientos	2
Índic	e de figuras	6
Índic	e de cuadros	9
Notae	ciones	10
Intro	ducción	12
De	sarrollo histórico	12
El	cálculo fraccionario	13
Int	erpretación geométrica y física	13
Ар	licaciones del cálculo fraccional	14
Pro	oblemas	14
Mc	tivación y descripción de está A.F.E.	16
Objet	tivos	18
Capít	culo 1. Definiciones básicas	19
1.	Funciones especiales	19
2.	Integración fraccionaria	22
3.	El operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville	23
4.	El operador diferencial fraccionario de Caputo	24
5.	Comparaciones y relaciones entre operadores	25
6.	Problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales fraccionarias no	
	lineales	27

Capít	tulo 2. Modelo Conceptual	28		
1.	Preámbulo	28		
2.	Difusión normal	30		
3.	Difusión anómala	36		
Capít	tulo 3. Modelo Matemático	41		
1.	Ecuación fraccionaria espacial de Fokker-Planck	41		
Capít	tulo 4. Aproximación mediante momentos ortogonales	43		
1.	Polinomios ortogonales	43		
2.	Aproximación de funciones mediante momentos ortogonales.	45		
3.	Aproximación de derivadas de orden arbitrario mediante momentos			
	ortogonales.	47		
4.	Aproximación numérica de derivadas fraccionarias por momentos			
	ortogonales.	49		
Capít	tulo 5. Resultados	51		
1.	Visualización gráfica de aproximación de derivadas fraccionarias	52		
2.	Errores relativos con $\varepsilon(v)$	55		
3.	Errores relativos con $\varepsilon(N)$	60		
4.	Errores relativos con $\varepsilon(\nu, N)$	62		
Discu	Isión	67		
Ápen	dice A: Códigos computacionales	69		
Biblio	ografía	71		

Índice de figuras

1.1. Función Gamma con argumentos reales.	20
1.2. Ejemplo de funciones Mittag-Leffler con 2-parámetros, variando.	21
1.3. Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo, de ordenes 0.7 y 1.3 de la función $\sin(x)$.	25
2.1. Trayectorias de una caminata aleatoria en 2 y 3 dimensiones respectivamente.	31
5.1. Derivada fraccionaria de Caputo analítica de orden $\nu = 0.7$ (negro) y sus aproximaciones vía el momento ortogonal de Jacobi desplazado en el intervalo $[0,2]$ (considerando 40 nodos equiespaciados en $[0,2]$), con parámetros $\mathfrak{a} = 1$ y $\mathfrak{b} = 2$, y con dimensiones $\mathbb{N} \in \{3, 4, 5, 6\}$ respectivamente en la función (a) $\exp(\mathfrak{x})$.	53
5.2. Derivada fraccionaria de Caputo analítica de orden $\nu = 0.7$ (negro) y sus aproximaciones vía el momento ortogonal de Jacobi desplazado en el intervalo $[0,2]$ (considerando 40 nodos equiespaciados en $[0,2]$), con parametros $\mathfrak{a} = 1$ y $\mathfrak{b} = 2$, y con dimensiones $N \in \{3, 4, 5, 6\}$ en las funciones (b) $\sin(x)$, (c) $\cos(x)$, (d) x^{10} , (e) x^5 .	54
5.3. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, con orden $\nu \in [0, 5]$ aplicada a todas funciones test, en dimensión $N = 15$.	55
5.4. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de	

tipo 2, con orden $\nu \in [0, 5]$ aplicada a todas funciones test, en dimensiones N = 10 en (b) y N = 5 en (c).565.5. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas, aplicadas a la función sin(x), con orden $\nu \in [0, 5]$, considerando los distintos momentos ortogonales, desplazados en [0, 2], con dimensiones $N \in \{10, 13\}$, en (a) y (b) respectivamente. 585.6. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas, aplicadas a la función sin(x), con orden $\nu \in [0, 5]$, considerando los distintos momentos ortogonales, desplazados en [0, 2], con dimensiones $N \in \{14, 15\}$, en (c) y (d) respectivamente. 595.7. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, en dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, aplicada a todas funciones test, con orden $\nu = 0.7$. 60 5.8. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, en dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, aplicada a todas funciones test, con ordenes $v \in \{1.3, 2.6\}$, en (c) y (d) respectivamente. 61 5.9. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas, aplicadas a la función sin(x), con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, considerando el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2] de tipo 3, con ordenes $\nu \in \{0.7, 1.3, 2.6\}$. 62 5.10- Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, 63 con ordenes $\nu \in [0, 5]$, y aplicada a las función test $\exp(x)$. 5.11.- Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo

analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado

en [0, 2], de tipo 2, con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes $\nu \in [0, 5]$, y aplicada a las funciones test (de izquierda a derecha y en orden descendente) (b) $\sin(x)$, (c) $\cos(x)$, (d) x^{10} , (e) x^5 . 64

- 5.12.- Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas aplicadas a la función sin(x), con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes $\nu \in [0, 5]$, considerando el momento ortogonal (a) \mathcal{B}_1 , desplazado en [0, 2]. 65
- 5.13.- Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas aplicadas a la función sin(x), con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes v ∈ [0, 5], considerando los distintos momentos ortogonales, desplazados en [0, 2] (de izquierda a derecha y en orden descendente) (b) B₂, (c) B₃, (d) B₄, (e) B₅, (f) B₆, (g) B₇. 66

Índice de cuadros

5.1. Funciones test	51
5.2. Derivadas fraccionarias de Caputo de funciones test.	51
5.3. Conjunto de momentos ortogonales	52
5.4. Códigos computacionales de distintos polinomios ortogonales desplazados.	69
5.5. Códigos computacionales de implementaciones gráficas de Cápitulo 5.	70

Notaciones

Símbolo	Significado
$\Gamma(z)$	Función Gamma aplicada en z ,
$E_{\alpha}(z)$	Función Mittag-Lefler de un parámetro aplicada en z ,
$E_{\alpha,\beta}(z)$	Función Mittag-Lefler de dos parámetros aplicada en z ,
$_1F_1(a,b;z)$	Función hipergeométrica confluente o función Kummer,
n!!	Semifactorial de n, definido por $\prod_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} (n - 2k)$,
Jα	Operador integral fraccionario de Riemann-Liouville de orden α ,
$^{RL}D^{\alpha}$	Operador derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α ,
D ^α	Operador derivada fraccionaria de Caputo de orden α ,
$\frac{\partial}{\partial t}$	Operador derivada parcial respecto a variabe t,
$f^{(n)}$	Derivada de f n – ésima respecto a x ,
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Polinomio de Jacobi con parámetros α , β de grado n ,
$P_{L,\mathfrak{n}}^{(\alpha,\beta)}(x)$	Polinomio de Jacobi desplazado con parámetros α , β de grado n ,
$C_{L,n}^{\alpha}(x)$	Polinomio de Gegenbauer desplazado con parámetro α , de grado n ,
$T_{L,n}(\mathbf{x})$	Polinomio de Chebyshev de tipo 1 desplazado de grado \mathfrak{n} ,
$U_{L,n}(\mathbf{x})$	Polinomio de Chebyshev de tipo 2 desplazado de grado \mathfrak{n} ,
$V_{L,n}(\boldsymbol{x})$	Polinomio de Chebyshev de tipo 3 desplazado de grado ${\mathfrak n},$
$W_{L,n}(\mathbf{x})$	Polinomio de Chebyshev de tipo 4 desplazado de grado \mathfrak{n} ,
$P_{L,n}(x)$	Polinomio de Legendre desplazado de grado n ,
\mathcal{A}	Conjunto de familias de polinomios ortogonales sobre $[a, b]$,
a << b	\mathfrak{a} es significativamente menor que \mathfrak{b} ,

Símbolo	Significado
a >> b	\mathfrak{a} es significativamente mayor que \mathfrak{b} ,
$\lceil \nu \rceil$	función parte entera de $\nu + 1$,
$a \sim b$	a tiene un valor similar a b ,
$\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$	\mathfrak{a} tiene un valor aproximado al de \mathfrak{b} ,
$\mathfrak{a} \propto \mathfrak{b}$	\mathfrak{a} tiene un valor proporcional al de \mathfrak{b} ,
M^{T}	Transpuesta de la matriz \mathcal{M} ,
$\ \cdot\ , \ \cdot\ _2$	Norma euclideana de \mathbb{R}^n ,
$\langle a \rangle$	Promedio de la cantidad a,
δ_{ij}	Función delta de Kronecker, la cual toma los valores 0 si $\mathfrak{i}\neq\mathfrak{j},$
	y 1 si $i = j$.

Introducción

La presente actividad formativa equivalente se enmarca en las áreas de analísis numérico y cálculo fraccionario. En específico, trataremos algunos tópicos sobre el analísis numérico de derivadas de funciones de orden fraccionario. El cálculo fraccionario es un teoría de integrales y derivadas de orden real o complejo. Esta es una generalización del cálculo clásico, y por tanto se heredaran muchas de sus propiedades básicas. El intenso desarrollo de esta área del cálculo durante las últimas decadas, ha ofrecido nuevas e interesantes herramientas a la investigación de ciencias exactas y aplicadas.

Desarrollo histórico

Los inicios del cálculo fraccionario se remontan a las cartas de Leibniz a L'hopital en 1695, en donde discutían la notación para la diferenciación de orden 1/2. Leibniz escribía: "por lo tanto, se deduce que $d^{\frac{1}{2}}$ es igual a $x\sqrt{dx : x}$. Esto es aparentemente una paradoja, de la cual un día se extraerán consecuencias útiles" [3].

Hoy en día, no solo fracciones, sino también números reales y complejos son considerados como ordenes de diferenciación. Sin embargo, el nombre "*cálculo fraccionario*" se mantiene para la teoría general.

Múltiples contribuciones a la teoría de cálculo fraccionario fueron desarrolladas por matemáticos famosos durante los siglos XIX y XX, en donde se destacan: Laplace (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville (1832-1837), Riemann (1847), Grunwald (1867-1872), Letnikov (1868-1872), Heaviside (1892) y muchos otros [**6**]. Sin embargo, en los últimos 45 años estos tópicos han sido de particular interés. En 1974 se desarrollo en la University of New Haven, USA, la primera

conferencia especializada en cálculo fraccionario, de donde surgío material bibliográfico como [2, 3, 5, 8].

El cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario (ver [2]), es un nombre para la teoría de integrales y derivadas de orden arbitrario (llamadas integrales y derivadas fraccionarias), que unifica y generaliza la diferenciación de orden entero y la integración consecutiva de orden entero. En otras palabras, las derivadas fraccionaria e integrales fraccionarias, pueden ser consideradas como una "*interpolación*" de sucesiones infinitas de diferenciaciones de orden entero eintegraciones consecutivas de orden entero.

Interpretación geométrica y física

Las derivadas e integrales de orden entero tienen una interpretación física clara, lo que les permite describir diferentes conceptos en física clásica. Por ejemplo, la posición de un objeto móvil puede ser representada como una función del tiempo, donde la velocidad del objeto puede ser descrita mediante la primera derivada de la función, por otro lado, la aceleración del objeto puede ser descrita mediante la segunda derivada de la función. Las derivadas e integrales fraccionarias, al ser una generalización de las derivadas e integrales clásicas, se esperaría que tuvieran una interpretación mas amplia, sin embargo, no hay tal resultado en la literatura hasta ahora.

Algunos autores (Moshrefi-Torbati y Hammond [28]) consideran a los operadores fraccionarios como un filtro lineal, y buscan una interpretación geométrica en la geometría fractal. Como ejemplo, podemos considerar el conjunto fractal de Cantor y las redes ladder (series de resistencias y condensadores que pueden ser conectados con configuraciones diferentes). Es conocido que tanto la física como la geometría convencional, están restringidas a vecindades rígidas y dimensiones enteras; así, las funciones y procesos que caen entre dimensiones discretas, no tienen posibles descripciones, ejemplo de esto es el conjunto de Cantor con dimensión entre una recta y un punto.

Aplicaciones del cálculo fraccional

La primera aplicación de una semi-derivada (derivada de orden 1/2) es dada por Abel en 1823 (ver [**3**, **5**]). Esta aplicación del cálculo fraccionario es en relación con la solución de la ecuación integral para el problema de Tautochrone. Este problema trata sobre determinar una curva tal que, el tiempo de descenso de un punto (masa) que se desliza sin fricción, bajo la acción de la gravedad, a lo largo de dicha curva, sea independiente del punto de partida.

En las últimas décadas se ha probado que las derivadas e integrales fraccionarias son convenientes para describir fenómenos en física experimental, en concreto, propiedades de polímeros [2], pues los nuevos modelos de orden fraccional son más satisfactorios que los antiguos modelos de orden entero. Por otro lado, las derivadas fraccionarias son una excelente herramienta para describir la memoria y propiedades hereditarias de varios materiales y procesos, mientras que los modelos de orden entero descuidan tales efectos.

En sintesis, el cálculo fraccionario a encontrado múltiples aplicaciones en diferentes campos de la ciencia e ingeniería [**6**], incluyendo teoría de fractales, biología, finanzas y economía, física, sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales, tanto desde una perspectiva analítica como numérica. Cabe mencionar, que algunos problemas de viscoelasticidad fueron formulados y resueltos por M. Caputo [**2**] usando su propia definición de derivada fraccionaria.

Una aplicación importante de la derivación fraccionaria, y en la cual nos centraremos en el desarrollo del modelo conceptual de esta actividad formativa equivalente, tiene que ver con el concepto de difusión anómala, esto pues el modelo matemáticos está basado en ecuaciones diferenciales que involucran derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville.

