



Facultad de Ingeniería

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Simulación de la propagación del frente de fuego en incendios forestales

Por

Noemí Cárcamo Mansilla

Profesor Guía

Dr. Stefan Berres

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de
Magíster en Matemáticas Aplicadas (Profesional).

Temuco - 12 de marzo de 2018

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física
COMISION EVALUADORA

Profesor Guía:

.....
Dr. Stefan Berres

Evaluador externo:

.....
Dr. Celso Navarro

Profesor informante:

.....
Dr. Billy Peralta

Profesor informante:

.....
Dra. Ximena Petit - Breuilh

Director del Programa (Ministro de fe):

.....
Dr. Emilio Cariaga

Temuco

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas.
Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

Abstract

The following report presents a mathematical model of surface forest fires, specifically studying the behavior of the propagation front of the fire considering parameters and variables which establish the factors that influence the process. The variables considered are speed and direction of the wind as well as the inclination of the surface in cases of one-dimensional and bi-dimensional respectively. The mathematical model is solved using a formula of an inverse problem which establishes the optimum parameters resulting from the comparison between the distance reached by the propagation front, using a solution of a differential equation solved analytically, and the distance reached by the propagation front of a particular fire; information provided by the National Forest Corporation, Conaf. The experimental data used is implemented manually from a shapefile type file using Google Earth tools. The methodology used is implemented computationally on the Matlab platform to simulate the fires. After the analysis of the sensitivity of the parameters obtained an optimal correction under certain intervals was evidenced where the function of cost is convex, also it shows graphically the influence of the parameters in the contextualization of the model.

Keywords: Bushfire, Propagation perimeter, Parameter evaluation, Sensitivity analysis

Resumen

En el presente trabajo se realiza una modelación matemática de incendios forestales de superficie, específicamente se estudia el comportamiento del frente de propagación del incendio con parámetros y variables que dan cuenta de los factores que influyen en el proceso. Las variables que se incorporan son la velocidad y dirección del viento junto con la pendiente de la superficie en un caso unidimensional y bidimensional respectivamente. El modelo se resuelve mediante la formulación de un problema inverso que da cuenta de los parámetros óptimos resultantes de la comparación entre la distancia alcanzada por el frente de propagación, mediante la solución de una ecuación diferencial resuelta analíticamente, y la distancia alcanzada por el frente de propagación de un incendio particular. Se utilizaron datos proporcionados por la Corporación Nacional Forestal, Conaf. Los datos experimentales utilizados son rescatados manualmente de un archivo tipo *shapefile* mediante las herramientas de *Google Earth*. La metodología utilizada se implementa computacionalmente en el entorno Matlab para hacer simulaciones del incendio. Luego con un análisis de la sensibilidad de los parámetros obtenidos se evidencia una optimización correcta bajo cierto intervalo donde la función de costo es convexa, también se observa gráficamente la influencia de los parámetros en la contextualización del modelo.

Palabras clave: Incendio forestal, Perímetro de propagación, Evaluación de parámetros, Análisis de sensibilidad.

Índice

1	Introducción	3
2	Modelo Conceptual	5
2.1	Factores topográficos	6
2.1.1	Modelos de combustible	7
2.2	Factores ambientales	8
2.2.1	Geometría del fuego	8
3	Modelo Matemático	10
3.1	Modelo de propagación unidimensional	10
3.1.1	Evaluación de parámetros aplicado a datos experimentales	11
3.2	Modelo de propagación bidimensional	13
3.2.1	Problema directo	14
3.2.2	Problema inverso	15
3.2.3	Recuperación de pendientes de la superficie del terreno	16
3.2.4	Problema a resolver	18
4	Implementación computacional	22
4.1	Datos	22
4.1.1	Pendientes	25
4.2	Modelo de propagación bidimensional	27
4.3	Problema directo	28
4.4	Problema inverso	30

5	Resultados	31
5.1	Propagación con efecto combustible	31
5.2	Propagación con efecto velocidad del viento	34
5.3	Propagación con efecto pendiente del terreno	37
5.4	Propagación con efecto combustible y dirección del viento	40
5.5	Propagación con efecto velocidad y dirección del viento	41
5.6	Análisis de sensibilidad de los parámetros	42
6	Resultados y trabajos futuros	43
A	Anexo I: Ponencia Congreso Internacional de Geografía: Desarrollos y avances en aplicaciones de estadísticas territoriales CIGEO	49
B	Anexo II: 21st Internacional Congress on Modelling and Simulation MODSIM	68

Índice de figuras

1	Esquema de factores influyentes de un incendio forestal	5
2	Incendio en pendiente positiva	6
3	Geometría de propagación de incendios forestales	8
4	Representación computacional de incendio forestal	10
5	Datos de observación de un incendio forestal tomados de [27]	12
6	Representación computacional de datos en una dirección del incendio .	16
7	Representación computacional de pendiente del incendio	17
8	Perfil de elevación tomado de <i>Google Earth</i>	17
9	Perímetro final de incendios forestales estudiados	19
10	Elaboración propia. Esquema de secuencia de cálculos en la implementación computacional	22
11	Representación de direcciones de avance de incendios tomado de <i>Google Earth</i>	23
12	Representación computacional de líneas de avance de incendios	24
13	Función de error de parámetro a	31
14	Variación de parámetro a en incendio Los Maitenes	32
15	Variación de parámetro a en incendio Quebradilla	33
16	Función de error parámetro b	34
17	Variación de parámetro b en incendio Los Maitenes	35
18	Variación de parámetro b en incendio Quebradilla	36
19	Función de error de parámetro c	37
20	Variación de parámetro c en incendio Los Maitenes	38

21	Variación de parámetro c en incendio Quebradilla	39
22	Función de error bidimensional parámetros $a \phi^*$	40
23	Función de error bidimensional parámetros $b \phi^*$	41
24	Representación tridimensional de la superficie del incendio Los Maitenes	44
25	Representación bidimensional de la malla del incendio Los Maitenes . .	46

Índice de tablas

1	Tabla de notación de variables y parámetros utilizados en el desarrollo de los modelos.	2
2	Errores de los modelos de ajuste con parámetros asignados.	13
3	Algunos de los casos de variación de parámetros para los cuales la propagación del incendio tiene un comportamiento particular	14
4	Condiciones meteorológicas y topográficas iniciales de incendios forestales.	18
5	Número de condición obtenido de la optimización de dos parámetros en todas sus combinaciones.	42
6	Número de condición obtenido de la optimización de tres parámetros en todas sus combinaciones.	42
7	Número de condición obtenido de la optimización de cuatro parámetros.	42

Objetivos

Objetivo general

Estudiar variantes de un modelo de frente de propagación de fuego para adaptar una solución numérica y computacional utilizando a la vez datos experimentales.

Objetivos específicos

1. Determinar parámetros óptimos que caracterizan los factores predominantes en la propagación de un incendio forestal.
2. Modelar el perímetro final de dos incendios forestales incorporando datos experimentales en el estudio.
3. Proponer metodología para analizar parámetros que se incorporan en los modelos de propagación lineal de incendios forestales.

Notación

La notación para este trabajo se describe a continuación.

Notación	Nombre
R	Velocidad de propagación del frente de fuego
R_0	Velocidad de propagación en ausencia de viento
U	Efecto de viento
Θ	Efecto de pendiente
C	Peso del combustible
r	Radio de propagación máxima
x	Distancias al foco
z	Altura de terreno
T	Tiempo de propagación
ϕ	Direcciones de cada línea de propagación
ϕ^*	Dirección del viento
a	Parámetro asociado al combustible
b	Parámetro asociado al efecto viento
c	Parámetro asociado al efecto pendiente

Tabla 1 – Tabla de notación de variables y parámetros utilizados en el desarrollo de los modelos.

1 Introducción

En Chile, el estudio del comportamiento de la evolución temporal de la propagación de incendios forestales no ha tenido gran énfasis en comparación con otros países del mundo junto con la dificultad de una escasa documentación, lo cual implica que al día de hoy se utilice en la simulación a tiempos reales un modelo matemático lineal de propagación [1] que no obstante da respuesta a las necesidades de la industria pues permite estimar la velocidad de propagación lineal de un incendio en cualquiera de sus rumbos.

Los modelos de propagación de incendios forestales se han formulado tanto para recopilar información previa necesario y útil al momento de atacar un incendio o como ejercicio puramente académico, estos últimos no describen en su totalidad el fenómeno, pero si se realizara un seguimiento pueden más tarde encontrar su camino en modelos destinados para uso operacional o experimental. Los estudios particulares para incendios específicos son los que han arrojado mejores resultados debido a la información que se posee tal como las características del suelo, el material combustible, la humedad la pendiente y básicamente el manejo de los parámetros reales que caracterizan el fenómeno físico, así lo han demostrado los modelos mencionados en [2], [3], [4], entre otros.

Los efectos del cambio climático tales como la sequía y las altas temperaturas provocan una disminución de humedad en los combustibles vegetales, modificando con esto los parámetros que caracterizan los modelos; la necesidad de estudiar los incendios por la razón mencionada u otra se hace mayor aun, debido a que la principal causa es de origen humano, por ejemplo, en las quemas de desechos agrícolas y forestales, la quema de basura, cigarrillos mal apagados y fogatas descuidadas; entonces una pregunta es ¿Cómo hacer consciente a la población de la responsabilidad que posee en la prevención de incendios forestales?.

En la región de la Araucanía es donde se realiza mayormente quemas de desechos agrícolas y forestales [5] en comparación con otras regiones del país; la legislación vigente faculta a la Corporación Nacional Forestal (Conaf), a través del decreto supremo 276/1980, del Ministerio de Agricultura, para establecer medidas de utilización del fuego en forma segura y solo como quema controlada, pero a pesar del plan de trabajo dispuesto, las personas no siempre dan aviso para quemar desechos en sus campos, lo que finaliza en un fuego descontrolado. Conaf cada día monitorea el índice de riesgo de un incendio forestal en Chile; existiendo en la región siempre un índice de riesgo mediano presente y actualmente un alto índice de riesgo de incendio en gran parte del país.

Inicialmente el objetivo del trabajo fue estudiar el comportamiento del frente de

propagación del fuego con énfasis en la ecuación Hamilton - Jacobi desarrollada mediante el método conocido como *level set* [6], [7], [8], [9], [10], [11], sin embargo a medida que se comprende la formulación de ese modelo, se detecta la necesidad de contar con un modelo de propagación contextualizado que actualice los parámetros de entrada en principio, tales como los modelos de combustible o el efecto de la pendiente de la superficie del terreno.

La investigación consistió en usar datos experimentales para estudiar variantes de un modelo de frente de propagación de fuego adaptando una solución numérica y computacional. Para ello se caracterizó los principales modelos que a la fecha existen, luego con datos geoespaciales de tipo *shapefile* proporcionados por Conaf se simuló computacionalmente con Matlab la propagación de un incendio mediante el desarrollo de un problema inverso donde se rescatan parámetros óptimos influyentes en el fenómeno. Junto con esto se analiza la sensibilidad de los parámetros obtenidos. Cabe destacar la relevancia de utilizar datos geoespaciales, para utilizar iguales formatos que usa Conaf en sus simulaciones [12].

El desarrollo posterior del trabajo podría generar lineamientos para la recolección de datos de incendios, también aplicaciones de celular que permitan al agricultor modelar una quema controlada previamente para controlar aun mejor la propagación de este, e incluso una comparación del modelo que hoy se utiliza con el propuesto en el trabajo, incorporando a ello adecuadamente datos geoespaciales mediante la simulación en el entorno *Phyton* desde la plataforma *Arcgis*, formato de archivos compatible con *Wildfire*, el sistema actual que utiliza Conaf para simular en tiempo real el combate de incendios.

Conocer cómo se propagará y cómo será el comportamiento del incendio en un futuro es clave para la extinción eficaz y segura del incendio forestal.

2 Modelo Conceptual

El fuego es el resultado del proceso de combustión y ocurre cuando está presente un combustible, una fuente de calor y oxígeno. Un incendio forestal es un fuego que se propaga sin control en terrenos rurales a través de vegetación leñosa, arbustiva o herbácea viva o muerta.

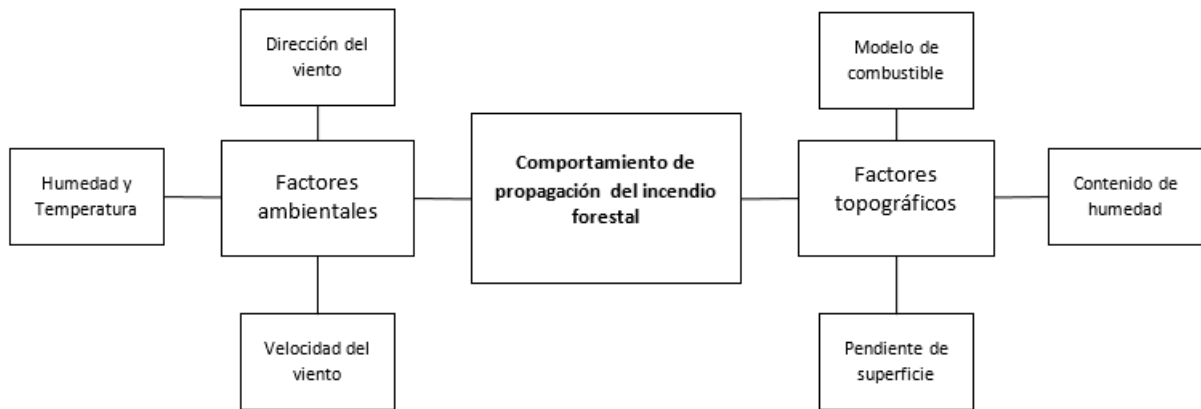


Figura 1 – Elaboración propia. Características principales que influyen en el comportamiento del incendio forestal

La modelación de la propagación de un incendio forestal debe considerar múltiples factores (Figura 1), de estos los más relevantes son el tipo de combustible, la humedad del combustible, pendiente del terreno y velocidad junto con la dirección del viento. Cada uno de ellos posee otros factores, por ejemplo, el contenido de humedad depende de los datos meteorológicos del momento, topografía y del propio combustible.

La forma geométrica que adquiere el incendio es de tipo elipsoidal para condiciones de viento variable, pendiente y combustible constante; y propagación de tipo circular bajo condiciones de viento y pendiente constante .

La velocidad de propagación responde a estos factores y el proceso se mantiene cambiando continuamente a lo largo del tiempo y el espacio.

A nivel mundial hay simuladores de incendios forestales que incorporan modelos de propagación tales como Kitral, Rothermel y Mc Arthur; las simulaciones son realizadas desde centrales de coordinación y se han incorporado como antecedente en la toma de desiciones en la gestión y combate de incendios forestales [13].



Figura 2 – Incendio en una ladera de un cerro, se visualiza la inclinación de la llama lo cual permite alcanzar mayor rapidez en la propagación

2.1 Factores topográficos

Los factores topográficos se refieren al efecto de la inclinación del terreno en la superficie de estudio; que muestra como la energía se transfiere al combustible y a la atmósfera en el proceso de quema, aportando un dato interesante para la modelación como por ejemplo, la pendiente ascendente es quemada más rápido que la pendiente descendente [14], el tumbado en la llama en la zona a favor de ella (Figura 2) y también que el calor es transmitido por convección y radiación más intensamente que al lado opuesto.

Finney, en [15] y otros autores [16], [18], proponen la asignación de vectores al efecto viento - pendiente así evidencia las diferencias en la dirección de propagación modificando la intensidad en los resultados obtenidos; comparando con el efecto dado.

Esto sucede porque hay una consecuencia potente con la acción conjunta de viento y pendiente como la rapidez, con la cual se alcanza la temperatura de ignición hacia la dirección donde se transmite el calor. Si el viento sopla a favor de la pendiente, la velocidad de propagación aumenta, y si el viento sopla cruzado sobre la pendiente, la dirección de propagación se puede estimar con la asignación vectorial viento-pendiente. En este trabajo se incorporó el efecto viento - pendiente para el caso bidimensional, y solo efecto de viento para el caso unidimensional.

2.1.1 Modelos de combustible

El combustible se define como toda la materia de origen vegetal que pueda arder, generalmente no son homogéneos ni uniformes y de acuerdo a la agrupación que tiene en cada espacio, constituyen distintas formaciones vegetales. Los incendios forestales se propagan en lechos de combustible.

La clasificación de un incendio se realiza de acuerdo al estrato de combustible sobre el cual se propaga se la siguiente forma:

- Incendio de superficie
- Incendio de copas
- Incendio sub superficial o de subsuelo

En este trabajo se estudia la propagación de incendios forestales en combustibles de superficie, el cual se divide de acuerdo a su estado en combustibles vivos y muertos; los primeros se componen de vegetación herbácea, matorrales y arbustos, tienen la capacidad de absorber el agua del suelo y tienen baja altura; los segundos se componen de acículas, hojas y ramillas secas desprendidas y las ramas o troncos que se encuentran en el suelo por causa natural, su contenido de humedad depende del ambiente. De acuerdo a su tamaño se dividen en combustibles finos, regulares, medianos y gruesos. Es importante mencionar que en concreto, los tipos de combustibles y sus características, se reducen a un coeficiente adimensional incorporado en el modelo de propagación [17].

En un fuego el combustible que arde en primer lugar es el combustible ligero muerto y cuando la humedad del combustible ligero muerto es superior al 25 % [19] difícilmente comienza un fuego.

Los modelos de combustible son clasificados en 13 tipos en [20] y [21], y son insumos en modelos de simulación de comportamiento del fuego, sin embargo, cada organismo encargado del manejo del fuego forestal generalmente desarrolla sus propios modelos acordes a las condiciones reales, por esta razón Conaf posee una detallada descripción de modelos de combustibles presentes en cada región de Chile.

Cada estrato de combustible posee propiedades térmicas, características físicas y químicas las cuales son la capacidad calorífica, el poder calorífico, la conductividad, la carga de combustible, el grosor, la densidad de las partículas, la humedad, la composición química, la compactación del estrato y la continuidad. Cada una de ellas además genera un comportamiento controlado por factores meteorológicos y topográficos.

2.2 Factores ambientales

En cuanto a los factores meteorológicos que influyen en el comportamiento del fuego lo son la dirección y velocidad del viento, la humedad relativa del aire y la temperatura.

Los cambios en las condiciones meteorológicas ambientales como la velocidad y dirección del viento, la humedad, la temperatura, u otras que se pueden revisar en el trabajo de Sullivan [14] tiene impacto significativo del fuego en la misma atmósfera y en el estado del combustible, tal relevancia que incluso algunos sugieren desarrollar modelos para predecir los perfiles de vientos forestales. Hasta el momento existe un trabajo de esto con parámetros dado por Monab [22]. Por ejemplo, un caso demostró que el aire seco sobre el suelo, vientos fuertes descendentes por las laderas de la superficie y un viento de bajo nivel por la noche aumentaron un incendio hasta niveles incontrolables. En el presente trabajo, se incorpora la dirección y velocidad del viento.

2.2.1 Geometría del fuego

El viento provoca una inclinación de la llama que a la vez genera mayor calor por radiación y convección, por ejemplo si se produce un incendio forestal en condiciones de terreno, combustible y viento estable, este se propagaría en forma circular, pues transmitiría la misma cantidad de calor en cada dirección. En condiciones diferentes, a medida que aumenta el tamaño de la superficie quemada, se distingue una cola y un frente en la geometría de propagación.

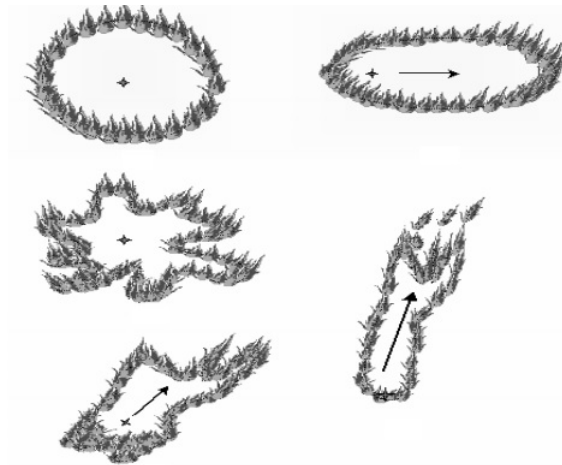


Figura 3 – Tipos de propagación de un incendio forestal, afectados por factores meteorológicos y topográficos, tomado de [23]

La forma que posee la propagación del fuego en la mayoría de las investigaciones de incendios forestales es elipsoidal, aunque otras formas como gotas u óvalos pueden ser

más precisos de acuerdo al escenario que se estudie o al tipo de combustible considerado [2], [6], [7], [15], [25].

Otras líneas de investigación plantean el estudio de la propagación de dos líneas de fuego considerando la curvatura en la propagación y la dirección angular de estas [26]; modelo que no sigue la forma elipsoidal, sino más bien estudia el efecto que se produce en la velocidad de propagación cuando dos líneas de fuego se cruzan.

3 Modelo Matemático

El problema a resolver posee un sistema de referencia polar $[x, \phi]$ donde x corresponde al radio de la propagación y ϕ a la dirección fija del viento para cada línea de avance del fuego.

El inicio del incendio se presenta en el origen del sistema de referencia y en cada dirección hay una línea de avance de propagación.

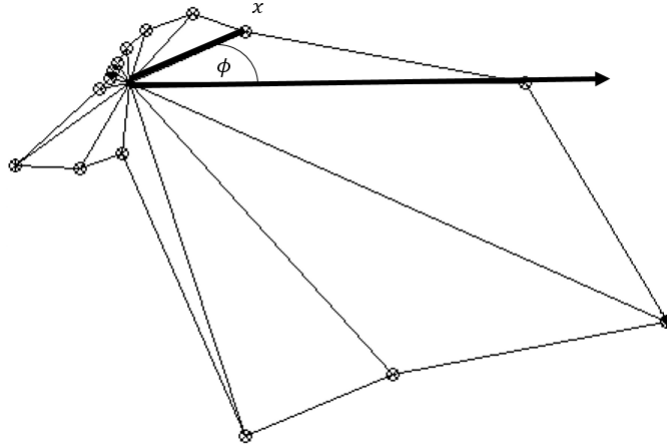


Figura 4 – Elaboración propia. Representación de un perímetro final de incendio forestal con un sistema de referencia que indica la propagación del incendio por cada dirección de avance.

Primero se estudian diferentes modelos de velocidad de propagación para el caso unidimensional, es decir, solo con la incorporación del efecto viento en el incendio, con el objetivo de hacer una evaluación de los modelos mediante una perturbación de datos de observación de un incendio tomado del trabajo de [27].

Luego se estudia el caso bidimensional que incorpora el efecto de viento y efecto pendiente, y se realiza un análisis de sensibilidad con los parámetros obtenidos.

3.1 Modelo de propagación unidimensional

Se proponen cuatro modelos, los que son; lineal 1, exponencial 2, logístico 3 y el que corresponde al trabajo de Cheney et.al, [27] el modelo 4. Los primeros dos con parámetros a y b y los siguientes con parámetros a, b, c y d . Cada función describe la velocidad de propagación de un fuego experimental $R(U)$ de pasto en estado natural.

$$R(U) = a \cdot U + b \quad (1)$$

$$R(U) = a \cdot e^{(b \cdot U)} \quad (2)$$

$$R(U) = \frac{c}{1 + d \cdot a^{-b \cdot U}} \quad (3)$$

$$R(U) = a + b \cdot (U - c)^d \quad (4)$$

Cada modelo posee una velocidad del viento variable dada por U que a la vez depende de la dirección del viento dado por el parámetro ϕ^* .

$$U = \cos(\phi - \phi^*)U_0 \quad (5)$$

Con U_0 = velocidad inicial

Los diferentes modelos de velocidad de propagación se proponen para distinguir el efecto de los parámetros en la propagación final del incendio y comparar gráficamente el efecto de una formulación lineal con una exponencial, principalmente puede ver en [24] que son estos los dos tipos de modelos propuestos principalmente en la literatura.

3.1.1 Evaluación de parámetros aplicado a datos experimentales

Las metodologías para asesorar funciones paramétricas aplicado a datos experimentales y evaluar la confiabilidad de los parámetros que se obtienen de un ajuste de curvas; se realiza mediante un remuestreo de datos observados o una perturbación de datos. La finalidad es evaluar la confiabilidad de una serie de conjuntos de parámetros mediante indicadores estadísticos como la desviación media, desviación estandar o percentiles.

Para la evaluación de parámetros se realiza un ajuste de curvas mediante una optimización con el método de mínimos cuadrados, así se calcula el menor error entre los datos de observación de un incendio forestal y la curva propuesta (1), (2), (3), (4). Los datos de observación utilizados, se extraen del trabajo de [27].