Problemas

Sabemos que las derivadas e integrales de orden entero, están únicamente determinadas en el analisís clásico. Sin embargo, para las derivadas e integrales

fraccionarias la situación es mas complicada debido a la abundante cantidad de definiciones diferentes (ver [9]), las cuales no coinciden en general. Dado este problema, surge la pregunta: ¿Cuándo un operador es una derivada fraccionaria?. Una interesante respuesta fue formulada en 1975 por Bertran Ross [44], quien estableció un criterio que decide cuando un operador es una derivada fraccionaria. Décadas mas tarde, y considerando el gran número avances en el área, Ortigueira junto con Tenreiro-Machado en [43] mejoraron el criterio, el cual se basa en las siguientes propiedades:

- 1. El operador en cuestión debe ser lineal.
- 2. La derivada de orden cero, es la función misma.
- Si el orden de la derivada es un entero positivo, entonces la derivada coincide con la definción clásica.
- 4. El operador debe cumplir la regla de Leibniz generalizada¹.

Por otro lado se identifican dos enfoques del cálculo fraccionario [6], digamos, los enfoques continuos y discretos. El enfoque continuo se basa en la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, teniendo como punto de partida la fórmula integral de Cauchy (para detalles revisar [5]), mientras que el enfoque discreto, se basó en principio en la derivada fraccionaria de Grunwald-Letnikov. Como la derivada ordinaria es el límite de la diferencia entre cocientes, la derivada fraccionaria de Grunwald-Letnikov es definida como el límite de la diferencia hacia atrás de orden fraccionario (para detalles revisar [2]). En 2011, E. H. Doha y sus colaboradores, plantean otra perspectiva del enfoque discreto, ofreciendo aproximaciones eficientes de ecuaciones diferenciales en derivadas fraccionarias. En síntesis, Doha et. al. mezcló ideas de aproximación de funciones mediante polinomios ortogonales de Chebyshev de primer tipo con la derivada fraccionaria clásica de Caputo [38, 39]. Nuestro trabajo en adelante se centrará en esta perpectiva.

¹Para detalles ver Teorema 1.2.

Motivación y descripción de está A.F.E.

En la presente actividad formativa equivalente (A.F.E.) se pretende generar un método de aproximación eficiente para derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo de funciones cuadrado integrables². Para estó hemos considerado resultados de Doha et. al. en diversos polinomios ortogonales desplazados [**38**, **39**, **40**], logrando entender su perspectiva y obteniendo aproximaciones simultáneas de derivadas fraccionarias de funciones en un set de distintas familias de polinomios ortogonales desplazados, lo cual hemos llamado aproximación mediante momentos ortogonales. Por otro lado mencionamos que todos lo gráficos presentados en el presente trabajo son de elaboración propia.

A continuación describiremos brevemente cada capítulo de esta A.F.E.

En el Capítulo 1, introduciremos los conceptos básicos con los cuales desarrollaremos nuestras ideas de cálculo fraccionario, comenzando con algunas definiciones de funciones especiales. Posteriormente veremos los orígenes de los conceptos de integración fraccionaria, pasando por los conceptos de operadores diferenciales de Riemann-Liouville y Caputo, y siguiendo con las relaciones entre estos. Para cerrar este Capítulo presentamos algunos resultados existentes en la literatura sobre problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales.

En el Capítulo 2, presentamos el modelo conceptual de esta A.F.E., donde presentaremos los conceptos de difusión normal y anómala.

En el Capítulo 3, presentamos el modelo matemático de esta A.F.E., en el cual dentificaremos algunas ecuaciones diferenciales fraccionarias donde sería posible utilizar nuestras propuesta de aproximación de derivadas fraccionarias por momentos ortogonales.

En el Capítulo 4, introduciremos conceptos y resultados sobre polinomios ortogonales y presentaremos las ideas de aproximación de funciones por momentos

²Una función real f(x) es cuadrado integrable, si $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$.

¹⁶

ortogonales, aproximación de derivadas fraccionarias de funciones por momentos ortogonales.

Por último, en el Capítulo 5, presentaremos resultados de las implementaciones computacionales de nuestras ideas de aproximación por momentos ortogonales, donde se destacan distintas visulizaciones gráficas de los errores relativos en 2 y 3 dimensiones.

Objetivos

Objetivo general. Diseñar y validar un método de aproximación numérica de derivadas de orden arbitrario.

Objetivos específicos.

- 1. Determinar un método de aproximación analítica de derivadas de orden arbitrario.
- 2. Implementar y analizar una aproximación analítica de derivadas de orden arbitrario.
- 3. Determinar, implementar y validar una aproximación numérica de derivadas de orden arbitrario.

Capítulo 1

Definiciones básicas

En lo que sigue se presentan los conceptos básicos con los cuales desarrollaremos nuestras ideas de aproximación mediante momentos ortogonales en el capítulo 4 de esta A.F.E.

1. Funciones especiales

1.1. La función Gamma. La función Gamma, denotada por $\Gamma(z)$, es una generalización de la función factorial n!, i.e. $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$. Para argumentos complejos con parte real positiva está se define como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Por continuidad analitica la función puede ser extendida a todo el plano complejo a excepción de los puntos, 0, -1, -2, -3, -4 ..., donde tiene polos simples. Así, $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\} \longrightarrow \mathbb{C}.$

Algunas de las propiedades más importantes son

$$\begin{split} \Gamma(1) &= \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(z+1) &= z \Gamma(z), \\ \Gamma(n) &= (n-1)!, n \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(n+1/2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!, n \in \mathbb{N}. \end{split}$$
(1.1.1)

La función Gamma ha sido estudiada por muchos matemáticos. Existe una larga lista de buenas propiedades (ver, por ejemplo Gradshteyn y Ryzshik [1], pp. 933-938), pero para nuestros propósitos aquí, las fórmulas en (1.1.1) son suficientes.



FIGURA 1.1. Función Gamma con argumentos reales.

1.2. La función Mittag-Leffler. Al igual como la función Gamma es una generalización de la función factorial, la función Mittag-Leffler es una generalización de la función exponencial, primero introducida como función con 1-parámetro por la serie (Podlubny [2])

$$\mathsf{E}_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$
(1.2.1)

Tiempo después, la generalización a 2-parámetros es introducida por Agarwal en 1953 (ver [47]) mediante

$$\mathsf{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \ \beta > 0, \ z \in \mathbb{C},$$
(1.2.2)

la cual es de gran importancia para el cálculo fraccionario. Esta es llamada función de 2-parámetros de Mittag-Leffler.

Algunas de sus propiedades interesantes son (Podlubny [2])



FIGURA 1.2. Ejemplo de funciones Mittag-Leffler con 2-parámetros, variando.

$$E_{1,1}(z) = e^{z},$$

$$E_{2,1}(z^{2}) = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^{2}) = \sinh(z)/z,$$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z).$$
(1.2.3)

1.3. La función hipergeométrica confluente. La función

$${}_{1}F_{1}(a,b;z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{z^{k}}{k!}$$
(1.3.1)

es llamada función hipergeométrica confluente o función Kummer. La serie converge (ver Miller y Ross [3], p. 304) para $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{z} \in \mathbb{C}, -\mathfrak{b} \notin \mathbb{N}_0, |\mathfrak{z}| < \infty$.

OBSERVACIÓN 1. Recordemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$, así, dado $y = y_1 + iy_2 \in \mathbb{C}$ y $l \in \mathbb{N}$, tenemos

$$(\mathbf{y}_1 + \mathbf{i}\mathbf{y}_2) + \mathbf{l} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{l}) + \mathbf{i}\mathbf{y}_2.$$

OBSERVACIÓN 2. La función $_1F_1(a,b;z)$ es una generalización de la función exponencial, pues vemos que para el caso a = b, al seguir la definición se tiene

$$_{1}F_{1}(\mathfrak{a},\mathfrak{a};z) = \frac{\Gamma(\mathfrak{a})}{\Gamma(\mathfrak{a})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mathfrak{a}+k)}{\Gamma(\mathfrak{a}+k)}\frac{z^{k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{k!} = e^{z}.$$

Por otro lado, podemos comparar con la propiedad correspondiente (1.2.3) de la función de Mittag-Leffler.

Otras propiedades importantes de la función hipergemétrica confluente (Gradshteyn y Ryzshik [1], p. 1058) son

$${}_{1}F_{1}(a,b;0)) = 1,$$

$$\frac{d}{dz}{}_{1}F_{1}(a,b;z) = \frac{a}{b}{}_{1}F_{1}(a+1,b+1;z).$$
(1.3.2)

2. Integración fraccionaria

La fórmula de Cauchy para la integración repetida (ver Oldham y Speiner [5], p. 38, Poldlubny [2], p. 64) está dada por

$$J^{n}f(t) := \int_{a}^{t} dt_{n-1} \int_{a}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_{a}^{t_{1}} f(t_{0}) dt_{t_{0}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau,$$
(2.0.1)

para $n \in \mathbb{N}$, $a, t \in \mathbb{R}$, t > a. Si n es sustituido por un número real positivo α y (n-1)! por su generalización $\Gamma(\alpha)$, obtenemos una fórmula que podríamos considerar como integración fraccionaria.

DEFINICIÓN 1.1. Sean $\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$. Entonces el operador fraccionario

$$\mathbf{J}^{\alpha}\mathbf{f}(\mathbf{t}) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{\mathbf{t}} \mathbf{f}(\tau)(\mathbf{t}-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \qquad (2.0.2)$$

es conocido como la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α .

2.1. Propiedades. Por convención

$$\mathbf{J}^0\mathbf{f}(\mathbf{t}) := \mathbf{f}(\mathbf{t}),$$

i.e. $J^0 := Id$ es el operador identidad.

Otra propiedad es la linealidad

$$J^{\alpha}(\lambda f(t)+g(t))=\lambda J^{\alpha}(f(t))+J^{\alpha}(g(t)),\,\alpha\in\mathbb{R}_+,\,\lambda\in\mathbb{C}.$$

Si f(t) es continua para t $\geqslant 0$ tenemos las siguientes igualdades (Poldlubny [2], pp. 65-67)

$$\begin{split} &1. \ \lim_{\alpha \longrightarrow 0} J^{\alpha} f(t) = f(t), \\ &2. \ J^{\alpha} (J^{\beta} f(t)) = J^{\beta} (J^{\alpha} f(t)) = J^{\alpha + \beta} f(t)), \ \alpha, \ \beta > 0. \end{split}$$

3. El operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville

Teniendo ya definido el operador integral fraccionario, resulta razonable querer complementar esta idea a un operador diferencial fraccionario. Hay diferentes definiciones que no coinciden en general. En lo que sigue consideraremos dos de ellas, Operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville y de Caputo (Gorenflo y Mainardi [6], Poldlubny [2]).

DEFINICIÓN 1.2. Sean $\alpha > 0$, t > a, α , t, $a \in \mathbb{R}$. Entonces

$${}^{\mathsf{RL}}_{a}\mathsf{D}^{\alpha} := \frac{d^{n}}{dt^{n}} \mathfrak{j}^{n-\alpha} \mathfrak{f}(\mathfrak{t}), \qquad (3.0.1)$$

es conocido como el derivada fraccionaria de Riemann-Liouville o el operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville de orden α .

OBSERVACIÓN 3. El operador (3.0.1) es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria (2.0.2) (Gorenflo y Mainardi [6]), i.e.,

$$D^{\alpha}J^{\alpha} = Id.$$

Por convención se define

$$D^0 f(t) := f(t), \quad i.e. D^0 = Id.$$

4. El operador diferencial fraccionario de Caputo

Es esta sección, cosideramos un operador alternativo al operador fraccionario de Riemann-Liouville (3.0.1) introducido en 1967 por el matemático Italiano Caputo (ver Caputo [7]).

DEFINICIÓN 1.3. Sean $\alpha > 0$, t > a, α , t, $a \in \mathbb{R}$. El operador fraccionario

$$_{a}D^{\alpha} := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\\\ \frac{d^{n}}{dt^{n}} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$
(4.0.1)

es llamada el operador diferencial fraccionario de Caputo de orden α o derivada fraccionaria de Caputo.

EJEMPLO 1.1. Si consideramos a = 0, tenemos

$${}_{0}\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{x}^{\mathsf{b}} = \begin{cases} 0, & para \ \mathsf{b} < \alpha, \\ \frac{\Gamma(\mathsf{b}+1)}{\Gamma(\mathsf{b}+1-\alpha)} \mathsf{x}^{\mathsf{b}-\alpha} & para \ \mathsf{b} \ge \alpha. \end{cases}$$
(4.0.2)

OBSERVACIÓN 4. En las definiciones que hemos dado de operadores diferenciales fraccionarios, los términos \mathbf{a} y \mathbf{t} son llamados terminales inferiores y superiores respectivamente. En lo que sigue solo consideraremos el caso cuando $\mathbf{a} = 0$. Por simplicidad, como $\mathbf{t} > \mathbf{a} = 0$, el límite por la derecha 0^+ lo anotaremos solamente como 0. Por otro adoptaremos las notaciones

$$_{a}D^{\alpha} = D^{\alpha} y {}_{a}^{\mathsf{RL}}D^{\alpha} = {}^{\mathsf{RL}}D^{\alpha}.$$

OBSERVACIÓN 5. Al tomar $\mathbf{a} = -\infty$ y considerando funciones, y sus derivadas, con un comportamiento convergente (esto pues en la definición de derivada fraccionaria de Caputo surgiría una integral impropia) en $\mathbf{t} \longrightarrow -\infty$, obtenemos las mismas expresiones para las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo (Poldlubny [2], p. 80), es decir

$${}^{\mathsf{RL}}_{-\infty}\mathsf{D}^{\alpha}_{\mathsf{t}}\mathsf{f}(\mathsf{t}) =_{-\infty} \mathsf{D}^{\alpha}_{\mathsf{t}}\mathsf{f}(\mathsf{t}) = \frac{1}{\Gamma(\mathfrak{n}-\alpha)} \int_{-\infty}^{\mathsf{t}} \frac{\mathsf{f}^{(\mathfrak{n})}(\tau)}{(\mathsf{t}-\tau)^{\alpha+1-\mathfrak{n}}} \mathsf{d}\tau.$$

5. Comparaciones y relaciones entre operadores

En esta sección haremos una comparación y presentaremos relaciones entre las derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville. Las demostraciones de los resultados y observaciones pueden ser consultados en (Poldlubny [2]) y (Gorenflo y Mainardi [6]).

OBSERVACIÓN 6. Sean f(x) una función tal que ^{RL}D^{α} y D^{α} existen, y m = $[\nu]$. Entonces, en general

$${}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(x) \neq \mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(x).$$

En la Figura 1.3 se visualizan las gráficas de las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo, de distinto orden de la función $sin(\mathbf{x})$.



FIGURA 1.3. Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo, de ordenes 0.7 y 1.3 de la función sin(x).

En la Figura 1.3 notamos diferencias entre los operadores de Riemann-Liouville, y además podemos ver que la diferencia entre estos operadores no es constante. Ahora, al considerar ejemplos analíticos tenemos

EJEMPLO 1.2. Si consideramos la función f(x)=c, para algún $c\in \mathbb{R}^{\times},$ tenemos

$${}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \frac{\mathsf{c}}{\Gamma(1-\alpha)}\mathsf{x}^{-\alpha} \neq \mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x}) = 0.$$
25

Mientras que, si consideramos $f(x) = x^3 y 0 < \alpha < 3$, tenemos

$$^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x})=\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x})=\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)}\mathsf{x}^{3-\alpha}.$$

En relación a la observación y ejemplo precedente, presentamos los siguientes resultados [2]

PROPOSICIÓN 1.1. Sean f(x) una función tal que ${}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}$ y D^{α} existen, y $\mathfrak{m} = \lceil \alpha \rceil$. Si f(x) es tal que $f^{(s)}(0) = 0$, donde $s = 0, 1, 2, ..., \mathfrak{m} - 1$, entonces

$${}^{\mathsf{RL}}\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x}).$$

Por otro lado, la relación que existe entre el operador diferencial de Caputo y el de Riemann-Liouville, se presenta en el siguiente teorema

TEOREMA 1.1. Sean x > 0, $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Entonces,

$$\mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x}) =^{\mathsf{RL}} \mathsf{D}^{\alpha}\mathsf{f}(\mathsf{x}) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mathsf{x}^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \mathsf{f}^{(k)}(0).$$

OBSERVACIÓN 7. El teorema anterior implica que los operadores fraccionarios de Caputo y Riemann-Liouville, coinciden sí, y solo si, las primeras m - 1derivadas de f(0) son 0.

COROLARIO 1.1. La siguiente relación entre los operadores fraccionarios de Caputo y Riemann-Liouville sigue

$$D^{\alpha}f(x) =^{\mathsf{RL}} D^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k}}{k!} f^{(k)}(0)\right).$$

COROLARIO 1.2 (Regla de Leibniz Generalizada). Sean x > 0, $\alpha > 0$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Si f(t) y g(t) tienen todas sus derivadas continuas en [0, x], entonces

$$D^{\alpha}f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} {\binom{m}{k}}^{\mathsf{RL}} D^{\alpha-k}(f(x)) \cdot g^{k}(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (f(x)g(x))^{(k)}(0) \cdot g^{k}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (f(x)g(x)) - \sum_{k=0}^{$$

6. Problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales

En lo que sigue consideraremos la existencia y unicidad del siguiente problema de valor inicial de ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales, lo cual esta motivado por el estudio de distintos modelos matemáticos de viscoelasticidad, electroquímica, control, medios porosos, electromagnetismo, etc. [**30**]

$$D^{\alpha}(f(t)) = x(t, D^{\beta}(f(t))), \quad t \in (0, 1]$$

$$f^{(k)}(0) = n_k, \qquad k = 0, 1, ..., m - 1,$$
 (6.0.1)

donde $\mathfrak{m} - 1 < \alpha < \mathfrak{m}, \, \mathfrak{n} - 1 < \beta < \mathfrak{n}, \, \mathfrak{m}, \, \mathfrak{n} \in \mathbb{N}, \, \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m} - 1, \, \mathsf{D}^{\alpha}$ denota la derivada fraccionaria de Caputo y $\mathfrak{x} \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathbb{R}).$

TEOREMA 1.2. Sean $n-1 < \beta < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$. Asumamos que

- 1. $\mathbf{x}: [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable,
- 2. $\mathbf{x}(0,0) = 0$ y $\mathbf{x}(\mathbf{t},0) \neq 0$ en un subintervalo compacto de (0,1], y
- 3. existen l > 1, $1 > \gamma > 0$ y $a(t) \in C([0, 1], [0, \infty])$ tales que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \sup_{\mathbf{t}\in[0,1]} \int_0^{\mathbf{t}} (\mathbf{t}-\mathbf{s})^{\alpha-\beta-1} \mathfrak{a}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \leqslant 1-\gamma,$$
$$0 < \mathsf{R} := \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \sup_{\mathbf{t}\in[0,1]} \int_0^{\mathbf{t}} (\mathbf{t}-\mathbf{s})^{\alpha-\beta-1} |\mathbf{x}(\mathbf{s},0)| d\mathbf{s} < \infty,$$

y para cada $h, g \in C([0,\infty))$ con $0 \leq |h(t)|, |g(t)| \leq \frac{1}{\gamma} R$ para $t \in [0,1],$

$$|x(t,h(t)) - x(t,g(t))| \leqslant a(t)|g(t) - h(t)|, \quad para \ t \in [0,1].$$

Entonces (6.0.1) tiene una única solución.

La demostración de este resultado puede ser consultada en [31].

Capítulo 2

Modelo Conceptual

Lo que sigue son extractos del articulo Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones del profesor Damián Hernández, para detaller revisar [48].

1. Preámbulo

El fenómeno de difusión se da comunmente en la naturaleza, y consiste principalmente en un mecanismo que transporta materia u otra cantidad física de un lugar a otro en un determinado espacio. Dicho mecanismo tiene caracteristicas que dependen tanto de las propiedades físicas del medio, por ejemplo la estructura geométrica y la temperatura del espacio donde se lleva a cabo, como la interacción propia entre la sustancia que se difunde y la sustancia en la cual ocurre la difusión.

El proceso que da origen a la difusión es un proceso aleatorio o estocástico, lo cual se aprecia de forma clara en el ejemplo paradigmático de este fenómeno, el movimiento Browniano. Dicho movimiento consiste en el desplazamiento irregular e impredecible de pequeñas partículas suspendidas en la superficie de un fluido, y fue explicado en 1905 por Albert Einstein en un importante artículo titulado: On the movement of small particles suspended in stationary liquids required by the molecular-kinetic theory of heat. En este trabajo, Einstein utilizó la hipótesis atómica de la materia y la herramienta de las caminatas aleatorias [12], para encontrar la relación que existe entre dicho fenómeno y la ecuación de difusión. Entre los principales resultados del artículo, se encuentra que el desplazamiento cuadrado promedio recorrido por una partícula suspendida en la superficie de un fluido, crece de forma lineal en el tiempo, es decir: $\langle r^2(t) \rangle \propto t$, donde r(t) denota el desplazamiento de la partícula en el tiempo t, y los corchetes denotan

el promedio de esta cantidad. Este es una de las características principales de la difusión normal, y viene dada como una consecuencia del *teorema del límite central*. De manera sencilla, este resultado establece que la distribución de probabilidad que define a una suma de variables aleatorias independientes, en nuestro caso los desplazamientos de las partículas, distribuidas igualmente y con segundo momento finito, se aproxima a una distribución Gaussiana cuando la cantidad de variables aleatorias que se suman es muy grande.

Entre los muchos ejemplos de fenómenos naturales cuya dinámica está descrita a través de procesos difusivos normales, podemos mencionar: la propagación de calor en medios homogéneos [13], el movimiento de fluidos incompresibles en medios porosos homogéneos [15], reacciones químicas en solución [16] y el movimiento de impurezas y partículas cargadas en sólidos cristalinos [14].

Por otro lado, desde la segunda década del siglo XX se han encontrado muchos sistemas tanto físicos como biológicos, donde el desplazamiento cuadrado promedio recorrido por la sustancia que se difunde crece con el tiempo de la siguiente forma: $\langle r^2(t) \rangle \propto t^{\gamma}$, donde tenemos dos casos, para $\gamma > 1$ se conoce como superdifusión y para $\gamma < 1$ se conoce como subdifusión. Ambos casos fueron nombrados por la comunidad científica como difusión anómala.

En contraste con el significado literal de su nombre, la difusión anómala es un fenómeno que se da de manera común en la naturaleza, y al igual que la difusión normal, su estudio y aplicaciones rebasan el ámbito de la física. Como herramienta para la descripción y modelación de diversos sistemas complejos, la difusión anómala ha sido útil en el estudio de la estructura interna de células vivas [19], la caracterización de la manera en la que distintas especies de animales encuentran alimento [18], y en la descripción del movimiento del agua o petróleo en reservorios o yacimientos altamente desordenados [17].

2. Difusión normal

Una de las maneras más frecuentes de estudiar y modelar un proceso difusivo es a través de caminatas aleatorias. Un caminante aleatorio se puede pensar como una partícula puntual que realiza una serie de desplazamientos aleatorios en un espacio y en un tiempo determinados. De manera más formal, una caminata aleatoria es un proceso estocástico definido (generalmente) sobre los puntos de una malla **d**-dimensional. Con normalidad, la variable que toma el papel del tiempo se considera como una variable discreta, y para cada unidad de tiempo τ , el caminante cambia su posición actual por otra posición cualquiera en la malla de acuerdo a una densidad de probabilidad $\lambda(\mathbf{x})$. Dicha densidad, la cual llamaremos distribución de saltos del caminante, define la probabilidad de que el caminante haga un salto descrito por \mathbf{x} , es decir, la probabilidad de que el caminante haga un salto con una magnitud $||\mathbf{x}||$ en la dirección $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$.

Si el caminante se encuentra en el origen en el instante t = 0, la posición en donde esta después de N saltos, esta descrita por

$$X_{\rm N} = \sum_{i=1}^{\rm N} x_i, \qquad (2.0.1)$$

donde el tiempo y el número de saltos se relacionan a través de $N = t/\tau$, y donde x_i , corresponde a la variable aleatoria asociada al i-ésimo salto. Notemos que al ser X_N una suma de las variables aleatorias, esta también es una variable aleatoría, por lo que el *problema fundamental de la teoría de las caminatas aleatorias, consiste en encontrar la densidad de probabilidad de la variable* X_N . Esta importante probabilidad, la cual denotaremos por P(t, r), nos dice la probabilidad de encontrar la caminante en la posición r al tiempo t, y para encontrarla, se debe plantear una ecuación que describa su evolución espacio-temporal para posteriormente resolverla.

Ahora, nótese que de la Ec.(2.0.1) y del hecho que conocemos la distribución de saltos del caminante, ya podemos obtener información sobre el comportamiento promedio de este particular movimiento. Debido a que los saltos están dados



FIGURA 2.1. Trayectorias de una caminata aleatoria en 2 y 3 dimensiones respectivamente.

por la misma distribución (variables aleatorias distribuidas idénticamente) y son independientes, dos a dos, podemos calcular la posición promedio y el desplazamiento cuadrado promedio que recorre el caminante después de N saltos

$$\langle X_{N} \rangle = \mathcal{N}(\mathbf{x}), \quad \langle \|X_{N}\|^{2} \rangle = \mathcal{N}\langle \|X_{N}\|^{2} \rangle + \mathcal{N}(\mathcal{N}-1)\|\langle \mathbf{x} \rangle\|^{2}.$$
(2.0.2)

Si además suponemos que la caminata es isótropa, esto es que la distribución de saltos solo depende de la magnitud del salto y no de la dirección, se tiene que $\langle \mathbf{x} \rangle = 0$ y que la Ec. (2.0.2) toma la siguiente forma después de escribir el número de saltos como función del tiempo

$$\langle \mathbf{X}(\mathbf{t}) \rangle = 0, \quad \langle \| \mathbf{X}_{\mathbf{N}} \|^2 \rangle = 2 d \mathsf{D} \mathbf{t}.$$
 (2.0.3)
31

La constante D denota al coeficiente de difusión y d es la dimensión del espacio donde se lleva a cabo la caminata. Es importante notar que para la deducción de la Ec.(2.0.3), no se utilizó la forma explícita de la distribución de saltos, pero se asumió de manera implícita la existencia del segundo momento de esta. Además, notemos que la segunda expresión de la Ec.(2.0.3) corresponde a una de las características principales de lo que denominamos como difusión normal.

Para obtener más información acerca del movimiento de un caminante aleatorio con las características antes mencionadas, y de su relación con la ecuación de difusión, supongamos que la caminata se da en una malla **d**-dimensional, y que los saltos se dan solamente entre puntos adyacentes de la malla con una probabilidad $\lambda(x) = 1/2d$. La probabilidad de encontrar al caminant en **r** en el tiempo $t = N\tau$, según [14], esta dada por

$$P(t,r) = \sum_{j=1}^{d} \frac{P(t-\tau, r-a\hat{e}_j)}{2d} + \sum_{j=1}^{d} \frac{P(t-\tau, r+a\hat{e}_j)}{2d}$$
(2.0.4)

donde \hat{e}_j son los vectores unitarios que definen la malla y **a** es la distancia entre dos puntos vecinos. Restando P(t - τ , r) de ambos lados de la Ec.(2.0.4), y al multiplicar y dividir por **a**², tenemos

$$P(t,r)-P(t-\tau,r) = \frac{a^2}{2d} \sum_{j=1}^d \left(\frac{P(t-\tau,r-a\widehat{e}_j) - 2P(t-\tau,r) + P(t-\tau,r+a\widehat{e}_j)}{a^2} \right)$$
(2.0.5)

La expresión que está entre paréntesis en el lado derecho de la Ec.(2.0.5), corresponde a la discretización de la segunda derivada en la dirección del j-ésimo eje coordenado de nuestra malla. Entonces, si dividimos ambos lados de la ecuación por τ , y tomamos limite cuando τ , $a \to 0$, de modo que $0 < \lim_{\tau, a \to 0} \frac{a^2}{\tau} < \infty$ y que $\lim_{\tau \to 0} N\tau = t$, la Ec. (2.0.5) genera la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial P(t,r)}{\partial t} = D\nabla^2 P(t,r), \quad D = \lim_{\tau, \alpha \to 0} \frac{a^2}{2\tau d}, \qquad (2.0.6)$$

donde el operador espacial, o Laplaciano, viene dado por $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots, \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$, con \mathbf{x}_i las coordenadas del vector \mathbf{r} de la Ec. (2.0.6). Aqui hay que poner enfasis en no confundir con los saltos de la Ec. (2.0.1).