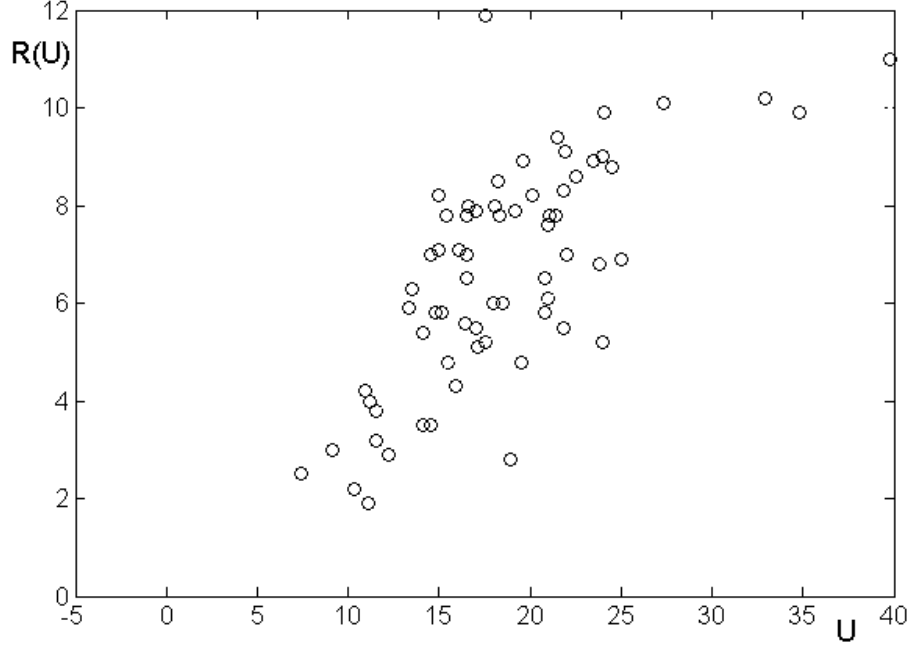


Figura 5 – Datos de observación de un incendio forestal tomados de [27], U es la velocidad del viento en km/hr y $R(U)$ velocidad de propagación del incendio en km/hr

Se utiliza el error absoluto (6) y el error relativo (7) con el objetivo de ajustar una curva con el menor error posible. En ambas funciones de error, j es la cantidad de datos experimentales, q es 1 ó 2 correspondiente a la suma de los valores absolutos de los errores, o a la suma de los cuadrados de los errores respectivamente. $\hat{R}$ corresponde a los datos de observación perturbados y $R(U_j, e)$ los datos arrojados del ajuste de curvas con un cierto error e .

$$E_{\text{abs}} = \frac{1}{j} \left(\sum_{j=1}^J |R(U_j, e) - \hat{R}|^q \right)^{1/q} \quad (6)$$

$$E_{\text{rel}} = \frac{1}{j} \left(\sum_{j=1}^J \left| \frac{R(U_j, e) - \hat{R}}{R(u_j, e)} \right|^q \right)^{1/q} \quad (7)$$

Los datos de observación perturbados se definen como la suma de un error ϵ a la función de ajuste de la matriz de datos originales R^o

$$\hat{R} = R^o + \epsilon \quad (8)$$

La función de perturbación p se obtiene definiendo un error ϵ en un intervalo para obtener una distribución uniforme de los parámetros, de esta forma aseguramos un buen comportamiento de ellos.

$$\epsilon = p(R^o; [-m, m]) \quad (9)$$

Al aplicar la transformación $T = [0, 1] \rightarrow [-m, m]$ se obtiene la función lineal de perturbación

$$r = m - 2m \cdot \text{rand}(\text{size}(R^o)) \quad (10)$$

En esta función, m corresponde al margen de error, que es opcional y se adecua, en este caso $m \in [0.1, 0.2, 0.5, 1, 2]$.

Función de ajuste	$q = 1$		$q = 2$	
	Error absoluto	Error relativo	Error absoluto	Error relativo
$R_1(U) = a \cdot U + b$	1.3069	0.1965	0.1968	0.0308
$R_2(U) = a \cdot e^{(b \cdot U)}$	1.4202	0.12124	0.2086	0.0329
$R_3(U) = \frac{c}{1+d \cdot a^{-b \cdot U}}$	1.1852	0.1770	0.1900	0.0201
$R_4(U) = a + b \cdot (U - c)^d$	1.2853	0.1931	0.1878	0.0293

Tabla 2 – Errores de los modelos de ajuste con parámetros asignados.

De la tabla 2, se puede observar que no es concuyente el análisis pues los errores son pequeños según para cada caso que se estudie; por esta razón, y por poseer pocos datos, al momento se podría utilizar cualquier modelo de los antes mencionados.

Una hipótesis, para dar respuesta al resultado obtenido, es también la dispersión de los datos que puede ver en la figura (5).

3.2 Modelo de propagación bidimensional

Los modelos de propagación de incendios forestales tienen generalmente formulación exponencial o lineal, donde la formulación exponencial nos permite controlar de mejor forma los parámetros a, b y c ; por tal razón como modelo referencial se propone el siguiente:

$$R(U, \theta, x, \phi) = ae^{bU \cos(\phi - \phi^*) + c\theta(x, \phi)}. \quad (11)$$

Donde $R = R(U, \theta, x, \phi)$ es la velocidad con la que se propaga cada línea del incendio forestal. En el modelo, a, b, c son parámetros; mientras que θ y U son la pendiente del terreno y la dirección del viento correspondientemente, funciones que dependen de la posición; θ es información rescatada previamente mediante un polinomio cúbico a trozos.

Si no hay viento y pendiente ($U = 0, \theta = 0$) entonces el efecto correspondiente desaparece por e^0 y la velocidad de propagación del fuego es constante.

En la tabla (6) se describen e interpretan las variables y coeficientes presentes en el modelo (11)

Caso	Variables	coeficientes fijos	coeficientes anulados	
Caso 1	a	ϕ^*	bc	Propagación uniforme sin efecto de viento y pendiente, supone un avance uniforme de forma circular.
Caso 2	ϕ^*	ab	c	Propagación con efecto de velocidad del viento, supone un avance con forma elipsoidal donde la cabeza del frente está en la dirección del viento.
Caso 3	c	a	$b\phi^*$	Propagación más pronunciada hacia donde la pendiente es positiva, supone un avance más rápido en pendiente positiva.
Caso 4	$b\phi^*$	a	c	Avance del fuego para una dirección del viento dada.
Caso 5	abc	ϕ^*		Propagación ideal con todos los parámetros óptimos.
Caso 6	$abc\phi^*$			Propagación ideal con dirección del viento dado.

Tabla 3 – Algunos de los casos de variación de parámetros para los cuales la propagación del incendio tiene un comportamiento particular

3.2.1 Problema directo

La posición que alcanza el incendio en cada dirección de acuerdo a las variables incorporadas se obtiene mediante la resolución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = R(U, \theta(x)) \quad (12)$$

con U calculado con la ecuación (5). Y datos iniciales $x(0) = 0$.

La integración de la ecuación diferencial (12) se realiza numéricamente, y entrega las posiciones alcanzadas en cada línea de control por el incendio forestal.

El valor $x(T)$ que corresponde al avance del fuego en la dirección ϕ_j en el tiempo T , se calcula al resolver la ecuación (12).

3.2.2 Problema inverso

Los parámetros relacionados a un experimento los expresamos por

$$P_i = (\phi_i^*, U_i, \theta_i, a_i, b_i, c_i), \quad i = 1, \dots, I. \quad (13)$$

Con $I =$ cantidad de experimentos. Para cada experimento V_i existe un parámetro P_i óptimo.

Por lo tanto se desea encontrar parámetros P_i (13) tal que se minimice la diferencia entre la distancia final real del incendio y la distancia que entrega la solución de la ecuación diferencial.

$$\min_{P_i} f(P_i), \quad f(P_i) = \sum_{j=1, \dots, J} \frac{|x_{ij}(P_i; T) - \hat{X}_{ij}|^2}{\hat{X}_i^2}. \quad (14)$$

donde $x_{ij}(P_i; T)$ es la solución con el parámetro P y $\hat{X}$ corresponde al dato real. En (14) se suman los errores relativos; J corresponde a la cantidad de direcciones o también llamado líneas de avance de cada experimento respectivamente, ver en figura (4).

3.2.3 Recuperación de pendientes de la superficie del terreno

Del archivo *shapefile* se obtienen los perfiles de elevación del terreno en diferentes direcciones de propagación del incendio comenzando en su punto de origen. Se obtiene a partir de la interpolación cúbica cerchada, funciones continuas $C_k(\hat{X})_k$ que caracterizan el terreno donde se propaga el incendio forestal; dado los puntos $(\hat{X}, \hat{Z})$, k : cantidad de cerchas cúbicas.

$$C_k(\hat{X}) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - \hat{X}) + s_{k,2}(x - \hat{X})^2 + s_{k,3}(x - \hat{X})^3 \quad (15)$$

$(s_{k,c})_{c=0}^3$: parámetros del polinomio

Con la misma metodología se obtienen el valor de la pendiente en cada posición $\hat{X}$.

$$\theta(\hat{X}) = \frac{dC_k}{dx} = s_{k,1} + 2s_{k,2}(x - \hat{X}) + 3s_{k,3}(x - \hat{X})^2 \quad (16)$$

La visualización de los datos en tres líneas de avance se observa en la figura (5).

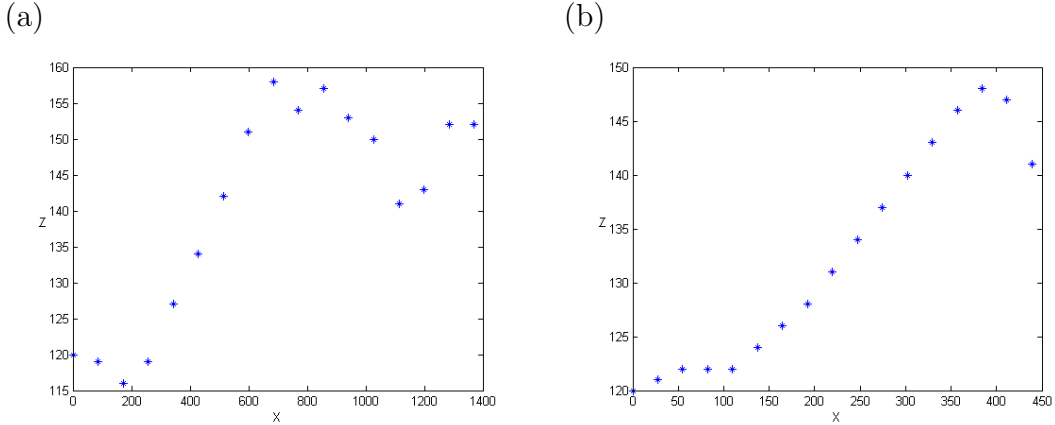
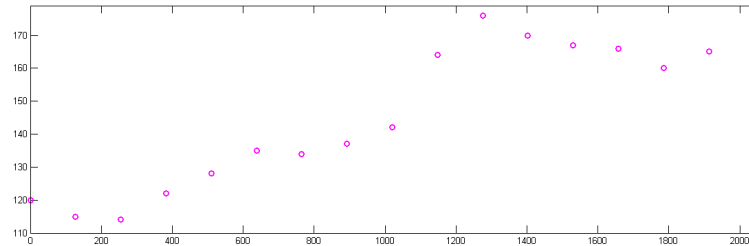


Figura 6 – En cada figura se observa los puntos experimentales de una dirección de avance $(\hat{X}, \hat{Z})$ del incendio Los Maitenes.

El resultado de la intepolación es utilizado para incorporar a la ecuación diferencial representativa de la ecuación (8).

Al tomar una línea de control con 16 puntos, 8 puntos y 4 puntos para hacer tres distintas interpolaciones cúbicas, es posible comparar la menor distancia entre estas; con la intención de evidenciar cuál es el número ideal de puntos que se debe tomar en la interpolación para reproducir de mejor forma la topografía en cada dirección de avance del fuego.

(a)



(b)

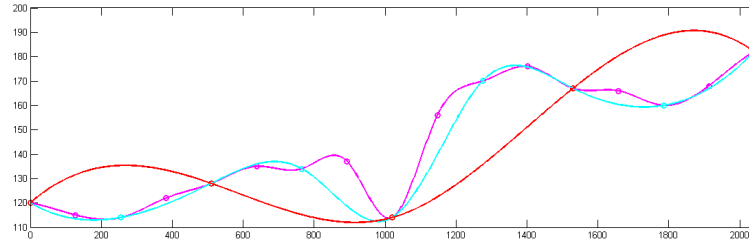


Figura 7 – (a) Datos experimentales $(\hat{X}, \hat{Z})$ tomados de una dirección de avance del incendio Los Maitenes. (b) Resultado de interpolación de datos de la gráfica (6.a), utilizando 16 puntos, 8 puntos y 4 puntos correspondiente a las posiciones del terreno quemado.

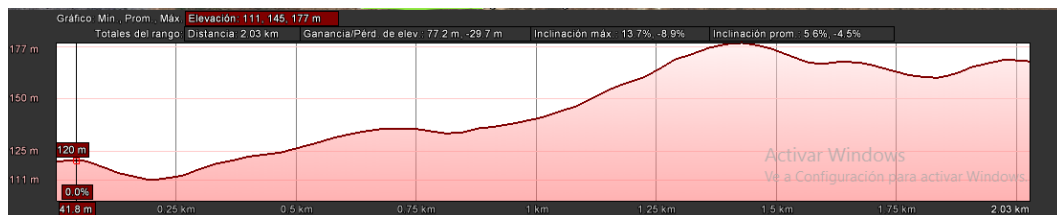


Figura 8 – Perfil de elevación tomado de Google Earth correspondiente a una línea de avance, la cual fue ajustada con una interpolación en la figura anterior.