La Ec.(2.0.6) es justamente la ecuación de difusión, y la constante D corresponde al coeficiente de difusión. De esta manera vemos que, en el límite continuo, la densidad de probabilidad de encontrar al caminante en el punto r del espacio al tiempo t, evoluciona de acuerdo con esta ecuación. Notemos que el coeficiente de difusión de la Ec.(2.0.6) no es exactamente el mismo que el de la Ec.(2.0.3), sobre todo debido a la existencia de los límites. Para evitar esto, y para ir introduciendo herramientas que necesitaremos en lo que sigue, se puede plantear una expresión que generaliza la Ec.(2.0.4) para el caso de una caminata que no está restringida a una malla, y donde el tiempo es una variable continua en lugar de discreta. Este tipo de caminatas se conocen como caminatas aleatorias en tiempo continuo o CATC, y para su descripción, es necesario introducir una nueva densidad de probabilidad a través de la cual sepamos la probabilidad de que el caminante dé un salto al tiempo t. Dicha densidad, la cual denotaremos por $\psi(t)$ y llamaremos distribución de tiempos de espera, y la variable aleatoria obtenida a través de esta corresponde al tiempo que transcurre entre dos saltos consecutivos, i.e. el tiempo que el caminante pasa en una posición determinada del espacio. En este caso, la ecuación que obedece la densidad de probabilidad P(t, r) se conoce como la ecuación de Montroll-Weiss [30], la cual toma la siguiente forma para una caminata aleatoria unidimensional

$$\mathsf{P}(\mathsf{t},\mathsf{x}) = \delta(\mathsf{x}) \int_{\mathsf{t}}^{\infty} \psi(\mathsf{t}') d\mathsf{t}' + \int_{0}^{\mathsf{t}} \psi(\mathsf{t}-\mathsf{t}') \left(\int_{\mathbb{R}} \lambda(\mathsf{x}-\mathsf{x}') \mathsf{P}(\mathsf{t}',\mathsf{x}') \right) d\mathsf{t}', \quad (2.0.7)$$

donde los saltos y los tiempos de espera, se consideran como variables aleatorias independientes, y donde en lugar del vector \mathbf{r} , utilizamos la coordenada \mathbf{x} para la posición del caminante. La razón de restringir el problema al caso unidimensional es para simplificar cálculos que siguen, aunque la metodología que se presenta a continuación se aplica de la misma forma al caso **d**-dimensional. Ahora bien, el

primer término de la parte derecha de la Ec.(2.0.7) corresponde a la probabilidad de que el caminate no se haya movido de su posición inicial, en este caso el origen, durante el intervalo de tiempo [0, t]. El segundo término corresponde a la probabilidad de que el caminante llegue al punto x al tiempo t, dado que se encontraba en x' al tiempo t' con t' < t.

La ecuación Ec.(2.0.7) consiste esencialmente de convoluciones entre las diferentes densidades de probabilidad que definen el problema, por lo que la forma estandar de resolverla es a través de las transformadas de Fourier y Laplace. Así, al aplicar dichas transformadas a la ecuación de Montroll-Weiss tenemos

$$\widehat{\mathsf{P}}(\mathsf{s},\mathsf{k}) = \frac{1 - \widehat{\psi}(\mathsf{s})}{\mathsf{s}} \cdot \frac{1}{1 - \widehat{\psi}(\mathsf{s})\widehat{\lambda}(\mathsf{k})},\tag{2.0.8}$$

donde

$$\widehat{\lambda}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \widehat{\psi}(s) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-s\mathbf{t}} \psi(t) dt.$$
(2.0.9)

Obsérvemos que al calcular las transformadas inversas de Fourier y Laplace de la expresión mostrada en la Ec.(2.0.8), obtenemos la forma explícita de P(t, x), lo cual resuelve el problema de la CATC generada por las densidades de probabilidad $\lambda(x)$ y $\psi(t)$. Por otro lado, el cálculo explícito de dichas transformadas inversas se puede obtener solamente para casos muy específicos de las distribuciones de saltos y de tiempos de espera, por lo que en la práctica, se suele trabajar en lo que usualmente se conoce como límite difusivo, el cual equivale a la región del espacio de Fourier-Lapalce donde k, s << 1. Como veremos a continuación, en el espacio (x, t), el límite difusivo correponde a escalas espacio-temporales mucho mayores a las que caracterizan la caminata, y por la tanto al límite cuando el número de saltos por el caminante es N >> 1.

Recordemos que para la deducción de la Ec.(2.0.6), se tomó el límite cuando el tamaño de los saltos y el tiempo transcurido entre éstos tendían a cero. Esto indica que la ecuación de difusión es una ecuación macroscópica, ya que describe la evolución de P(t, x) a escalas tanto temporales como espaciales mucho mayores a
las asociadas con los saltos del caminante. En el caso de CATC, las escalas espaciotemporales características de la caminata son el tiempo promedio que transcurre entre saltos consecutivos, y la magnitud promedio de éstos. Las cantidades que cuantifican dichas escalas son el segundo momento de la distribución de saltos $(\langle \mathbf{x}^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{x}^2 \lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x})$ y el primer momento de distribución de tiempos de espera $(\langle \mathbf{\tau} \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbf{\tau} \psi(\mathbf{\tau}) d\mathbf{\tau})$. Entonces, el límite difusivo de la Ec. (2.0.7) corresponde a $|\mathbf{x}| >> \sqrt{\langle \mathbf{x}^2 \rangle}$ y t $>> \langle \mathbf{\tau} \rangle$, y por tanto en el espacio de Fourier-Laplace

$$|\mathbf{k}| \ll 1/\sqrt{\langle \mathbf{x}^2 \rangle}, \ \mathbf{s} \ll 1/\langle \mathbf{\tau} \rangle.$$

Estas desigualdades permiten aproximar $\widehat{\psi}(s)$ y $\widehat{\lambda}(k)$ como

$$\widehat{\psi}(\mathbf{s}) \approx 1 - \langle \tau \rangle, \quad \widehat{\lambda}(\mathbf{k}) \approx 1 - \langle \mathbf{x}^2 \rangle / 2,$$
(2.0.10)

donde las expresiones mostradas en la ecuación anterior asumen de forma implícita que la caminata es isótropa, y corresponden a expansiones en series de Taylor alrededor de cero.

Ahora bien, si sustituimos la Ec.(2.0.10) en la Ec.(2.0.8) y reacomodamos términos obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{s}\widehat{\mathsf{P}}(\mathbf{s},\mathbf{k}) - 1 = -\mathsf{D}\mathbf{k}^2\widehat{\mathsf{P}}(\mathbf{s},\mathbf{k}). \tag{2.0.11}$$

En el espacio (\mathbf{x}, \mathbf{t}) , la Ec.(2.0.11) equivale al problema de valores iniciales definido por la Ec.(2.0.6) para $\mathbf{d} = 1$ con condición inicial $P(0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, donde $\delta(\mathbf{x})$ es la delta de Dirac, y donde el coeficiente de difusión está dado por $\mathbf{D} = \frac{\langle \mathbf{x}^2 \rangle}{2\langle \tau \rangle}$.

Como era de esperarse, la solución de dicho problema de condiciones iniciales está dada por la densidad de probabilidad Gaussiana

$$P(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \qquad (2.0.12)$$

ya que las suposiciones que se hicieron para obtener la Ec.(2.0.11), corresponden a las condiciones suficientes para que el teorema del límite central sea válido, y por lo tanto, la probabilidad de encontrar al caminante al tiempo t en un punto x debe de estar dada por la Ec.(2.0.12). Observemos que tras sustituir la Ec.(2.0.10) en

la Ec.(2.0.8), es posible calcular las transformadas inversas de Fourier y Laplace para la expresión resultante, lo cual da como resultado la Ec.(2.0.12). Finalmente, notemos que entre más grande es el tiempo promedio entre saltos consecutivos, más pequeño es el coeficiente de difusión, lo cual resulta en un proceso difusivo más lento. Por otro lado, entre más grande es el segundo momento de la distribución de saltos, el coeficiente de difusión es más grande y en consecuencia la difusión es más rápida.

3. Difusión anómala

La difusión anómala aparece en sistemas desordenados o en sistemas que se encuentran lejos del equilibrio termodinámico [6], donde las heterogeneidades del sistema, inducen un comportamiento anómalo en el desplazamiento cuadrado promedio de una partícula que se difunde en ese medio, y el cual generalmente toma la siguiente forma

$$\langle X^2(t) \rangle \propto t^{\gamma}, \gamma \neq 1.$$
 (3.0.1)

Los casos en los que $\gamma < 1$ se conocen como subdifusión, mientras que para $\gamma > 1$ tenemos superdifusión. De acuerdo con lo dicho en la sección anterior, la Ec.(3.0.1) implica que alguna de las condiciones necesarias para que el teorema del límite central sea válido no se cumple. Esto último puede suceder esencialmente de dos formas distintas:

- Cuando las distribuciones de probabilidad que definen la caminata aleatoria, i.e. las distribuciones de saltos y de tiempos de espera, son distribuciones libres de escala, también conocidas como distribuciones con colas anchas.
- 2. Cuando existen correlaciones de largo alcance entre los saltos del caminante.

En lo que sigue, nos limitaremos a discutir el caso correspondiente a las distribuciones libres de escala. Cuando las distribuciones que definen la caminata aleatoria decaen como una ley de potencias, i.e. $\lambda(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|^{-(1+\lambda)}$, $\psi(\mathbf{t}) \sim \mathbf{t}^{-(1+\beta)}$ para $|\mathbf{x}| >> \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{t} >> \mathbf{t}_0$, con \mathbf{x}_0 y \mathbf{t}_0 escalas de espacio y tiempo asociadas al problema que se está tratando, estas se consideren como libres de escala si los exponentes de ambas cumplen con las siguientes desigualdades: $1 < \alpha < 2$ y $0 < \beta < 1$, ya que estas garantizan que el segundo momento de la distribución de saltos y el primer momento de la distribución de tiempos de espera tomen valores infinitos.

En el caso de la distribución de saltos, la divergencia del segundo momento implica que los saltos de la caminata carecen de un tamaño característico, y por lo tanto, la magnitud de estos puede tomar valores de cualquier tamaño con una probabilidad no despreciable. De la misma manera, la divergencia de $\langle \tau \rangle$ implica que el tiempo transcurrido entre dos saltos consecutivos, puede tomar valores muy grandes con probabilidad no despreciable. Notemos que, al contrario de lo que sucede en difusión normal, en los casos que acabamos de describir la separación entre escalas microscópicas y macroscópicas no existe. En este contexto, el comportamiento anómalo mostrado en la Ec.(3.0.1) se puede entender de la siguiente forma: Supongamos una CATC unidimensional e isótropa, donde solamente la distribución de saltos es libre de escala, y los saltos son variables aleatorias independientes. En este tipo de caminatas, también llamadas vuelos de Lévy [7], el tiempo que tarda el caminante en dar N saltos se comporta como t ~ N $\langle \tau \rangle$, donde $\langle \tau \rangle$ es el tiempo promedio entre saltos consecutivos. Por otro lado, la posición que este ocupa después de N saltos está determinada por la suma de los desplazamientos del caminante (ver Ec.(2.0.1)). Ahora bien, de acuerdo con nuestras hipótesis y con la Ec.(2.0.2), el desplazamiento cuadrado promedio del caminante es formalmente infinito. Para evitar esta divergencia, cosa que nunca veríamos en un experimento real, necesitamos truncar la distribución de saltos de alguna forma. Para esto, consideremos la probabilidad de que el salto de longitud más grande encontrado en N saltos sea $x_c,$ donde x_c es un valor a determinar, y donde dicha probabilidad está dada por: $N\lambda(x_c)\left(\int_0^{x_c}\lambda(x)dx\right)^{N-1}$. En el límite N>>1,

el máximo de esta expresión ocurre cuando x_c es del orden de $x_c \sim N^{1/\alpha}$, con α el exponente de la distribución de saltos. Mediante este resultado y Ec.(2.0.2), es posible estimar el crecimiento del desplazamiento cuadrado promedio en función del número de saltos

$$\langle X_{N}^{2} \rangle \sim \int_{0}^{x_{c}} x^{2} \lambda(x) dx \sim N^{2/\alpha},$$
 (3.0.2)

donde al calcular la integral, se tomó en cuenta solamente la contribución de las colas de la distribución, es decir, la contribución asociada al decaimiento descrito por la ley de potencias. Finalmente, escribiendo el número de saltos en términos del tiempo se obtiene una expresión como la mostrada en la Ec.(3.0.1), donde, $\gamma = 2/\alpha > 1$ y de la cual se concluye que los vuelos de Lévy son un proceso superdifusivo.

En las últimas décadas, la teorá desarrollada alrededor de los vuelos de Lévy ha sido útil para entender y describir diversos fenómenos observados en nuestro entorno, tales como fenómenos de transporte en plasmas confinados [21] y física de fluidos [22].

Supongamos ahora que solamente la distribución de tiempos de espera es libre de escala. Entonces, de acuerdo con la Ec.(2.0.2), para poder dar una estimación del desplazamiento cuadrado promedio recorrido por caminante al tiempo t, necesitamos encontrar la dependencia del tiempo en función del número de saltos. Para esto, notemos que en una CATC, el tiempo que tarda un caminante en dar N saltos está dado por la siguiente suma

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{N} \tau_i, \tag{3.0.3}$$

donde τ_i es el tiempo que transcurre entre los saltos con índices i - 1 e i, y por lo tanto es la variable aleatoria obtenida de la distribución de tiempos de espera. Formalmente, el tiempo promedio que tarda el caminante en dar N saltos diverge, ya que $\langle \tau_i \rangle = \infty$. Para evitar esta divergencia, debemos truncar la distribución de tiempos de espera de la misma forma que lo hicimos para los vuelos de Lévy, donde en lugar de x_c tenemos que $t_c \sim N^{1/\beta}$, con β el exponente de la distribución de tiempos de espera. Esto último permite escribir

$$\langle t \rangle \sim N \int_0^{t_c} \psi(\tau) \tau \sim N^{1/\beta},$$
 (3.0.4)

donde al calcular la integral, se tomó en cuenta solamente la contribución de la cola de la distribución. Nótese que la Ec.(3.0.4) implica que el tiempo promedio que tarda el caminante en dar N saltos, está dominado por el tiempo de espera más grande de la suma mostrada en la Ec.(3.0.3), lo cual permite hacer la siguiente estimación: t ~ $\langle t \rangle \sim N^{1/\beta}$. De esta manera vemos que al escribir la segunda expresión de la Ec.(2.0.2) en términos del tiempo, obtenemos una expresión de la forma mostrada en la Ec.(3.0.1), donde $\gamma = \beta < 1$. Concluimos entonces que, cuando la distribución de tiempos de espera es libre de escala, obtenemos un proceso subdifusivo.

Entre los ejemplos donde este tipo de caminatas aleatorias han sido aplicadas de manera exitosa, destacan la propagación de contaminantes en aquíferos [1] y la propagación de partículas cargadas en sólidos amorfos [23, 24].

Ahora, al calcular el comportamiento asintótico de las expresiones mostradas en la Ec. (2.0.9), cuando s, k << 1 [25],

$$\overline{\Psi} \approx 1 - c_{\beta} s^{\beta}, \quad \overline{\lambda}(k) \approx 1 - c_{\alpha} |k|^{\alpha}, \qquad (3.0.5)$$

donde c_{β} y c_{α} son constantes que aparecen al hacer la expansión asintótica, y cuyas unidades físicas son: [tiempo]^{β} y [distancia]^{α} respectivamente. Entonces, sustituyendo la Ec.(3.0.5) en la Ec.(2.0.8) y reacomodando términos tenemos

$$s^{\beta}\overline{\mathsf{P}}(s,k) - s^{\beta-1} = -\mathsf{D}_{\alpha,\beta}|k|^{\alpha}\overline{\mathsf{P}}(s,k), \qquad (3.0.6)$$

donde $D_{\alpha,\beta} = c_{\alpha}/c_{\beta}$.

La Ec.(3.0.6) es una generalización de la Ec.(2.0.11), reduciendose a esta cuando $\alpha \rightarrow 2$ y $\beta \rightarrow 1$. Así, en el espacio (x, t) la Ec.(3.0.6) equivale a la siguiente generalización del problema de valores iniciales discutido en la sección anterior para la ecuación de difusión

$$D^{\beta} P(t, x) = (D_{\alpha, \beta})^{\mathsf{RL}} D^{\alpha} P(t, x), \qquad (3.0.7)$$
39

sujeta a $P(0, x) = \delta(x), 0 < \beta \leq 1, 1 < \alpha \leq 2, y$ donde $\delta(x)$ es la delta de Dirac, $D_{\alpha,\beta}$ es el coeficiente de difusión generalizado [27, 2].

La Ec.(3.0.7) se conoce como la ecuación de difusión fraccionaria, y es una generalización de la Ec.(2.0.6) que permite estudiar varios aspectos de la difusión anómala. En particular, cuando la derivada fraccionaria aparece solamente en las coordenadas espaciales ($\beta = 1, 0 < \alpha < 2$), esta describe la evolución espaciotemporal de la probabilidad de encontrar a un caminante que se mueve a través de vuelos de Lévy en un punto x al tiempo t. Por otro lado, cuando la derivada fraccionaria aparece solamente en la coordenada temporal, dicha ecuación es un buen modelo para procesos subdifusivos causados por trampas (regiones del espacio en las que el caminante puede quedar atrapado durante largos periodos del tiempo) u obstáculos [26]. Las ventajas de modelar procesos difusivos, ya sean anómalos o normales, en términos de la Ec.(2.0.6) o la Ec.(3.0.7), y en lugar de hacerlo a través de caminantes aleatorios, radica en que estas permiten plantear y resolver con mayor facilidad problemas con condiciones a la frontera, y problemas en los que la sustancia que se difunde es afectada por distintos tipos de campos, por ejemplo, campos gravitatorios o campos eléctricos. Además, permiten el uso de herramientas de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, tales como técnicas de transformadas y separación de variables [28].

Capítulo3

Modelo Matemático

1. Ecuación fraccionaria espacial de Fokker-Planck

La difusión anómala que hemos descrito previamente es uno de los problemas complejos más frecuentemente estudiados en el último tiempo. Hemos visto como la ecuación diferencial parcial clásica (orden entero) de difusión y de onda se extiende a la ecuación con tiempo y/o espacio fraccional por medio del operador fraccionario.

Un caso especial de difusión anómala esta dado por la siguiente ecuación diferencial fraccionaria espacial, la cual es conocida como ecuación de Fokker-Planck fraccionaria espacial, y describe el movimiento de soluto en un acuífero. Dicha ecuación es usualmente escrita de la siguiente manera [29]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -V(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + (D_+(x,t) + D_-(x,t))^{\mathsf{RL}} D_x^{\alpha} u(x,t) + s(x,t), (1.0.1)$$

y esta sujeta a las siguientes condiciones:

$$\begin{split} \mathsf{L} \leqslant \mathsf{x} \leqslant \mathsf{R}, \quad 0 < \mathsf{t} \leqslant \mathsf{T}, \\ \mathfrak{u}(\mathsf{x},\mathsf{t}=0) = \mathfrak{u}_0(\mathsf{x}), \quad \mathsf{L} \leqslant \mathsf{x} \leqslant \mathsf{R}, \\ \mathfrak{u}(\mathsf{L},\mathsf{t}) = \mathfrak{u}(\mathsf{R},\mathsf{t}) = 0, \quad 0 < \mathsf{t} \leqslant \mathsf{T}, \end{split}$$

donde V(x,t) > 0 describe la velocidad media del proceso advectivo, $\alpha > 0$ es el orden de la diferenciación fraccionaria, $D_+(x,t) = (1+\beta)D(x,t)/2$, $D_-(x,t) = (1-\beta)D(x,t)/2$, D(x,t) > 0 es el coeficiente de disperción, $y -1 \le \beta \le 1$ indica el peso relativo de la probabilidad de transición adelante hacia atrás. La función $u_0(x)$ es la condición inicial, las condiciones de frontera son nulas y la función s(x,t) es un término fuente/sumidero. En algunos casos, es posible usar ciertos

métodos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias [2]. Ejemplo de ello son: los métodos de transformada de Fourier, métodos transformada de Laplace, métodos de transformación Mellin, el método de imágenes, y el método de separación de variables. Sin embargo, al igual que en los casos de ecuaciones diferenciales de orden entero, existen pocos casos de ecuaciones diferenciales fraccionarias en las cuales es posible obtener soluciones analíticas explicitas, por lo cual resulta relevante para nosotros centrar nuestro estudio en desarrollar métodos numéricos eficientes que aproximen soluciones de ecuaciones tipo (1.0.1). En especifico, nos centraremos en métodos numericos para ecuaciones diferenciales fraccionarias que consideren derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo con

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0,$$

es decir, para modelos con la forma

$$0 = -V(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c(x,t)D_x^{\alpha}u(x,t) + s(x,t), \qquad (1.0.2)$$

con condiciones iniciales y de frontera dadas por

$$\begin{split} \mathsf{L} \leqslant \mathsf{x} \leqslant \mathsf{R}, \quad 0 < \mathsf{t} \leqslant \mathsf{T}, \\ \mathfrak{u}(\mathsf{x},\mathsf{t}=0) = \mathfrak{u}_0(\mathsf{x}), \quad \mathsf{L} \leqslant \mathsf{x} \leqslant \mathsf{R}, \\ \mathfrak{u}(\mathsf{L},\mathsf{t}) = \mathfrak{u}(\mathsf{R},\mathsf{t}) = 0, \quad 0 < \mathsf{t} \leqslant \mathsf{T}, \end{split}$$

donde V(x,t) > 0 y $c(x,t) = (D_+(x,t) + D_-(x,t))$. Notemos que la derivada fraccionaria ${}^{RL}D_x^{\alpha}u(x,t)$ de (1.0.1) es reemplazada por $D_x^{\alpha}u(x,t)$ en (1.0.2) [45, 46].

Capítulo 4

Aproximación mediante momentos ortogonales

1. Polinomios ortogonales

La importancia de los polinomios ortogonales reside en que son ampliamente usados en la teoría de ecuaciones diferenciales, en específico en la teoría de Sturm-Liouville, la teoría de espacios de Hilbert, la teoría de la aproximación de funciones y la mecánica cuántica.

DEFINICIÓN 4.1. Un conjunto de polinomios $\{P_i(x)\}_{i \in I}$, definidos en el intervalo [a, b], se denominan polinomios ortogonales, sí y sólo si,

$$\int_{a}^{b} w(x) P_{i}(x) P_{j}(x) dx = N_{i} \delta_{ij},$$

donde N_i es un factor de normalización, δ_{ij} es la función Delta de Kronecker, y w(x) es una aplicación denominada función peso o función ponderación.

Algunos ejemplos de polinomios ortogonales clásicos surgen como soluciones de ecuaciones diferenciales:

EJEMPLO 4.1. 1. Los polinomios de Legendre son definidos en [-1,1], están dados por

$$\mathsf{P}_{\mathsf{n}}(\mathsf{x}) = \frac{1}{2^{\mathsf{n}} \mathsf{n}!} \frac{\mathsf{d}^{\mathsf{n}}}{\mathsf{d} \mathsf{x}^{\mathsf{n}}} (1 - \mathsf{x}^2)^{\mathsf{n}},$$

y su función peso es w(x) = 1. Estos polinomios surgen como soluciones de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

43

 Los polinomios de Chebyshev de primer tipo son definidos en (-1,1), están dados por

 $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

y su función peso es $w(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}$, notemos que en los extremos del intervalo [-1,1]. Estos polinomios surgen como soluciones de la ecuación diferencial

 $(1-x^2)y'' - (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$

EJEMPLO 4.2. Los Polinomios de Jacobi con parámetros α , $\beta > -1$ son definidos en [-1, 1], y pueden ser generados mediante la relación de recurrencia

$$\begin{split} \mathsf{P}_{\mathsf{n}}^{(\alpha,\beta)}(x) = & \frac{(\alpha+\beta+2\mathfrak{n}-1)(\alpha^2-\beta^2+x(\alpha+\beta+2\mathfrak{n})(\alpha+\beta+2\mathfrak{n}-2))}{2\mathfrak{n}(\alpha+\beta+\mathfrak{n})(\alpha+\beta+2\mathfrak{n}-2)}\mathsf{P}_{\mathsf{n}-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ & -\frac{(\alpha+\mathfrak{n}-1)(\beta+\mathfrak{n}-1)(\alpha+\beta+2\mathfrak{n})}{\mathfrak{n}(\alpha+\beta+\mathfrak{n})(\alpha+\beta+2\mathfrak{n}-2)}\mathsf{P}_{\mathsf{n}-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \end{split}$$

donde $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ y $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\alpha+\beta+2}{2}x + \frac{\alpha-\beta}{2}$. Su función peso es $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ y surgen como soluciones de la ecuación diferencial

$$(1-\mathbf{x}^2)\mathbf{y}''-\mathbf{x}\mathbf{y}'+\mathbf{n}^2\mathbf{y}=0.$$

1.1. Polinomios desplazados de Jacobi. Con el objetivo de ampliar el uso de los polinomios de Jacobi definidos en (-1, 1) al intervalo (0, L), de modo de dar cabida a futuras aplicaciones temporales, presentamos los polinomios de Jacobi desplazados, los cuales surgen al hacer el cambio de variable $\mathbf{t} = \frac{2\mathbf{x}}{L} - 1$ a los polinomios $\mathsf{P}_{i}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{t})$. Los polinomios de Jacobi desplazados $\mathsf{P}_{i}^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2\mathbf{x}}{L}-1\right)$, los denotaremos por $\mathsf{P}_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x})$, y satisfacen la relación de ortogonalidad (para detalles revisar Doha et. al. en [40])

$$\int_0^L \mathsf{P}_{\mathsf{L},\mathsf{j}}^{(\alpha,\beta)}(x) \mathsf{P}_{\mathsf{L},\mathsf{k}}^{(\alpha,\beta)}(x) w_\mathsf{L}^{\alpha,\beta} \, dx = \mathsf{h}_\mathsf{k}, \tag{1.1.1}$$

donde
$$w_{L}^{\alpha,\beta}(x) = x^{\beta}(L-x)^{\alpha}$$
 y $h_{k} = \begin{cases} \frac{L^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)k!\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