Al comparar mediante la norma cuadrada entre cada curva, los resultados arrojan que una interpolación con 16 puntos muestra una mejor aproximación que se puede comparar visualmente con la figura (8).

En el modelo de Noble [28] el efecto pendiente se expresa en unidades grados y es incorporado al modelo de velocidad de propagación mediante la siguiente expresión

$$R_{\theta} = R \cdot \exp(0.069\theta) \quad (17)$$

En este trabajo la información de pendientes se considera en grados mediante una conversión de unidades donde la máxima inclinación es 45° y corresponde a 100 %.

$$m^{\circ} = \arctg\left(\frac{m\%}{100}\right) \quad (18)$$

Luego, se transforma y utiliza en radianes.

3.2.4 Problema a resolver

Las áreas de estudio fueron dos incendios forestales que sucedieron en la Región Metropolitana y Región de Valparaíso. De ellos, los datos en archivos *shapefile* obtenidos corresponden al perímetro final de propagación, al punto de inicio y al tiempo de duración final.

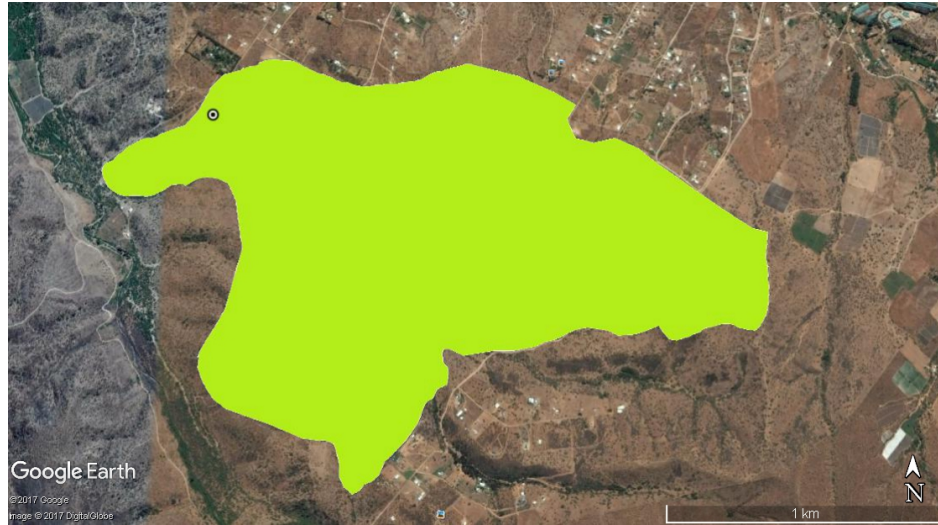
Un área de estudio es el sector Quebradilla ubicado en la Región de Valparaíso, la causa del inicio del fuego fue uso de fuego por transeúntes, el combustible inicial es pastizal y el tiempo de duración del incendio fue seis días.

Datos	Quebradilla	Los Maitenes
Fecha	29/02/2016 11:34 hrs	27/12/2015 12:40 hrs
Temperatura	25 °C	30 °C
Nubosidad	0/8	0/8
Humedad relativa	31 %	39 %
Velocidad viento	6km/hr	6km/hr
Pendiente	100 %	0 %
Exposición	Norte	Plano
Dirección viento	Oeste	Oeste
Topografía	Abrupta	Suave

Tabla 4 – Condiciones meteorológicas y topográficas iniciales de incendios forestales.

Las condiciones meteorológicas y topográficas iniciales (Tabla 4) permitieron un rápido avance sin control del fuego, el combustible presente era matorral denso, pino y la topografía con quebradas, además fuerte viento.

(a)



(b)



Figura 9 – Imágenes satelitales tomadas de Google Earth (a) Punto de inicio y perímetro final de incendio Los Maitenes. (b) Punto de inicio y perímetro final de incendio Quebradilla.

La segunda área de estudio es el sector Los Maitenes en Melipilla, Región Metropolitana, la causa y el combustible inicial del incendio fue igual al anterior y el tiempo de duración fue dos días.

El problema es identificar parámetros óptimos que al incorporarlos en la ecuación 12

junto con resolver el problema directo se muestre un perímetro de propagación final del incendio forestal similar al perímetro de propagación que se tiene de las áreas de estudio.

Para resolver el problema directo y también el problema inverso, un incendio forestal se denominará experimento V_i .

$$(V_1, V_2, V_3, \dots, V_I), \quad (19)$$

donde el subíndice corresponde al número del experimento. Los datos de cada experimento se expresan mediante una matriz.

$$V_i = (\Phi_i, r_i, T_i, X_i, Z_i), \quad i = 1, \dots, I, \quad (20)$$

donde Φ , es la matriz de direcciones expresadas en ángulos con el superíndice igual a las líneas de control

$$\Phi_{ij} = (\phi_{1j}, \phi_{2j}, \dots, \phi_{IJ}) \quad (21)$$

El radio r de propagación máxima en las direcciones Φ_{ij} a los tiempos T .

$$r_{ij} = (r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{IJ}), \quad (22)$$

En cada dirección ϕ_{ij} se dispone de las distancias al foco $\hat{X}_{ij}$ y la altura $\hat{Z}_{ij}$

$$\hat{X}_{ij} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{IJ}) \quad (23)$$

$$\hat{Z}_{ij} = (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{IJ}) \quad (24)$$

Mediante la interpolación se recupera la pendiente $\theta(\hat{X})$ correspondiente a las posiciones $(\hat{X}_{ij}, \hat{Z}_{ij})$ por

Las distancias y pendientes no representan un número discreto de datos, sino una continuidad de datos interpolados.

Para efectos concretos se elige un número determinado de direcciones $J = 15$ y se tienen los siguientes ángulos

$$\phi_{ij} = j\Delta\phi = \frac{j2\pi}{J}, \quad j = 1, \dots, J \quad (25)$$

Con los datos bien expresados se resuelve el problema directo para encontrar la distancia máxima que alcanza el incendio en un tiempo determinado para luego con esa información, optimizar la función objetivo 14 y determinar los parámetros óptimos con el mínimo error.

4 Implementación computacional

Se crean códigos computacionales para resolver el problema en estudio y realizar simulaciones computacionales. Los códigos son propios e implementados en la plataforma Matlab.

Primero se crea una función que contenga la ecuación (11) y (16) para incorporarlo en la secuencia de comandos que resolverá el problema directo. Desde esta secuencia se puede controlar la velocidad inicial y la dirección del viento, igualmente se incorpora la función que describe la pendiente.

Luego se crea una función que resuelva la ecuación (12) para cada caso en estudio junto con otra secuencia de comandos que resuelva el problema inverso.

Esto en conjunto es llamado desde el nivel superior de la implementación.

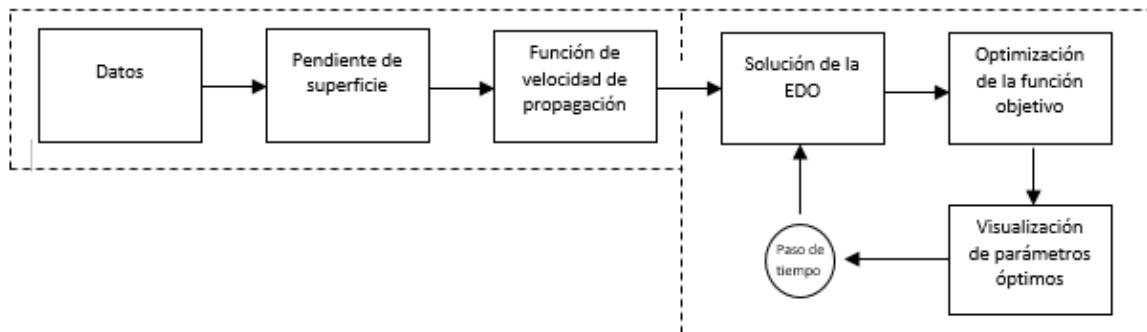


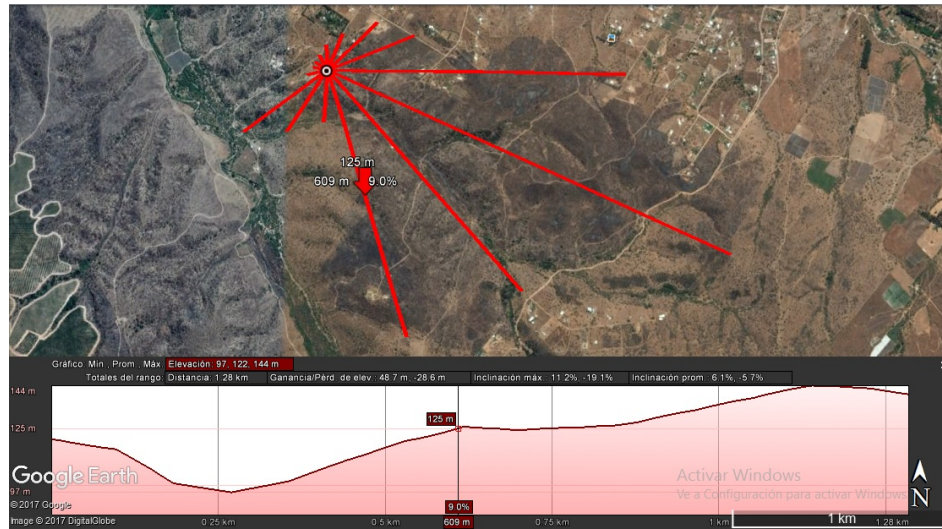
Figura 10 – Elaboración propia. Esquema de secuencia de cálculos en la implementación computacional

4.1 Datos

Los datos proporcionados por Conaf son mapas de incendios forestales, donde hay registro del punto de inicio del incendio y el perímetro final de propagación. Con cada uno de ellos se rescatan los datos de avance y altura en 15 líneas de avance del fuego como se muestra en la figura (10); así mediante la herramienta perfiles de elevación de Google Earth se visualiza en cada una de ellas el avance en X y la altura Z

Esta información se registró en dos archivos de texto para importarlos en un fichero de Matlab y utilizarlos desde ahí con el siguiente comando:

(a)



(b)

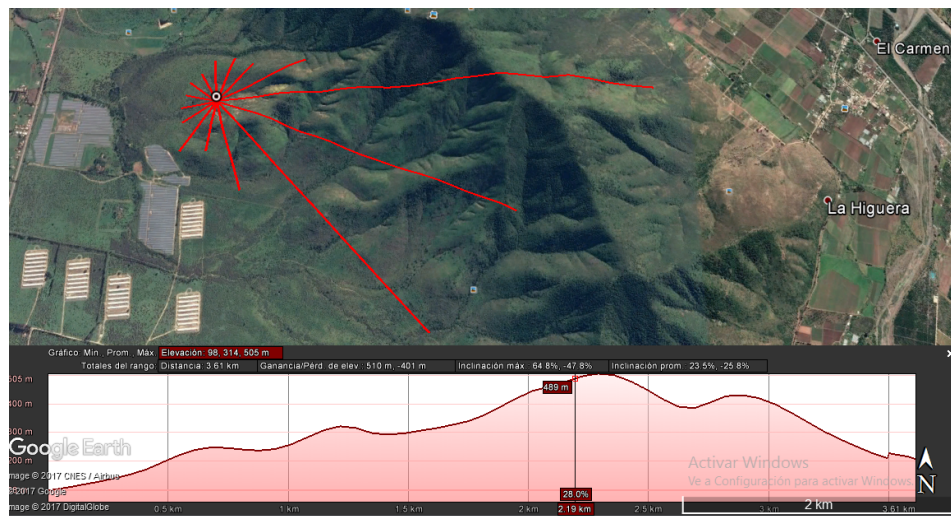


Figura 11 – La figura muestra las líneas de direcciones de avance del incendio Los Maitenes y Quebradilla respectivamente, imagen tomada de Google Earth .

```
load X.txt -ascii  
load Z.txt -ascii
```

Otro dato que se utilizó en la simulación son las direcciones del viento de acuerdo a la ecuación (25), expresado en radianes

```
Phi=(0:1:14) '*2*pi/15
```

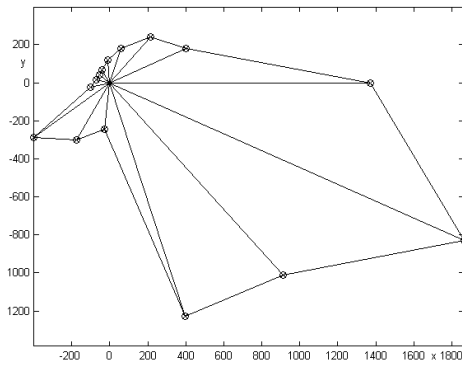
Por último, los datos de tiempo y posición son llamados del fichero 'datos' de la siguiente forma:

```
Tfinal=100;  
tdata=Tfinal*ones(1,15);  
xdata=X(:,end)';
```

Por lo tanto para cada línea de avance se asigna una dirección respectiva situando un sistema de referencia en el punto de inicio del incendio siendo dirección este el eje positivo de las abscisas, dirección norte el eje positivo de las ordenadas. La figura (12) presenta la ubicación del incendio en un sistema de referencia polar donde cada punto final de avance del incendio tiene las siguientes coordenadas:

$$X = r \cos(\Phi) \quad , \quad Y = r \sin(\Phi) \quad \text{con} \quad 0 \leq \Phi \leq 2\pi$$

(a)



(b)

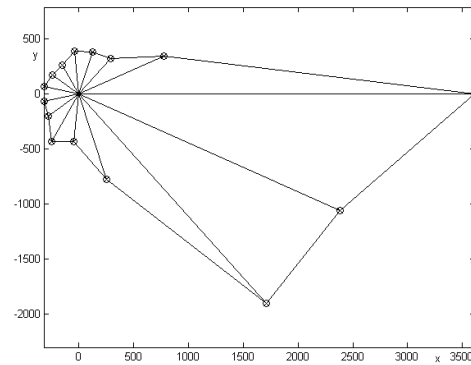


Figura 12 – (a) Representación computacional de líneas de avance de incendio Los Maitenes. (b) Representación computacional de líneas de avance de incendio Quebradilla.