Los polinomios de Jacobi desplazados $\mathsf{P}_{\mathsf{L},\mathfrak{i}}^{(\alpha,\beta)}(\mathfrak{x})$ de grado \mathfrak{i} pueden ser expresados mediante la expresión analítica $[\mathbf{40}]$

$$\mathsf{P}_{\mathsf{L},\mathfrak{i}}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathsf{k}=0}^{\mathfrak{i}} (-1)^{\mathfrak{i}-\mathsf{k}} \frac{\Gamma(\mathfrak{i}+\beta+1)\Gamma(\mathfrak{i}+\mathsf{k}+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\mathsf{k}+\beta+1)\Gamma(\mathfrak{i}+\alpha+\beta+1)(\mathfrak{i}-\mathsf{k})!\mathsf{k}!\mathsf{L}^{\mathsf{k}}} \mathbf{x}^{\mathsf{k}}, \quad (1.1.2)$$

donde $P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(0) = (-1)^{i} \frac{\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)i!}, P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(L) = \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)i!}.$ En lo que sigue centraremos nuestro interés en distintos polinomios ortogona-

En lo que sigue centraremos nuestro interes en distintos ponnomios ortogonales desplazados, los cuales han sido usados por distintos autores para aproximar y obtener soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias [**34**, **35**, **36**, **37**, **40**]. Las familias de polinomios con los cuales trabajaremos son mencionados a continuación, los polinomios desplazados de Gegenbauer (Ultraesfericos) $C_{L,i}^{\alpha}(\mathbf{x})$; los polinomios desplazados de Chebyshev de primer, segundo, tercer y cuarto tipo: $T_{L,i}(\mathbf{x})$, $U_{L,i}(\mathbf{x})$, $V_{L,i}(\mathbf{x})$ y $W_{L,i}(\mathbf{x})$; los polinomios desplazados de Legendre $P_{L,i}(\mathbf{x})$, y los polinomios desplazados de Jacobi $P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x})$. A continuación presentaremos relaciones de dependencia entre los polinomios desplazados mencionados recientemente y la familia de polinomios desplazados de Jacobi [**40**], de manera de poder replicar resultados de estos últimos;

$$1. \ C_{L,i}^{\alpha}(x) = \frac{i!\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(i + \alpha + \frac{1}{2})} P_{L,i}^{(\alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2})}(x),$$

$$2. \ T_{L,i}(x) = \frac{i!\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(i + \frac{1}{2})} P_{L,i}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x),$$

$$3. \ P_{L,i}(x) = P_{L,i}^{(0,0)}(x),$$

$$4. \ U_{L,i}(x) = \frac{(i + 1)!\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(i + \frac{3}{2})} P_{L,i}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x),$$

$$5. \ V_{L,i}(x) = \frac{2i!!}{(2i - 1)!!} P_{L,i}^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x),$$

$$6. \ W_{L,i}(x) = \frac{2i!!}{(2i - 1)!!} P_{L,i}^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x).$$

2. Aproximación de funciones mediante momentos ortogonales.

En la presente sección presentaremos algunos de los resultados clásicos de aproximación de funciones por polinomios ortogonales. Para esto consideremos un conjunto finito de polinomios ortogonales $\{P_0(x), P_1(x), ..., P_N(x)\}$ definidos en el intervalo [a, b], el cual llamaremos indistintamente como **momento ortogonal**.

TEOREMA 4.1. Sea f(x) una función continua en [a, b]. Entonces existen coeficientes $c_0, c_1, ..., c_N$ tales que la función

$$\mathsf{E} = \int_{a}^{b} w(x) \left(\sum_{n=0}^{N} c_n \mathsf{P}_{\mathsf{N}}(x) - \mathsf{f}(x) \right)^2 \mathrm{d}x$$

es mínima, respecto a dichos coeficientes.

Demostración.

Para calcular el mínimo se deriva E respecto a cada c_i y usando las relaciones de ortogonalidad obtenemos que los coeficientes están dados por

$$c_k = \frac{1}{C_k} \int_a^b w(x) P_k(x) f(x) dx, \quad \forall k = 0, ..., N,$$
 (2.0.1)

donde cada $C_k = \int_a^b w(x) P_k^2(x) dx.$

OBSERVACIÓN 8. El resultado precedente nos permite proponer $\sum_{n=0}^{N} c_n P_N(x)$ como una aproximación de f(x). donde los coeficientes c_n , podrían ser calculados a priori mediante (2.0.1).

2.1. Aproximación por momentos ortogonales de Jacobi. Una función f(x) cuadrado integrable¹ en (0, L), puede aproximarse en términos del momento ortogonal de Jacobi desplazado [40] como

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{N} a_j P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x),$$
 (2.1.1)

donde los coeficientes a_j , de manera análoga a la ecuación (2.0.1), están dados por

$$a_{j} = \frac{1}{h_{j}} \int_{0}^{L} w_{L}^{(\alpha,\beta)}(x) u(x) P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) dx, \ j = 0, 1, ...$$
(2.1.2)

 $^{1}\mathrm{Una} \ \mathrm{función} \ \mathrm{real} \ f(x) \ \mathrm{es} \ \mathrm{cuadrado} \ \mathrm{integrable} \ \mathrm{en} \ (0,L), \ \mathrm{si} \ \int_{(0,L)} |f(x)|^{2} dx < \infty.$

3. Aproximación de derivadas de orden arbitrario mediante momentos ortogonales.

En lo que sigue se propone una forma de aproximación de derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo de funciones f(x) cuadrado integrables en el intervalo [a, b]. Para esto \mathcal{A} denotará el conjunto formado por todas las familias de polinomios ortogonales sobre el intervalo [a, b] y $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una familia de polinomios ortogonales arbitraria .

Dada la linealidad del operador diferencial fraccionario de Caputo D^{ν} con $\nu > 0$, es natural pensar que si tenemos una aproximación de la función f(x) en [a, b] por polinomios ortogonales, digamos

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{n=0}^{m} c_n \mathsf{P}_n(\mathbf{x}), \tag{3.0.1}$$

entonces

$$\mathsf{D}^{\nu}\mathsf{f}(\mathsf{x}) \approx \sum_{n=0}^{m} c_n \mathsf{D}^{\nu}\mathsf{P}_n(\mathsf{x}). \tag{3.0.2}$$

En (3.0.2) identificamos que un paso clave para aproximar $D^{\nu}f(x)$ es conocer explícitamente la derivada fraccionaria de Caputo de cada $P_n(x)$ en la familia de polinomios ortogonales en cuestión, lo que a su vez nos lleva de manera natural a lo siguiente: si

$$\mathsf{P}_{\mathsf{n}}(\mathsf{x}) = \sum_{i=0}^{\mathsf{n}} \mathfrak{a}_i \mathsf{x}^i, \tag{3.0.3}$$

entonces

$$\mathsf{D}^{\nu}\mathsf{P}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{i}=0}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{i}}\mathsf{D}^{\nu}\mathfrak{x}^{\mathfrak{i}}, \qquad (3.0.4)$$

y como manejamos de manera explícita $D^\nu x^i,$ tenemos

$$\mathsf{D}^{\nu}\mathsf{P}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{i}=\lceil\nu\rceil}^{\mathfrak{n}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{i}} \frac{\Gamma(\mathfrak{i}+1)}{\Gamma(\mathfrak{i}+1-\nu)} \mathfrak{x}^{\mathfrak{i}-\nu}.$$
(3.0.5)

OBSERVACIÓN 9. Sean v > 0 y $p(x) \in A$ un polinomio de grado menor que $\lceil v \rceil$. Entonces

$$\mathsf{D}^{\nu}\mathsf{p}(\mathsf{x}) = 0. \tag{3.0.6}$$

Esta observación es una consecuencia directa de aplicar el operador fraccionario de Caputo a la expresión x^{β} con $\beta < [\nu]$.

OBSERVACIÓN 10. La derivada fraccionaria de orden $\nu > 0$ en el sentido de Caputo para $P_n(x) \in \{P_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ está dada por

$$D^{\nu}P_{n}(x) = \sum_{i=\lceil \nu \rceil}^{n} A(i,\nu)x^{i-\nu}.$$
(3.0.7)

donde $P_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{x}^i, \ y \ A(i, \nu) = a_i \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+1-\nu)}.$

OBSERVACIÓN 11. La derivada fraccionaria de orden $\nu > 0$ en el sentido de Caputo para $P_n(x) \in \{P_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ está dada por

$$D^{\nu}P_{n}(x) \approx \sum_{j=0}^{m} B(n,j)P_{j}(x).$$
 (3.0.8)

donde $B(n,j) = \sum_{i=\lceil \nu \rceil}^n A(i,\nu)b_j.$

Si consideramos la aproximación

$$\mathbf{x}^{\mathbf{i}-\mathbf{v}} \approx \sum_{\mathbf{j}=0}^{m} \mathbf{b}_{\mathbf{j}} \mathbf{P}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \tag{3.0.9}$$

e insertamos (3.0.9) en (3.0.7) la observación sigue. Estas observaciones tienen similitudes con los trabajos realizados en esta línea por Doha et. al. en [**39**, **40**], los cuales presentamos a continuación.

TEOREMA 4.2 (Doha et. al. en [**39**]). La derivada fraccionaria de orden v en el sentido de Caputo para los polinomios de Chebyshev desplazados esta dada por

$$D^{\nu} T_{L,i}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{\nu}(i,j) T_{L,i}(x), \quad i = \lceil \nu \rceil, \ \lceil \nu \rceil + 1, \dots$$
(3.0.10)

48

donde

$$S_{\nu}(i,j) = \sum_{k=\lceil \nu \rceil}^{i} \frac{(-1)^{i-k} 2i(i+k-1)! \Gamma(k-\nu+1/2)}{c_{j} L^{\nu} \Gamma(k+1/2)(i-k)! \Gamma(k-\nu-j+1) \Gamma(k+j-\nu+1)}$$

TEOREMA 4.3 (Doha et. al. en [40]). La derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden ν del polinomio de Jacobi desplazado de grado i esta dada por

$$D^{\nu} P_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} S_{\nu}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \alpha, \beta) P_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{i} = \lceil \nu \rceil, \lceil \nu \rceil + 1, \dots$$
(3.0.11)

donde

$$\begin{split} S_{\nu}(i,j,\alpha,\beta) = & \sum_{k=\lceil\nu\rceil}^{i} \frac{(-1)^{i-k}L^{\alpha+\beta-\nu+1}\Gamma(j+\beta+1)\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{h_{j}\Gamma(j+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)\Gamma(k-\nu+1)(i-k)!} \\ & \times \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^{j-l}\Gamma(j+l+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(l+k+\beta-\nu+1)}{\Gamma(l+\beta+1)\Gamma(l+k+\alpha+\beta-\nu+2)(j-l)!l!}. \end{split}$$

4. Aproximación numérica de derivadas fraccionarias por momentos ortogonales.

Para cerrar este capítulo presentaremos un algoritmo que nos permitirá hacer implementaciones numéricas de aproximaciones de derivadas fraccionarias de diversas funciones, basándonos en nuestras observaciones y en las familias de polinomios ortogonales vistas en las secciones anteriores.

ALGORITMO 4.1 (Berres, V. 2018). Dada una función $f(x) \in L^2[a, b]$, obtendremos una aproximación de su derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden v, siguiendo estos pasos:

- $$\label{eq:poly} \begin{split} \text{1. Seleccione una familia de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$ y un subconjunto de nodos $X=\{x_i\}_{i\in I}\subset[a,b]$.} \end{split}$$
- 2. Dada la aproximación

$$f(x_i) \approx \sum_{n=0}^{N} c_n P_n(x_i), \text{ en cada } x_i \in X$$
49

escriba $F_i = f(x_i) y$ forme la matriz $F = [F_0|F_1|...F_N]^T$, por otro lado considere $C = [c_0|c_1|...|c_N]$, $P_i = [P_0(x_i), P_1(x_i), ...P_N(x_i)]^T$, $P = [P_0|P_1|...|P_N]$, y forme el sistema matricial

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{F},\tag{4.0.1}$$

 $y \ obtenga$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^{-1}.\tag{4.0.2}$$

3. Calcule

$$D^{\nu}P = [D^{\nu}P_0|D^{\nu}P_1|...|D^{\nu}P_N], \qquad (4.0.3)$$

donde

$$\mathbf{D}^{\nu}\mathbf{P}_{i} = [\mathbf{D}^{\nu}\mathbf{P}_{0}(\mathbf{x}_{i}), \mathbf{D}^{\nu}\mathbf{P}_{1}(\mathbf{x}_{i}), ..., \mathbf{D}^{\nu}\mathbf{P}_{N}(\mathbf{x}_{i})]^{\mathsf{T}}.$$

4. Calcule

$$\mathsf{D}^{\nu}\mathsf{F} = \mathsf{C}\cdot\mathsf{D}^{\nu}\mathsf{P},\tag{4.0.4}$$

la cual corresponderá a la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden ν de la función f(x) en $X=\{x_i\}_{i\in I}\subset [a,b].$

Capítulo $\,5\,$

Resultados

En lo que sigue presentaremos implementaciones numéricas del algoritmo descrito en Capítulo 4. Para esto consideraremos el siguiente conjunto de funciones cuadrado integrables en $[a, b]^1$, con $a, b \in \mathbb{R}$, con las cuales haremos los distintos test numéricos

$f_1(x)$	$f_2(\mathbf{x})$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(\mathbf{x})$
$\exp(\mathbf{x})$	$\cos(x)$	$\sin(\mathbf{x})$	\mathbf{x}^{10}	χ^5

CUADRO 5.1. Funciones test

Las derivadas fraccionarias analíticas en el sentido de Caputo de orden $\nu > 0$ del conjunto de funciones test (Gorenflo y Mainardi [6]), esta dado por

f(x)	$D^{\nu}f(x)$
$\exp(\mathbf{x})$	$x^{\mathfrak{m}-\nu}E_{1,\mathfrak{m}-\nu+1}(x)$
$\cos(\mathbf{x})$	$\frac{1}{2}i^{m}x^{m}(E_{1,m-\nu+1}(\mathfrak{i}x)+(-1^{m})E_{1,m-\nu+1}(-\mathfrak{i}x))$
$\sin(\mathbf{x})$	$-\frac{1}{2}i^{m+1}x^{m}(E_{1,m-\nu+1}(ix) - (-1^{m})E_{1,m-\nu+1}(-ix))$
χ^{10}	$\frac{\Gamma(11)}{\Gamma(11-\nu)} \chi^{10-\nu}$
χ^5	$\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\nu)} x^{5-\nu}$

CUADRO 5.2. Derivadas fraccionarias de Caputo de funciones test.

donde $\mathfrak{m} = \lceil \nu \rceil$ y $\mathsf{E}_{i,j}(x)$ es la función de Mittag-Leffler de 2 parámetros.

 1 Una función f(x) es cuadrado integrable, si $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^{2}dx<\infty.$ 51

Por otro lado, los distintos momentos ortogonales, es decir las bases, con las cuales haremos las distintas expansiones polinomiales de las funciones test son presentadas en la siguiente tabla

	B_1		\mathbb{B}_2		B ₃		\mathcal{B}_4
$\{P_{L,i}^{(\alpha,\beta}$	$^{)}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}}$	$\{T_{L,\mathfrak{i}}$	$(\mathbf{x})\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}}$	$\{u_{L,i}$	$(\mathbf{x})\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}}$	$\{V_{L,i}$	$(\mathbf{x})\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}}$
	\mathfrak{B}_5		В	6	\mathcal{B}_{2}	7	
	$\{W_{L,i}(x$	$)\}_{i\in\mathbb{N}}$	$\{C_{L,i}^{\alpha}(x)\}$	$(i)_{i\in\mathbb{N}}$	$\{P_{L,i}(x$	$)\}_{i\in\mathbb{N}}$	

CUADRO 5.3. Conjunto de momentos ortogonales

Los cálculos de errores relativos se harán considerando vectores $V_e \in \mathbb{R}^n$, con n = 500, cuyas coordenadas estarán dadas por valores numéricos de expresiones analíticas exactas de las derivadas fraccionarias de nuestras funciones test, vectores $V_{app} \in \mathbb{R}^n$, cuyas coordenadas estarán dadas por valores numéricos de expresiones analíticas aproximadas, mediante momentos ortogonales, de las derivadas fraccionarias de nuestras funciones test y la norma l^2 de \mathbb{R}^n , donde n es el número de nodos equidistantes a considerar en [a, b], es decir,

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{||\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_{\mathrm{app}}||_2}{||\mathbf{V}_e||_2},$$

donde

$$||y||_2 = \sqrt{\sum_{\mathfrak{i}=1}^n y_\mathfrak{i}^2}, \ \, \mathrm{para \ cada \ } y \in \mathbb{R}^n.$$

1. Visualización gráfica de aproximación de derivadas fraccionarias

En esta sección daremos a conocer visualizaciones gráficas de la aproximación de derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo de distinto orden aplicadas a las funciones test mediante diferentes momentos ortogonales.

En la Figuras 5.1 y 5.2 se muestran comparaciones gráficas de la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden 0.7 de cada función test, considerando el momento ortogonal de Jacobi desplazado en el intervalo [0, 2], en dimensiones

 $N \in \{3, 4, 5, 6\}$, y su derivada fraccionaria analítica. En estas figuras podemos apreciar por "eye norm" que hay convergencia en cada una de las derivadas fraccionarias de nuestras funciones test, un analísis mas detallado de esto se hará en las secciones seguientes.



FIGURA 5.1. Derivada fraccionaria de Caputo analítica de orden v = 0.7 (negro) y sus aproximaciones vía el momento ortogonal de Jacobi desplazado en el intervalo [0,2] (considerando 40 nodos equiespaciados en [0,2]), con parámetros a = 1 y b = 2, y con dimensiones $N \in \{3, 4, 5, 6\}$ respectivamente en la función (a) exp(x).



FIGURA 5.2. Derivada fraccionaria de Caputo analítica de orden v = 0.7 (negro) y sus aproximaciones vía el momento ortogonal de Jacobi desplazado en el intervalo [0,2] (considerando 40 nodos equiespaciados en [0,2]), con parametros a = 1 y b = 2, y con dimensiones $N \in \{3, 4, 5, 6\}$ en las funciones (b) $\sin(x)$, (c) $\cos(x)$, (d) x^{10} , (e) x^5 .

2. Errores relativos con $\varepsilon(v)$

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestran gráficas que describen el comportamiento del error relativo de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo analíticas y sus aproximaciones en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado de tipo 2 con dimensiones 15, 10 y 5, con orden variable, aplicadas en nuestro set de funciones test.



FIGURA 5.3. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, con orden $\nu \in [0, 5]$ aplicada a todas funciones test, en dimensión N = 15.

En la Figura 5.3 se observa que hay un aumento del error relativo a medida que los valores de $\nu \in [0, 5]$ aumentan, lo cual se debería al hecho que las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo de los primeros $\lceil \nu \rceil - 1$ términos del momento



FIGURA 5.4. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, con orden $\nu \in [0, 5]$ aplicada a todas funciones test, en dimensiones N = 10 en (b) y N = 5 en (c).

ortogonal son nulos, esto pues

$$D^{\nu} x^{\mathfrak{b}} = \begin{cases} 0, & \text{para } \mathfrak{b} < \nu, \\ \frac{\Gamma(\mathfrak{b}+1)}{\Gamma(\mathfrak{b}+1-\nu)} x^{\mathfrak{b}-\nu} & \text{para } \mathfrak{b} \geqslant \nu. \end{cases}$$

En la Figura 5.6 se muestran gráficas que describen el comportamiento del error relativo de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo analíticas y sus aproximaciones, aplicadas a la función $sin(\mathbf{x})$, en los distintos momentos ortogonales con dimensiones 10, 13, 14, y 15, con orden variable. En estas figuras se observa se observa que hay un comportamiento similar en error relativo en cada uno de los momentos ortogonales, y vemos al igual que en caso de la Figura 5.3 un aumento del logaritmo del error relativo a medida que los valores de $\mathbf{v} \in [0, 5]$ aumentan.



FIGURA 5.5. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas, aplicadas a la función $\sin(x)$, con orden $\nu \in [0, 5]$, considerando los distintos momentos ortogonales, desplazados en [0, 2], con dimensiones $N \in \{10, 13\}$, en (a) y (b) respectivamente.



FIGURA 5.6. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas, aplicadas a la función sin(x), con orden $\nu \in [0, 5]$, considerando los distintos momentos ortogonales, desplazados en [0, 2], con dimensiones $N \in \{14, 15\}$, en (c) y (d) respectivamente.

3. Errores relativos con $\varepsilon(N)$

En las Figuras 5.7 y 5.8 se muestran gráficas que describen el comportamiento del error relativo de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo analíticas y sus aproximaciones, en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado de tipo 2, de orden $\nu \in \{0, 7, 1, 3, 2, 6\}$, con dimensiones variables, aplicadas en nuestro set de funciones test. En estas figuras observamos una disminución del error relativo a medida que que la dimensión del momento ortogonal se incrementa. Por otro lado, podemos apreciar como en los casos de $D^{\nu}x^{10}$ y $D^{\nu}x^{5}$ se produce un decaimiento abrupto en N = 10 y N = 5 respectivamente, para cada $\nu \in \{0.7, 1.3, 2.6\}$, lo cual se debe al hecho que al tratarse de derivadas fraccionarias de funciones polinomiales, estas alcanzan una aproximación via momentos ortogonales *casi exacta*.



FIGURA 5.7. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, en dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, aplicada a todas funciones test, con orden $\nu = 0.7$.



FIGURA 5.8. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0,2], de tipo 2, en dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, aplicada a todas funciones test, con ordenes $v \in \{1.3, 2.6\}$, en (c) y (d) respectivamente.

En la Figura 5.9 se muestran gráficas que describen el comportamiento del error relativo de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo analíticas y sus aproximaciones, aplicadas a la función sin(x), en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado de tipo 3, con ordenes $\nu \in \{0.7, 1.3, 2.6\}$, con dimensiones variables.

61



FIGURA 5.9. Errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas, aplicadas a la función sin(x), con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, considerando el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2] de tipo 3, con ordenes $\nu \in \{0.7, 1.3, 2.6\}.$

En la Figura 5.9 observamos una disminución del error relativo a medida que que la dimensión del momento ortogonal se incrementa. Por otro lado, podemos apreciar como en los casos $\nu \in \{0, 7, 1, 3, 2, 6\}$, hay una diferencia en el logaritmo del error relativo, la cual se debe a la perdida de los primeros $\lceil \nu \rceil - 1$ términos del momento ortogonal, como hemos explicado anteriormente. Por último, podemos concluir que la Figura 5.9 nos da evidencia que el decaimiento es más rápido si el orden $\nu < 2$.

4. Errores relativos con $\varepsilon(v, N)$

En las Figuras 5.10 y 5.11 se muestran gráficas en 3 dimensiones que describen el comportamiento del logaritmo en base 10 del error relativo de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo analíticas y sus aproximaciones, en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado de tipo 2, con orden y dimensiones variables, aplicadas en nuestro set de funciones test. En las subfiguras (a), (b) y (c) podemos apreciar que los menores errores relativos se dan cuando la cardinalidad del momento ortogonal es N = 15, alcanzo su mejor rendimiento en (N, v) = (15, 0.1). Por otro lado, en las subfiguras (d) y (e) observamos un decaimiento abrupto cuando N toma los valores 10 y 15, respectivamente, lo cual se debe, como hemos explicado anteriormente, al hecho que los polinomios alcanzan una aproximación *casi exacta* cuando la cardinalidad del momento ortogonal coincide con grado del polinomio. En estas subfiguras también podemos apreciar como al aumentar la cardinalidad de la base mas allá del grado del polinomio se produce un aumento en el valor del error relativo.



FIGURA 5.10. - Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes $\nu \in [0, 5]$, y aplicada a las función test $\exp(x)$.



FIGURA 5.11. - Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas en el momento ortogonal de Chebyshev desplazado en [0, 2], de tipo 2, con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes $\nu \in [0, 5]$, y aplicada a las funciones test (de izquierda a derecha y en orden descendente) (b) $\sin(x)$, (c) $\cos(x)$, (d) x^{10} , (e) x^5 .

En las Figuras 5.12 y 5.13 se muestran gráficas en 3 dimensiones que describen el comportamiento del logaritmo en base 10 del error relativo de las derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo analíticas y sus aproximaciones, aplicadas a la función sin(x), con orden y dimensiones variables, en los distintos momentos

ortogonales. En cada unas de las subfiguras podemos apreciar que los menores errores relativos se dan cuando la cardinalidad del momento ortogonal es N = 15, alcanzo su mejor rendimiento en $(N, \nu) = (15, 0, 1)$, y de manerá paralela, los mayores errores relativos se dan cuando la cardinalidad del momento ortogonal es N = 1, alcanzando sus peores rendimientos en vecindades cercanas de $(N, \nu) = (1, 5)$.



FIGURA 5.12. - Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas aplicadas a la función sin(x), con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes $v \in [0, 5]$, considerando el momento ortogonal (a) \mathcal{B}_1 , desplazado en [0, 2].



FIGURA 5.13. - Logaritmo de errores relativos de las derivadas fraccionarias de Caputo analíticas y aproximadas aplicadas a la función $\sin(x)$, con dimensiones variando entre los números enteros 1 y 15, con ordenes $\nu \in [0, 5]$, considerando los distintos momentos ortogonales, desplazados en [0, 2] (de izquierda a derecha y en orden descendente) (b) \mathcal{B}_2 , (c) \mathcal{B}_3 , (d) \mathcal{B}_4 , (e) \mathcal{B}_5 , (f) \mathcal{B}_6 , (g) \mathcal{B}_7 .

Discusión

Durante el transcurso de la elaboración de esta actividad formativa equivalente, han surgido varias ideas, resultados e interrogantes las cuales queremos dejar plasmadas a continuación.

 En los inicios de esta investigación surgió la idea de elaborar una familia de funciones reales con la forma

$$P_{n,k}(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{e^{x-x_j}-1}{e^{x_k-x_j}-1},$$

de tal modo que fuera posible expandir con ellas funciones continuas en intervalos de la forma [a, b], con $a, b \in \mathbb{R}$. Si bien fue posible establecer resultados analíticos que demostraban que la familia $\{P_{n,k}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ interpolaba funciones con las características deseadas, y que además era posible obtener aproximaciones analíticas de sus derivadas de orden arbitrario, los resultados de las implementaciones numéricas nos dejaron ver que los errores relativos de estas aproximaciones no daban respuesta a los objetivos de A.F.E., lo cual nos llevo a explorar otras técnicas de aproximación. Como trabajo a futuro se retomarán estos resultados, y se buscara o creara un contexto apropiado en el cual estas ideas den respuestas satisfactorias.

 Los resultados analíticos que hemos presentado en esta A.F.E., generalizan los resultados obtenidos por Doha et. al. en [38, 39, 40], y nos brindan una receta con la cual obtener futuras aproximaciones de derivadas fraccionarias por momentos ortogonales. Como trabajo a futuro se contempla usar esta receta para generar nuevas aproximaciónes en contextos de matemáticas aplicadas.

- Los resultados numéricos que hemos presentado en esta A.F.E., en especifico; las implementaciones gráficas en 3D, entregan un panorama general de las aproximaciones de derivadas fraccionarias por momentos ortogonales, en términos del orden (arbitrario) de la derivada y la dimensión del momento ortogonal. Como trabajo a futuro se pretende responder la pregunta: ¿Comó detectar la mejor combinación Base-Función?. Por otro lado, respecto a las implementaciones gráficas en 2D, hemos contemplado como trabajo a futuro trabajar en resultados que nos den información sobre la tasa de convergencia de dichos errores relativos.
- Por último, como trabajo a futuro se pretende cambiar la perspectiva de aproximaciones de derivadas fraccionarias por momentos ortogonales, por una perspectiva que contemple expansiones en series de Taylor, de tal modo de obtener expresiones analíticas de la derivada fraccionaria del residuo.