Y el fichero en matlab es el que sigue:

```
XF=X(: ,end);
XD=XF.*cos(Phi);
YD=XF.*sin(Phi);
XD=[XD; XD(1)];
YD=[YD; YD(1)];

figure(1);clf;plot(XD, YD, 'o-k');hold on;plot(0, 0, 'xk');axis equal;
xlabel('X');ylabel('Y','Rotation',360);

for k=1:length(XD);
    plot([0 XD(k)],[0 YD(k)],'x-k');
end
```

La representación en un plano es una aproximación al perímetro final del incendio, aun así, los resultados obtenidos pueden predecir la dirección donde tendrá más rápido avance.

4.1.1 Pendientes

Los expertos en sistemas de información geográfica pueden rescatar del archivo *shapefile* un mapa de pendientes expresado en datos *raster*, esto reemplazaría y daría calidad al uso de pendientes en la modelación matemática. Sin embargo de manera intuitiva utilizando conceptos del cálculo se hace una recuperación de ellas en cada línea de control correspondiente a cada dirección del incendio.

```
Xk=X(1,:);
Zk=Z(1,:);
figure(2);plot(Xk,Zk,'*');xlabel('X');ylabel('Z','Rotation',360);
```

Se crea un fichero donde se asigna variables globales para que reconozca los datos X y Z importados desde la rutina que compila la solución del problema directo e inverso que simula el incendio.

```
global Phi
global X Z
```

Luego se crea un ciclo *for* que realice una interpolación polinomial a trozos donde cada conjunto de cerchas cúbicas resultantes de la ecuación sean cada función que represente la topografía de las líneas tal como lo expresa la ecuación (16).

Para esto se fijan 16 puntos equidistantes en cada dirección del incendio desde la primera a la última línea de avance y se forman dos matrices que guardan los datos

correspondientes a la información de cada punto.

Se generaliza para todo el incendio con 15 direcciones diferentes.

Cada cercha cúbica tendrá como representación la ecuación (15) lo cual se utilizará en la simulación .

Y el archivo matlab correspondiente:

```
function Theta=theta(x)
global Phi
global X Z

[m n]=size(X);
for k=1:m;
    Xk=X(k,:);
    Zk=Z(k,:);
    xk=x(k);
    zk=spline(Xk,Zk,xk);
    h=1e-5;
    xkeps=x(k)+h;
    zkeps=spline(Xk,Zk,xkeps);

    if xk <= X(k,end)
        thetak=(zkeps-zk)
    else
        thetak=0;
    end

    Theta(k,:)=thetak;
end
end
```

El concepto derivada utilizado en la simulación computacional como se observa en el fichero es el siguiente:

$$f'(\hat{X}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{X} + h) - f(\hat{X})}{h}.$$

Esta rutina independientemente se llama desde la ventana principal fijando el avance en x para cada dirección.

```
x=Phi*0+1;
```

En la interpolación cúbica, es importante que mientras más datos se utilicen en el ajuste, mejor será el resultado obtenido.

```
XF=X(end,:);
ZF=Z(end,:);

X4=XF(1:4:length(XF)); Z4=ZF(1:4:length(XF))
X2=XF(1:2:length(XF)); Z2=ZF(1:2:length(XF))
figure(3); plot(XF,ZF,'mo','linewidth',2); hold on;
plot(X2,Z2,'co','linewidth',2); plot(X4,Z4,'ro','linewidth',2);

n=length(XF); t=linspace(XF(1),XF(n),1000);
p=spline(XF,ZF,t);
p2=spline(X2,Z2,t);
p4=spline(X4,Z4,t);
figure(3); hold on; plot(t,p,'m','linewidth',1.5);
plot(t,p2,'c','linewidth',1.5);
plot(t,p4,'r','linewidth',1.5);
```

4.2 Modelo de propagación bidimensional

La ecuación (11) se incorpora a la simulación mediante el fichero 'modelo', al igual que el resultado de la interpolación para la recuperación de pendientes del terreno, de la siguiente forma:

```
function F=f(t,x)
global a b c
global Phi
global v0 phistar

v0=1;
V=v0*cos(Phi-phistar);
Theta=theta(x);
F=a*exp(b*V+c*Theta);
end
```

4.3 Problema directo

La integración de la ecuación diferencial se realiza numéricamente.

```
function xmodelo=problema_directo(p,tdata)
global a b c
global Phi v0 phistar
global caso
switch (caso)
    case ('parametroa')
        b=0;c=0;phistar=0;
        a=p(1);
        a;

    case ('parametrob')
        a=5.6947; c=0; phistar=-0.3;
        b=p(1);
        b;

    case ('parametroc')
        a=5.6947; b=1.0230; phistar=-0.3;
        c=p(1);
        c;

    case ('ab')
        c=-1.2;phistar=-0.3;
        a=p(1);b=p(2);
        a;b;

    case ('ac')
        b=1.0230;phistar=-0.3;
        a=p(1);c=p(2);
        a;c;

    case ('bc')
        a=5.6947;phistar=-0.3;
        b=p(1);c=p(2);
        b;c;

    case ('phistar')
        a=5.6947;b=1.0230;c=0;
        phistar=p(1);
        phistar;

    case ('cphistar')
        a=5.6947;b=1.0230;
        c=p(1);phistar=p(2);
        c;phistar;

    case ('bphistar')
        a=5.6947;c=-0.3;
```

```

        b=p(1); phistar=p(2);
        b; phistar;

    case ( 'aphistar' )
        b=1.0230; c=-0.3;
        a=p(1); phistar=p(2);
        a; phistar;

    case ( 'abcphistar' )
        a=p(1); b=p(2); c=p(3); phistar=p(4);

    case ( 'abc' )
        phistar=-0.3;
        a=p(1); b=p(2); c=p(3);

    case ( 'abphistar' )
        c=-1.2;
        a=p(1); b=p(2); phistar=p(3);

    case ( 'acphistar' )
        b=1.0230;
        a=p(1); c=p(2); phistar=p(3);

    case ( 'bcphistar' )
        a=5.6947;
        b=p(1); c=p(2); phistar=p(3);

    otherwise
        disp( 'Unknown_method.' )
end

x0=Phi*0;
Tfinal=max(tdata); Tintervalo=[0 Tfinal];
options=odeset( 'RelTol',0.2, 'AbsTol',1);
[tt,xx]=ode15s( 'f',Tintervalo,x0,options);
xmodelo=xx(end,:);

end

```

La rutina anterior funciona llamando el fichero 'modelo' o el que corresponda a la función que se está resolviendo; esto depende de la variación de parámetros que se puede estudiar.

Por ejemplo si se analiza el efecto pendiente, el caso 'parametroc' debe ser llamado de una rutina superior mediante el comando

```

caso=( 'parametroc' )

```

Todo lo anterior es resuelto en conjunto con la visualización de sus gráficas desde el fichero 'datos'.

4.4 Problema inverso

El problema de optimización posee un mínimo absoluto en el intervalo estudiado.

La función de costo corresponde al siguiente fichero

```
function C=costo(p)
global X

Tfinal=100;
tdata=Tfinal*ones(1,15);
xmodelo=problema_directo(p,tdata);
xdata=X(:,end)';
C=sqrt((sum((xmodelo-xdata).^2)))';
end
```

Y se llama desde el caso que se desee estudiar.

Para obtener el parámetro óptimo otra alternativa es utilizar el siguiente fichero dado para el caso particular 'parametrob'.

```
global a b c
global Phi v0 phistar
global caso

Tfinal=100;
tdata=Tfinal*ones(1,15);
xdata=X(:,end)';

caso='parametrob'
a=5.6947; c=0; phistar=-0.7; p0=1
p=lsqcurvefit('problema_directo',p0,tdata,xdata);
p
```

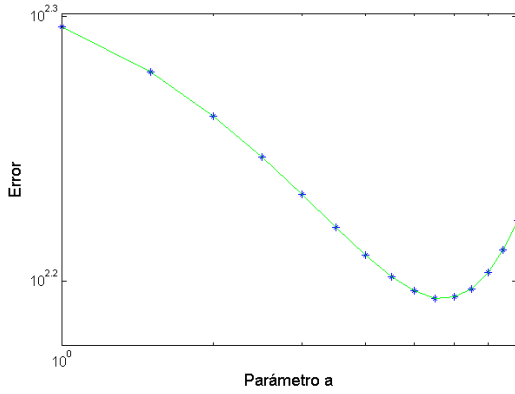
5 Resultados

La siguiente sección muestra los efectos de los parámetros en el desplazamiento del frente de propagación del incendio forestal.

5.1 Propagación con efecto combustible

Cuando no hay efecto de viento y pendiente, la propagación lineal del fuego toma forma de círculo pues la velocidad es constante. Esto implica que a corresponde al parámetro de la velocidad del tipo de combustible.

(a)



(b)

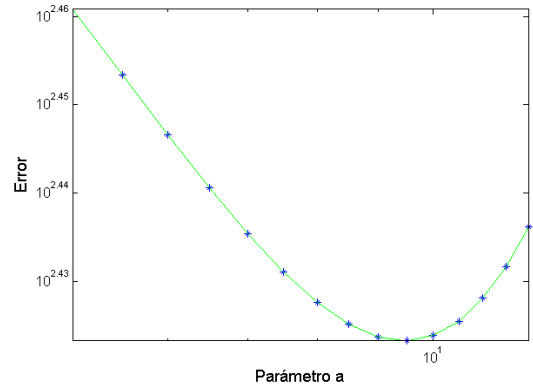
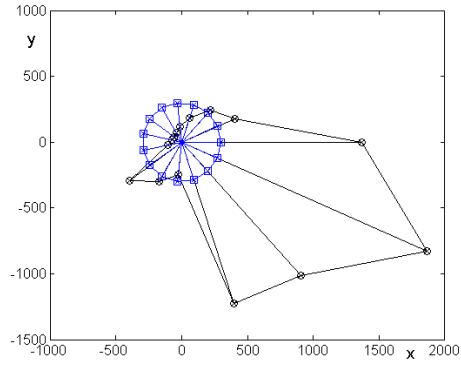


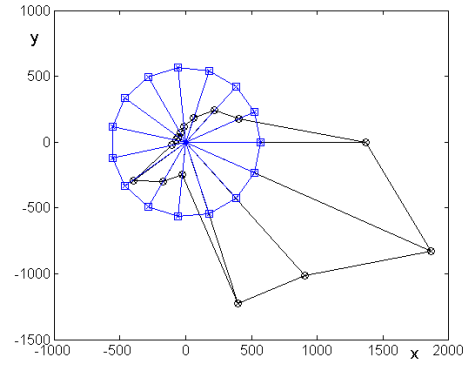
Figura 13 – (a) Función de error de parámetro a en incendio Los Maitenes. (b) Función de error de parámetro a en incendio Quebradilla.

El menor error para a en el caso mostrado con $b = c = \phi^* = 0$ es $a = 5.6947$ para el incendio Los Maitenes y $a = 9.4593$ para el incendio Quebradilla, ver en la figura (13).

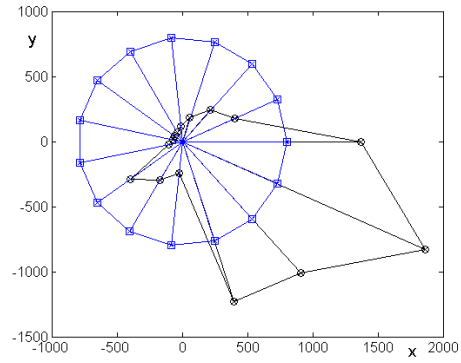
(a)



(b)



(c)



(d)

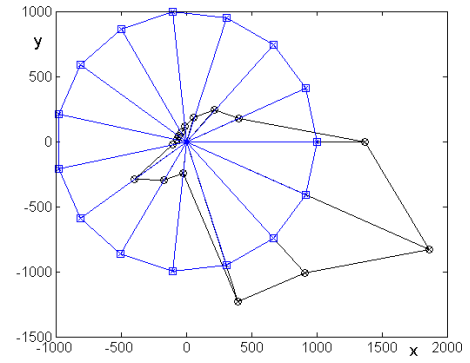
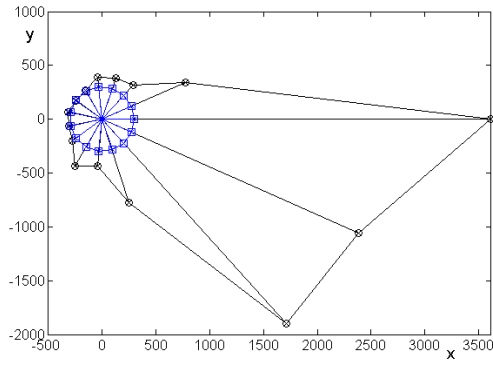


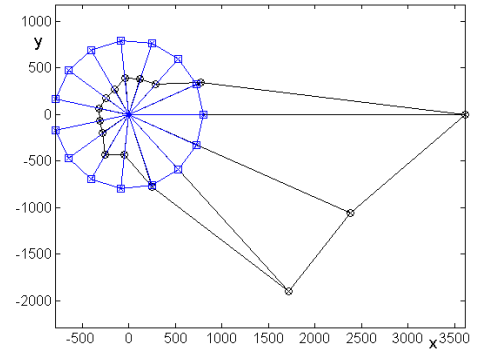
Figura 14 – La figura muestra el comportamiento del parámetro a para diferentes valores en el incendio Los Maitenes con $b = c = \phi^ = 0$. (a) $a = 3$ (b) $a = 5.6947$ (c) $a = 8$ (d) $a = 10$*

En la figura (13) y (14) se observa el efecto de a para los incendios Los Maitenes y Quebradilla respectivamente, a medida que a crece el avance del fuego es mayor, contrario si a decrece el avance es menor. Sin efecto de viento y pendiente se predice la velocidad del incendio.

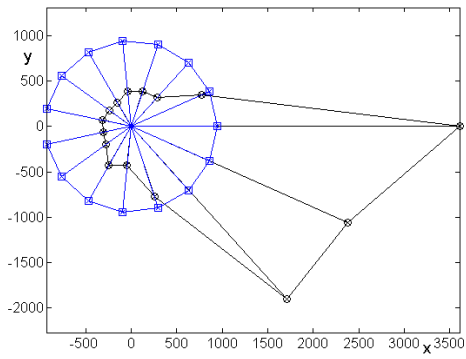
(a)



(b)



(c)



(d)

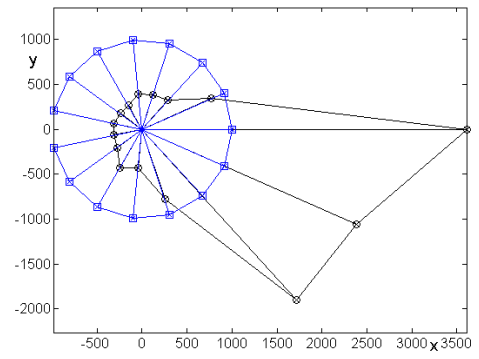
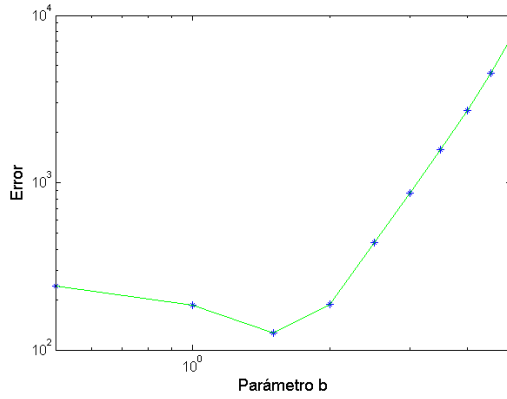


Figura 15 – La figura muestra el comportamiento para diferentes valores del parámetro a en el incendio Quebradilla con $b = c = \phi^* = 0$. (a) $a = 3$ (b) $a = 8$ (c) $a = 9.4593$ (d) $a = 10$

5.2 Propagación con efecto velocidad del viento

El parámetro b en el modelo representado en la ecuación 11 acompaña al efecto del viento. De contar con mejores datos, se podría interpretar su significado en el contexto.

(a)



(b)

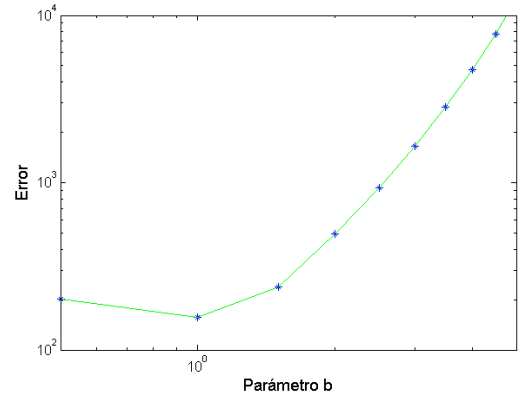
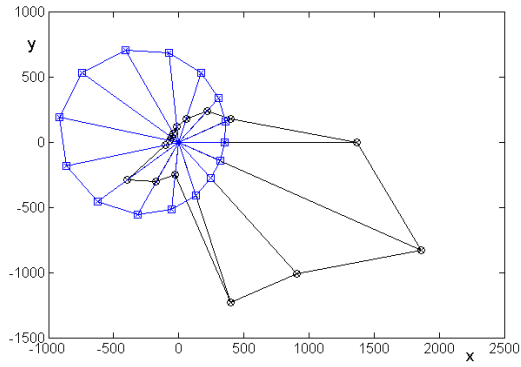


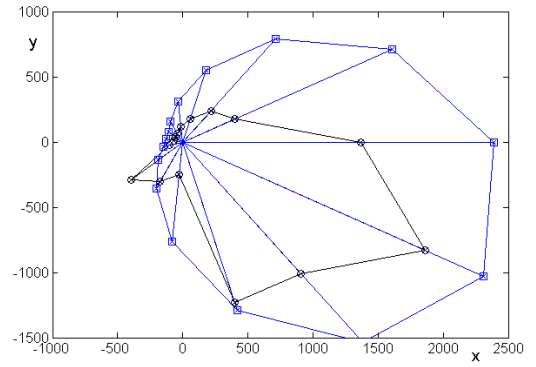
Figura 16 – (a) Función de error de parámetro b en incendio Los Maitenes. (b) Función de error de parámetro b en incendio Quebradilla.

Las funciones de error y la respectiva optimización muestra que $b_1 = 1.0230$ y $b_2 = 1.0525$ son los parámetros óptimos para los incendios Los Maitenes y Quebradilla respectivamente.

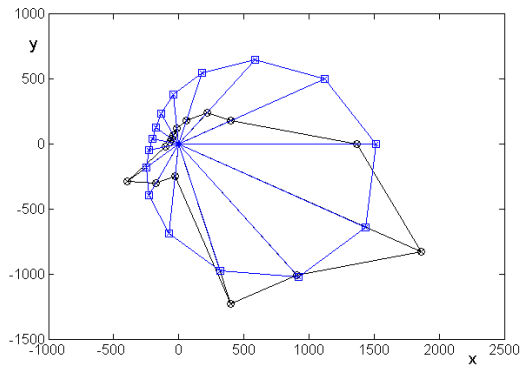
(a)



(b)



(c)



(d)

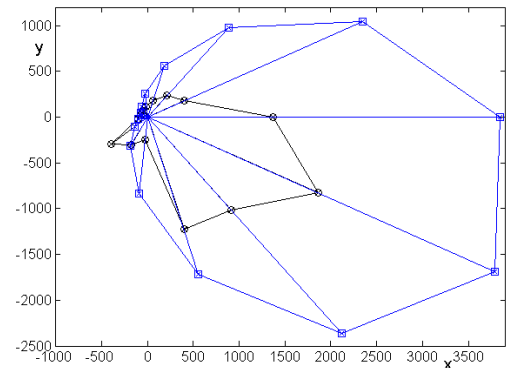
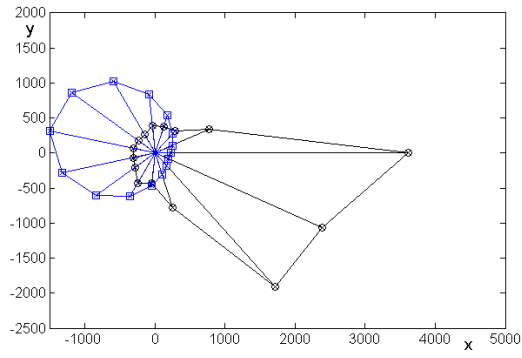


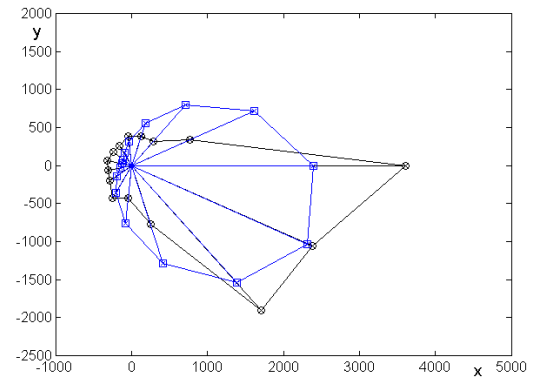
Figura 17 – La figura muestra el efecto del parámetro b con $a = 5.6947$, $c = 0$ y $\phi^* = -0.7$
 (a) $b = -0.5$ (b) $b = 1.5$ (c) $b = 1.0230$ (d) $b = 2$. Incendio Los Maitenes

El comportamiento de b menor que cero en ambos incendios dirige el avance de este en sentido opuesto, mientras que b mayor que cero dirige el avance correctamente.

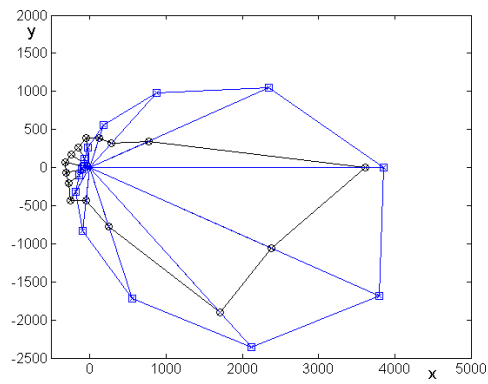
(a)



(b)



(c)



(d)

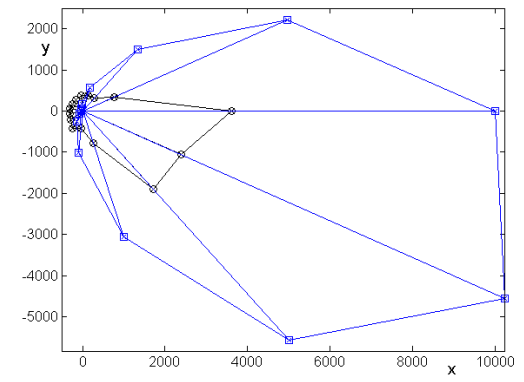
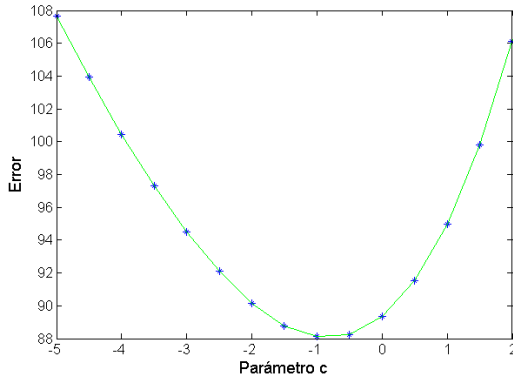


Figura 18 – La figura muestra el efecto del parámetro b con $a = 9.4593$, $c = 0$ y $\phi^* = -0.3$
 (a) $b = -1$ (b) $b = 1.0525$ (c) $b = 2$ (d) $b = 3$. Incendio Quebradilla.

5.3 Propagación con efecto pendiente del terreno

El parámetro c es quien acompaña la variable pendiente de la superficie del incendio, si $c = 0$, implica que no hay efecto de viento como en el caso anterior.