Ápendice A: Códigos computacionales

Los códigos computacionales (MATLAB 2017) mediante los cuales realizamos nuestras implementaciones númericas son de elaboración propia. Estos códigos fueron desarrollados siguiendo el algoritmo presentado en el Capítulo 4 y los resultados presentados por Doha et. al. en [**38**]. Los códigos MATLAB empleados en esta A.F.E. pueden ser descargados de manera libre y gratuita en la siguiente pagina web:

https://drive.google.com/open?id=1bvQe7u_C2rgd-2R4uSU4EL080Em9sZBH

Para evitar problemas de compilación de las rutinas, recomendamos la descarga de todos los archivos y su almacenamiento en una carpeta única. Por otro lado, mencionamos que las rutinas fueron creadas y ejecutadas en el software MATLAB, en su versión 2017. Para cerrar el ápendice presentamos los cuadros 5.4 y 5.5, los cuales tienes la lista de rutinas empleadas en nuestros resultados, especificando su uso y dependencia.

Rutina	Detalle	Dependencia
1 pljv.m	Implementación de pol. de Jacobi desplazado	Independiente
2 pltv.m	Implementación de pol. de Chebyshev tipo 1 desplazado	Depende de rutina 1.
3 pluv.m	Implementación vectorial de pol. de	Depende de rutina 1.
	Chebyshev tipo 2 desplazado	
4 plvv.m	Implementación de pol. de Chebyshev tipo 3 desplazado	Depende de rutina 1.
5 plwv.m	Implementación de pol. de Chebyshev tipo 4 desplazado	Depende de rutina 1.
6 plpv.m	Implementación de pol. de Legendre desplazado	Depende de rutina 1.
7 plcv.m	Implementación vectorial de pol. de Gegenbauer desplazado	Depende de rutina 1.

CUADRO 5.4. Códigos computacionales de distintos polinomios ortogonales desplazados.

Rutina	Detalle	Dependencia
8 midvplj.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Independiente.
	de orden ν de pol. de Jacobi desplazado	
9 midvplt.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Depende de rutina 8.
	de orden ν de pol. de Chebyshev tipo 1 desplazado	
10 midvplu.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Depende de rutina 8.
	de orden ν de pol. de Chebyshev tipo 2 desplazado	
11 midvplv.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Depende de rutina 8.
	de orden ν de pol. de Chebyshev tipo 3 desplazado	
12 midvplw.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Depende de rutina 8.
	de orden ν de pol. de Chebyshev tipo 4 desplazado	
13 midvplp.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Depende de rutina 8.
	de orden ν de pol. de Legendre desplazado	
14 midvplc.m	Implementación vectorial de derivada fraccionaria	Depende de rutina 8.
	de orden ν de pol. de Gegenbauer desplazado	
15 eDvFmultiple.m	Implementación de error relativo de derivada	Depende las cada una de
	fraccionaria de los distintos momentos ortogonales	las rutinas entre 1 y 14
	en una función test fija	
16 eDvFmultiF	Implementación de error relativo de derivada	Depende de cada una de
	fraccionaria de las distintas funciones test	de las rutinas entre 1 y 14
	en un momento ortogonal fijo	
17 tresda.m	Implementación de gráficas en 3D y perfiles	Depende de rutina 16
	en función del orden, y en función de la dimensión del	
	momento ortogonal en funciones tests, de manera simultánea	
18 tresdb.m	Implementación de gráficas en 3D y perfiles	Depende de rutina 15
	en función del orden, y en función de la dimensión, en	
	cada momento ortogonal, de manera simultánea	
19 grafdosa.m	Implementación gráfica de aproximación mediante momento	Depende de rutinas 1 y 8
	ortogonal de Jacobi en dimensiones 3, 4, 5 y 6	

CUADRO 5.5. Códigos computacionales de implementaciones gráficas de Cápitulo 5.
Bibliografía

- Gradshteyn I, Ryzshik I., Table of integrals, series, and products. Academic Press, New york, 1980.
- [2] Podlubny, I., Fractional differential equations. Academic Press, San Diego, 1999.
- [3] Miller, K., Ross, B., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- [4] Moshrefi-Torbati, M., Hammond J. K., Physical and geometrical interpretation of fractional operators. Elsevier Science, Great Britain, 1998.
- [5] Oldham K., Spanier J. The fractional calculus. Academic Press, New york-London, 1974.
- [6] Gorenflo, R., Mainardi F. Essentials of fractional calculus. Preprint submitted to MaPhySto Center, January, 2000.
- [7] Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frecuency independent. II, The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 13, 1967, pp. 529-539.
- [8] Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O., Fractional integrals and derivates. Gordon and Breach Publichiers, Amsterdam, 1993.
- Oliveira, E., Tenreiro J. A., A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. Mathematical Problems in Engineering Volume 2014, Article ID 238459, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2014/238459
- [10] Gómez, Victor. Riascos, Alejandro. Pérez, Alvaro. Fraccional Calculus. reviista de Ciencias, Vol. 4, No. 1 (2014).
- [11] Calderón, M. Rosales-Garcia, J. Guzmán-Cabrera, R. González-Parada, A. Alvarez, J. The diferential and integral fractional Calculus and its Applications. Acta Universitaria, Vol. 25, No. 2 (2015).
- [12] J. Rudnick y G. Gaspari, Elements of the random walk. Cambridge University Press, (2004).
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Heat equation, ((Heat equation)).
- [14] L. P. Kadano, Statistical physics: Statics, dynamics and renormalization. Word Scientific, (2000).
- [15] J. Bear, Dynamics of fluids in porous media. Dover Publications Inc. (1998).

⁷¹

- [16] P. L. Houston, Chemical kinetics and reaction dynamics. Dover Publications Inc. (2006).
- [17] D. Hernandez, M. Nunez-Lopez y J. X. Velasco-Hernandez, Telegraphic double porosity models for head transient behaviour in naturally fractured aquifers. Pre-publicación. (2006).
- [18] M. F. Shlesinger. Search research, Nature , Vol. 443 (2006).
- [19] M. Weiss, M. Elsner, F. Kartberg y T. Nilsson, Anomalous subdifusion is a measure for cytoplasmic crowding in living cells, Byophysical Journal, Vol. 87 (2004), 7277-7289.
- [20] E. Scalas, R. Goren o y F. Mainardi, Uncoupled continuous time-random walks Solutions and limiting behaviour of the master equation, Phys. Rev. E., Vol. 69 (2004).
- [21] D. del Castillo-Negrete, Non-difusive, non-local transport in uids and plasmas, Nonlinear Processes Geophys, Vol. 17 (2010) 1-9.
- [22] T.H.Solomon, E. R. Weeks y H. L. Swinney, Observation of anomalous dffusion and levy flights in a two-dimensional rotating flow, Phys. Rev. Lett., Vol. 71 (1993) 3975-3978.
- [23] H. Sher, E. Montroll, Anomalous transit time dispersion in amorphous solids, Phys. rev. B, Vol. 7 (1975) 2455-2477.
- [24] H. Sher, M. F. Slesinger, J. T. Bendler, *Time-scale invariance in transport and relaxation*, Physics Today, Vol. 44 (1991) 26-34.
- [25] R. Metzler, J. Klafer, The random walk guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, Physics Reports, Vol. 339, Num. 1 (2000) 1-77.
- [26] —, The restaurant at the end of the random walk recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, J. Phys. A Math. Gen., Vol. 37 (2004) 161-208.
- [27] R. Goren o y F. Mainardi, fractals and fractional calculus in continuum mechanics, Springer, (1997).
- [28] J. Crank, The mathematics of diffusion, Oxford University Press, (2004).
- [29] D. Benson, S. Wheatcraft y M. Meerschaert, The fractional-order governing equation of Lévy motion, Water Resouces Research, Vol. 36, Num. 6 (2000) 1413-1423.
- [30] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J. J.Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, (2006).
- [31] J. Deng, L. Ma, Existence and uniqueness of solutions of initial value problems for nonlinear fractional differential equations, Applied Mathematics Letters, (2010).
- [32] B. M. Vinagre, Modelado y Control de Sistemas Dinámicos caracterizados por Ecuaciones Íntegro-Diferenciales de Orden Fraccionario, Ph.D. dissertation, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, (2001).

- [33] R. Burden, D. Faires, Numerical Analysis, PWS, Boston (1985).
- [34] Abdelkawy, M. A., Taha, T. M. (2014). An operational matrix of fractional derivatives of laguerre polynomials. Walailak Journal of Science and Technology, 11(12), 1041-1055.
- [35] Akrami, M. H., Atabakzadeh, M. H., Erjaee, G. H. (2013). The operational matrix of fractional integration for shifted legendre polynomials. Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science, 37(A4), 439-444.
- [36] Bhrawy, A. H., Al-Shomrani, M. M. (2012). A shifted legendre spectral method for fractional-order multi-point boundary value problems. Advances in Difference Equations, 2012 doi:10.1186/1687-1847-2012-8
- [37] Bhrawy, A. H., Alghamdi, M. A. (2012). A shifted jacobi-gauss-lobatto collocation method for solving nonlinear fractional langevin equation involving two fractional orders in different intervals. Boundary Value Problems, 2012 doi:10.1186/1687-2770-2012-62
- [38] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Ezz-Eldien, S. S. (2011). A chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order. Computers and Mathematics with Applications, 62(5), 2364-2373. doi:10.1016/j.camwa.2011.07.024
- [39] Doha, E.H.- Bhrawy, A.H., Ezz-Eldien, S.S. (2011). Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations. Applied Mathematical Modelling, 35(12), 5662-5672. doi:10.1016/j.apm.2011.05.011
- [40] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Baleanu, D., Ezz-Eldien, S. S. (2013). On shifted jacobi spectral approximations for solving fractional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 219(15), 8042-8056. doi:10.1016/j.amc.2013.01.051
- [41] Isah, A., Phang, C. (2017). New operational matrix of derivative for solving non-linear fractional differential equations via genocchi polynomials. Journal of King Saud University
 Science, doi:10.1016/j.jksus.2017.02.001
- [42] Duarte, V., Trujillo, J., Rivero, M., Tenreiro Machado J., Baleanu, D., (2013). Fractional Calculus: A survey of useful formulas. European Physics Journal ST (JCR). Volume = 222.
- [43] Trujillo, J., Tenreiro Machado J., What is a fractional derivative?. Journal of Computational Physics 293 (2015) 4–13.
- [44] Ross, A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus, in: B. Ross (Ed.), Fractional Calculus and Its Applications, in: Lect. Notes Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1975, pp. 1–36.
- [45] I.M. Sokolov. Thermodynamics and fractional fokker-planck equations. Physical Review E, 63, 2001.

- [46] E. Barkai, R. Metzler, and J. Klafter. From continuous time random walks to the fractional fokker– planck equation. Physical Review E, 61(1), January 2000.
- [47] Agarwal, R. P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 236, 2031-2032, 1953.
- [48] Hernández, D. Miscelanea Matemática, 58, extraordinario. (2014), 37-51.

74





Métodos de colocación de polinomios ortogonales para aproximar derivadas fraccionarias

Gastón Vergara Hermosilla^{*}

Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas Universidad Católica de Temuco Temuco, Chile

Resumen

Es bien conocido que muchos fenómenos en varias ramas de la ciencia e ingeniería pueden ser descritos adecuadamente por modelos que involucran herramientas del cálculo fraccional. Es así, que diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) y resultados análiticos de la existencia y unicidad de soluciones han sido extensamente estudiadas por muchos investigadores, ver[1] y [2] por ejemplo. En general, la mayoría de las EDF's no tienen soluciones análiticas exactas, por lo cual la aproximación y los métodos numéricos deben ser empleados. De esta manera, el encontrar métodos precisos y eficientes para resolver EDF's se ha convertido en una linea activa de investigación desde hace varios años. En este trabajo presentaremos diferentes métodos de colocación de polinomios ortogonales desplazados que aproximan derivadas fraccionarias en el sentido de Caputo, los cuales nos permitirán exponer un algoritmo eficiente para resolver problemas de valor inicial de orden fraccionario lineales y no lineales. Además, mostraremos diferentes ejemplos numéricos con el objetivo de demostrar la validación y aplicabilidad de nuestro algoritmo.

Referencias

- [1] I, PODLUNBY, Fractional Differential Equations, Academic Press Inc, San Diego, CA, 1999.
- [2] M. AMAIRI, M. AOUN, S. NAJAR, M.N. ABDELKRIM A constant enclousure method for validating existence and uniqueness of the solution of an initial value problem for a fractional differential equation, Appl. Math. Comput. (2010). 2162-2168.
- [3] M. AMAIRI, M. AOUN, S. NAJAR, M.N. ABDELKRIM A constant enclousure method for validating existence and uniqueness of the solution of an initial value problem for a fractional differential equation, Appl. Math. Comput. (2010). 2162-2168.
- [4] E.H. DOHA, A.H. BHRAWY, S.S. EZZ-ELDIEN Efficient Chebyshev spectral methods for solving multi-term fractional orders differential equations, Applied Mathematical Modelling, Volume 35, (2011). 5662-5672.
- [5] A.H BHRAWY, M.A. ZAKY. Shifted fractional-order Jacobi orthogonal functions: Application to a system of fractional differential equations, Applied Mathematical Modelling, Volume 40, (2016). 832-845.

^{*}Parcialmente financiado por el Departamento de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Católica de Temuco, e-mail: coibungo@gmail.com

[6] A. ISAH, C. PHANG. New operational matrix of derivative for solving non-linear fractional differential equations via Genocchi polynomials, Journal of King Saud University - Science, (2017). In press.