(a)



(b)

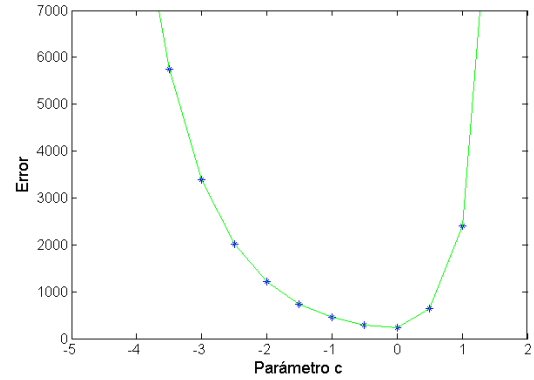


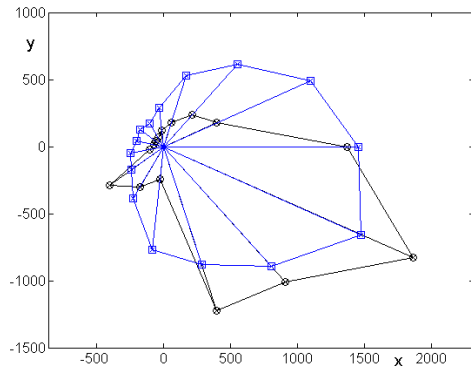
Figura 19 – (a) Función de error parámetro c incendio Los Maitenes. (b) Función de error parámetro c incendio Quebradilla.

Es importante mencionar que c , aun cuando posee un valor mínimo en un intervalo dado, es particular al optimizar pues visualmente en un intervalo grande evidencia no convergencia. Para efectos de la simulación se acota para representar el efecto deseado.

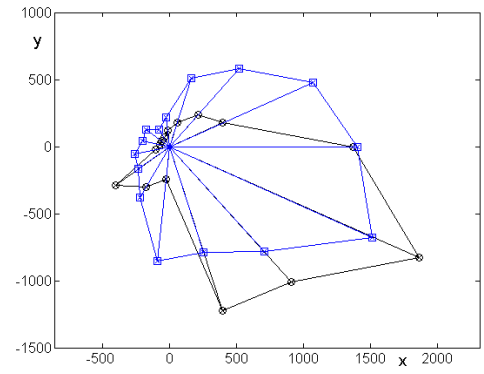
Para ambos incendios el intervalo de parámetros con menor error es $[-1.5 - 0.5]$ sin embargo no se puede inferir algún efecto con los resultados.

Se observa la figura (19) y (20) el parámetro deforma la figura dando más cercanía al perímetro real del incendio; hay que considerar igualmente que el perímetro final que entregan los datos no es el ideal ya que está representando las acciones del combate para apagar el fuego. Por ejemplo, en la figura (9) al costado derecho de la imagen del incendio Los Maitenes se observan puntos que corresponden a viviendas, seguramente hacia esa dirección la propagación pudo ser mayor sin embargo el combate del fuego se enfatizó ahí por ser un sector poblado.

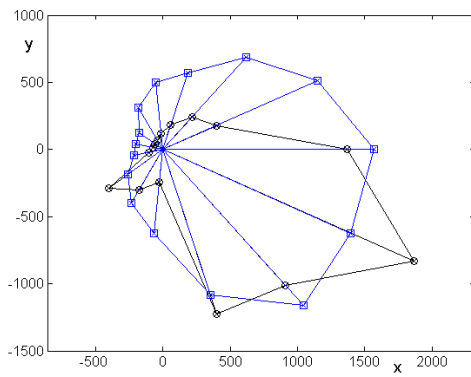
(a)



(b)



(c)



(d)

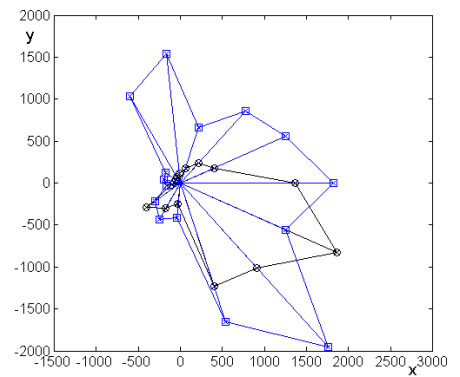
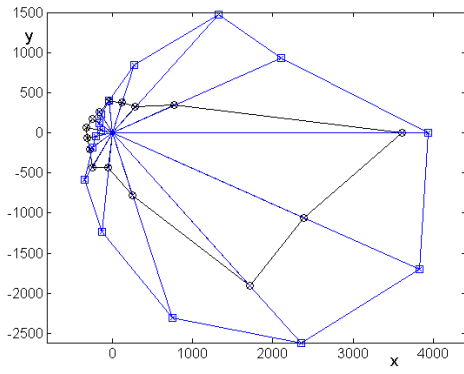
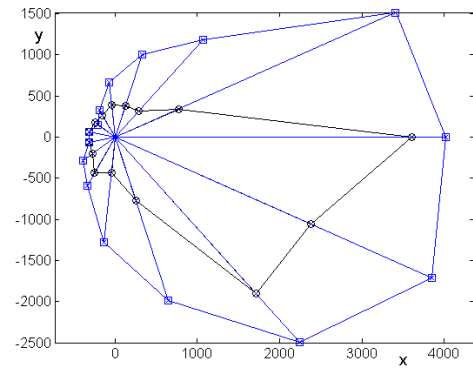


Figura 20 – La figura muestra el efecto del parámetro c con $a = 5.6947$, $b = 1.0230$ y $\phi^* = -0.3$. (a) $c = -1$ (b) $c = -2$ (c) $c = 2$ (d) $c = 5$. Incendio Los Maitenes.

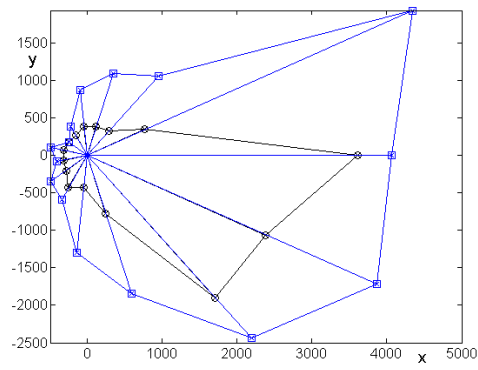
(a)



(b)



(c)



(d)

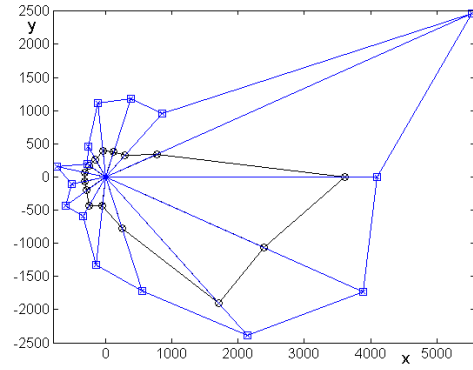
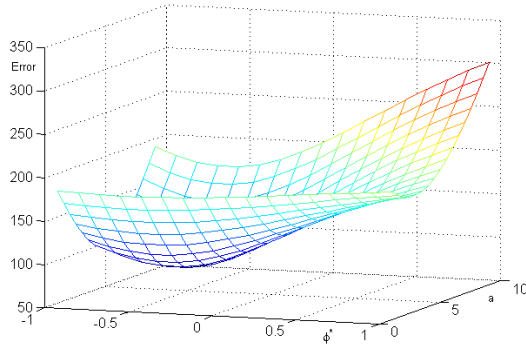


Figura 21 – La figura muestra el efecto del parámetro c con $a = 9.4593$, $b = 1.0525$ y $\phi^* = -0.7$. (a) $c = -1$ (b) $c = 1$ (c) $c = 2$ (d) $c = 3$. Incendio Quebradilla.

5.4 Propagación con efecto combustible y dirección del viento

El objetivo de ajustar el parámetro ϕ^* es verificar una escala de dirección de velocidad representativa y adaptable.

(a)



(b)

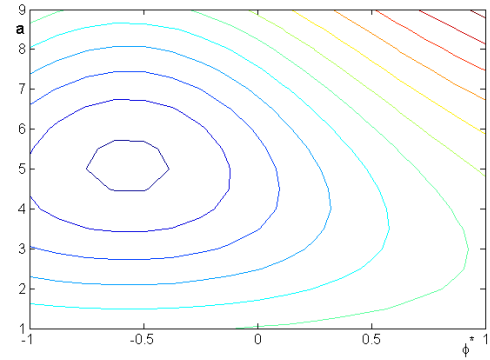


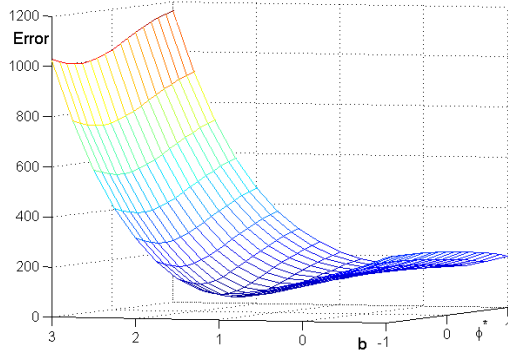
Figura 22 – (a) Función de error. (b) Contorno función de error.

Los resultados verifican el valor de a y ϕ^* obtenidos en las optimizaciones anteriores.

5.5 Propagación con efecto velocidad y dirección del viento

El ajuste de b y ϕ^* corresponde a un incendio con efecto de viento y dirección.

(a)



(b)

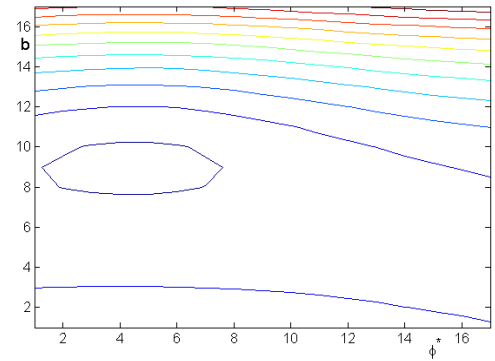


Figura 23 – (a) Función de error. (b) Contorno función de error.

En la imagen se observa un mínimo para $a = 5.6947$ y $c = -1.2$.

5.6 Análisis de sensibilidad de los parámetros

Para el incendio Los Maitenes, se analiza la sensibilidad de los parámetros al observar el número de condición de la matriz Hessiana [31]; este debe ser pequeño para asegurar menor correlación y dependencia entre los parámetros y para identificar si el algoritmo de identificación es más estable.

$[a \ b]$	$[a \ c]$	$[a \ \phi^*]$	$[b \ \phi^*]$	$[c \ \phi^*]$	$[b \ c]$
1.2525	1.6093e+04	1.2127	29.9648	26.5634	89.1194

Tabla 5 – Número de condición obtenido de la optimización de dos parámetros en todas sus combinaciones.

$[a \ b \ c]$	$[a \ b \ \phi^*]$	$[a \ c \ \phi^*]$	$[b \ c \ \phi^*]$
5.5040	10.1984	10.0971	5.7836

Tabla 6 – Número de condición obtenido de la optimización de tres parámetros en todas sus combinaciones.

$[a \ b \ c \ \phi^*]$
330.0616

Tabla 7 – Número de condición obtenido de la optimización de cuatro parámetros.

En la tabla (10) el número de condición es el más alto y puede ser por el efecto del parámetro c al tener mayor dependencia de los otros parámetros. En los demás casos este número es pequeño lo cual indica la obtención de parámetros adecuados al contexto.

6 Resultados y trabajos futuros

Con la simulación de dos incendios forestales se evidencia que los factores que influyen fuertemente son la velocidad asociada a un combustible y la velocidad del viento junto con la pendiente del terreno; estos factores expresados en parámetros caracterizan visualmente el comportamiento al realizar una simulación. El estudio permite ajustar los parámetros mediante la resolución de un problema inverso incorporando datos reales. Al incorporar mayor información se podrá validar el comportamiento que tienen realmente los parámetros y el modelo de propagación propuesto.

Dado que se tienen datos de observación, y el análisis estadístico necesario de ellos, se puede crear un gran número de submuestras con reposición de los mismos datos, por ejemplo, 2000 muestras, y se calcula para cada muestra resultante el valor estadístico en cuestión. Esta técnica estadística se llama *bootstrap*.

Entonces se tiene una amplia cantidad de subconjuntos Ω_i de remuestreo el error de ellos para cada función de ajuste tendría la siguiente forma

$$E^\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \left(\sum_{j \in \Omega} \left\| \frac{R(U_i, e) - \hat{R}_i}{R(U_i, e)} \right\|^q \right)^{1/q} \quad (26)$$

De ellos interesa el promedio de los errores y la desviación estandar y media.

$$\bar{E} = \frac{1}{1000} (E^{\Omega_1} + E^{\Omega_2} + E^{\Omega_3} + \dots + E^{\Omega_{1000}}) \quad (27)$$

$$\sigma^q(\bar{E}) = \frac{1}{1000} \left(\sum_{j=1}^{100} |\bar{E} - E_j^\Omega|^q \right)^{1/q} \quad (28)$$

Se puede proponer una generalización analítica para el cálculo del error del modelo de la siguiente forma

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j |\epsilon_i^{\text{modelo}} + \epsilon_i^{\text{perturbado}}| \leq \sum_{i=1}^j |\epsilon_i^{\text{modelo}}| + |\epsilon_i^{\text{perturbado}}| = \sum_{i=1}^j |\epsilon_i^{\text{modelo}}| + \sum_{i=1}^j |\epsilon_i^{\text{perturbado}}| \quad (29)$$

el interés está en calcular el error total de cada modelo mediante la siguiente expresión.

$$\epsilon_i = \epsilon^{\text{modelo}} + \epsilon^{\text{observacion}} + \epsilon^{\text{pert. artificial}} \quad (30)$$

Finalmente en función de la perturbación se tiene un modelo lineal para el error.

$$E^p = E^o + pE \quad (31)$$

Una duda ahora es saber cuál es el porcentaje de perturbación tal que el error de perturbación iguala al error del modelo.

Además se podría generalizar el modelo de errores para calcular errores relativos y absolutos aceptando la hipótesis de que si los datos de observación son más pequeños, el error también será más pequeño.

Con la colaboración de un investigador especialista en teledetección de datos se construye una representación exacta del incendio Los Maitenes utilizando la herramienta Matlab al hacer una interpolación de superficie en la figura (24); a medida que existan más datos, mejor será la calidad de la superficie obtenida.

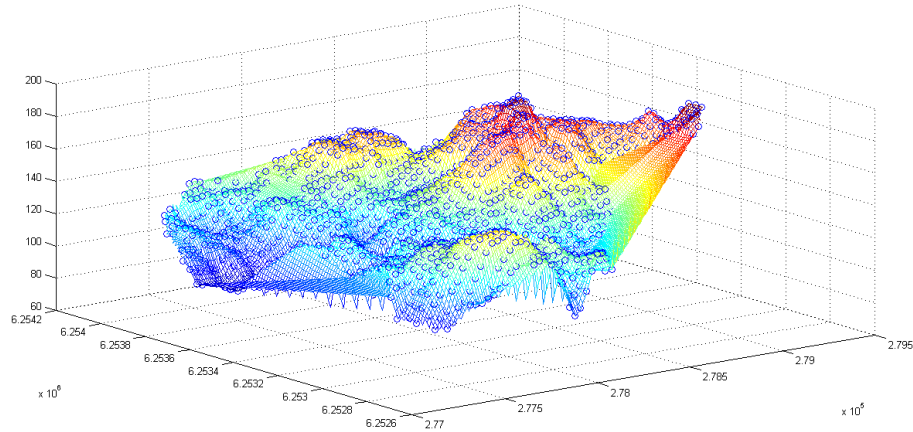


Figura 24 – Representación tridimensional de la superficie del incendio Los Maitenes

El código utilizado para representar un conjunto de datos mayor del terreno.

```
clear all

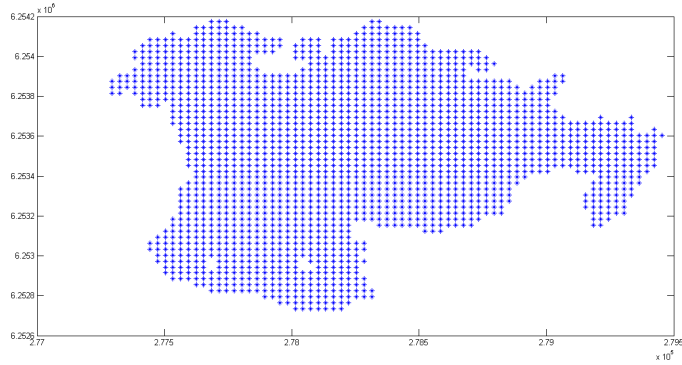
load X.txt -ascii
load Y.txt -ascii
load Z.txt -ascii
Phi=(0:1:14)'*2*pi/15; XF=X(:,end);

figure(1);plot(X,Y,'*');
figure(2);plot3(X,Y,Z,'*');

[xq,yq] = meshgrid(277294.64:10:279454.64,6252734.96:10:6254174.96);
vq = griddata(X',Y',Z',xq,yq);
figure(3);mesh(xq,yq,vq);
hold on;
figure(3);plot3(X,Y,Z,'o');

figure(5);contour(vq);
```

(a)



(b)

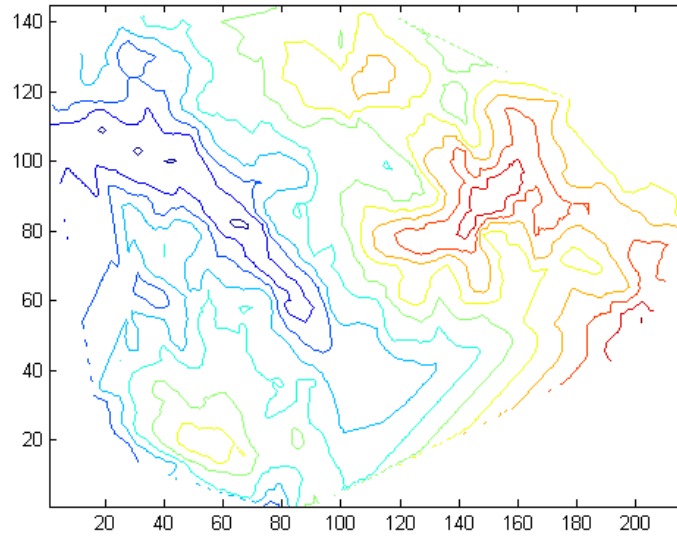


Figura 25 – (a) Representación de los puntos (X,Y) del incendio Los Maitenes. (b) Contorno de la superficie de incendio Los Maitenes.

Referencias

- [1] PEDERNEIRA, P., CASTILLO, M., & JULIO, G., *Diseño y Validación de un Simulador de Incendios Forestales en Chile*, 2010.
- [2] DUMOND, Y., *An Applied Step In Forest Fire Spread Modelling*, In ECMS (pp. 32-38), 2009.
- [3] ALEXANDER, M. E., & CRUZ, M. G., *Are the applications of wildland fire behaviour models getting ahead of their evaluation again?*, Environmental Modelling & Software, 41, 65-71, 2013.

- [4] CASSAGNE, N., PIMONT, F., DUPUY, J. L., LINN, R. R., M OARELL, A., OLIVERI, C., & RIGOLOT, E., *Using a fire propagation model to assess the efficiency of prescribed burning in reducing the fire hazard*, Ecological Modelling, 222(8), 1502-1514, 2011.
- [5] CONAF, *Alternativas al uso del Fuego como Quemas Controladas*, Estadísticas Generales, Recuperado de <http://www.alternativasquemas.cl/index.php?id=72>
- [6] HILTON, J. E., MILLER, C., SULLIVAN, A. L., & RUCINSKI, C., *Effects of spatial and temporal variation in environmental conditions on simulation of wildfire spread*, Environmental Modelling & Software, 67, 118-127, 2015.
- [7] MALLET, V., KEYES, D. E., & FENDELL, F. E. *Modeling wildland fire propagation with level set methods*, Computers & Mathematics with Applications, 57(7), 1089-1101.,(2009)
- [8] GHISU, T., ARCA, B., PELLIZZARO, G., & DUCE, P. *A level-set algorithm for simulating wildfire spread.*, Comput. Model Eng. Sci, 102, 83-102, (2014)
- [9] REHM, R. G., & MCDERMOTT, R. J. *Fire-front propagation using the level set method*, US Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology.,(2009).
- [10] OSHER, S., & SETHIAN, J. A., *Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, Journal of computational physics, 79(1), 12-49, (1988).
- [11] SETHIAN, J. A. , *A fast marching level set method for monotonically advancing fronts*, Proceedings of the National Academy of Sciences 93(4), 1591-1595., 1996.
- [12] CASTILLO. M, JULIO. G, & PEDERNERA. P, *Diseño e implementación de herramientas computacionales para la prevención y combate de incendios forestales. Laboratorio de Incendios Forestales*, Departamento de Manejo de Recursos Forestales, Universidad de Chile,(2004).
- [13] SAAVEDRA, J. A., *Sistema de prognosis y simulación del comportamiento del fuego, análisis y comparación de los principales referentes a nivel mundial*, (informe), CONAF, 2014.
- [14] SULLIVAN, A., *A review of wildland fire spread modelling, 1990-present, 1: Physical and quasi-physical models*, arXiv preprint arXiv:0706.3074., 2007.
- [15] FINNEY, M. A., *FARSITE: Fire Area Simulator-model development and evaluation*, 2004.
- [16] VIEGAS, D. X., *Slope and wind effects on fire propagation*, International Journal of Wildland Fire, 13(2), 143-156, 2004.

- [17] JULIO, G., CASTILLO, E., & PEDERNERA, P. *Modelación de Combustibles*. Actas Taller Internacional sobre Prognosis y Gestión en Incendios Forestales. Proyecto FONDEF FI-13, Santiago. Pág, 111-128, (1995).
- [18] BEER, T. *The speed of a fire front and its dependence on wind-speed*, International Journal of Wildland Fire, 3(4), 193-202, 1993.
- [19] PORRERO, M. *Incendios forestales, investigación de causas*, Mundi-Prensa, Madrid, España, (2001).
- [20] ROTHERMEL, R. C., *A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels*, 1972.
- [21] ALBINI, F., *Estimating wildfire behavior and effects*, USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, General Technical Report INT-30, 92 pp, 1976.
- [22] MOONAB, K., DUFFA, T. J., & TOLHURSTA, K. G., *Characterising forest wind profiles for utilisation in fire spread models*, 2013.
- [23] ZÁRATE LÓPEZ, L. G. *Estudio de las características físicas y geométricas de la llama en los incendios forestales*, Universitat Politècnica de Catalunya, (2004).
- [24] WEISE, D. R., & BIGING, G. S. *Effects of wind velocity and slope on fire behavior*. Fire Safety Science, 4, 1041-1051. (1994).
- [25] GLASA, J., & HALADA, L., *On elliptical model for forest fire spread modeling and simulation*, Mathematics and Computers in Simulation, 78(1), 76-88, (2008).
- [26] SHARPLES, J. J., TOWERS, I. N., WHEELER, G., WHEELER, V. M., & MCCOY, J. A., *Modelling fire line merging using plane curvature flow*, 2013.
- [27] CHENEY, N. P., GOULD, J. S., & CATCHPOLE, W. R., *Prediction of fire spread in grasslands*, International Journal of Wildland Fire, 8(1), 1-13, 1998.
- [28] NOBLE, I. R., GILL, A. M., & BARY, G. A. V., *McArthur's fire danger meters expressed as equations*, Austral Ecology, 5(2), 201-203, 1980.
- [29] SOTO, M. C., & SALINAS, R. G., *Estudio del comportamiento del fuego mediante simulación de incendios forestales en Chile*. Geographicalia, (58), 81-103, 2010.
- [30] JULIO, G., Y GIROZ, G., *Notas sobre el comportamiento del fuego y su aplicación en el control de incendios forestales*, Bosque (Valdivia), 1(1), 18-27, 1975.
- [31] BERRES, S., BURGER, R., & GARCÉS, R. *Centrifugal settling of flocculated suspensions: a sensitivity analysis of parametric model functions*, Drying Technology, 28(7), 858-870, (2010).

A Anexo I: Ponencia Congreso Internacional de Geografía: Desarrollos y avances en aplicaciones de estadísticas territoriales CIGEO

La primera versión del Congreso Internacional de Geografía: Desarrollos y avances en aplicaciones de estadísticas territoriales (CIGEO) fue realizado en la Universidad Católica de Temuco, Región de la Araucanía los días 12 y 13 de octubre del año 2017. Organizado por el Laboratorio de Planificación Territorial de la Universidad Católica de Temuco y por el Instituto Nacional de Estadísticas (INE).

El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

N. Cárcamo¹ S. Berres²

¹Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Católica del Maule

²Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas
Universidad Católica de Temuco

CIGEO, 2017

Resumen

- 1 Propagación de un incendio forestal
 - Características de propagación
 - Incendio Los Maitenes
- 2 Datos experimentales
 - Descripción de incendios
 - Inclinação del terreno
- 3 Simulación - uso de datos
 - Análisis de comportamiento del incendio forestal

El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

└ Propagación de un incendio forestal

└ Incendio Los Maitenes

Perímetro final



El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

└ Datos experimentales

└ Descripción de incendios

Descripción de incendios



Qué se modela en el incendio forestal?

El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

- └ Datos experimentales
- └ Inclinación del terreno

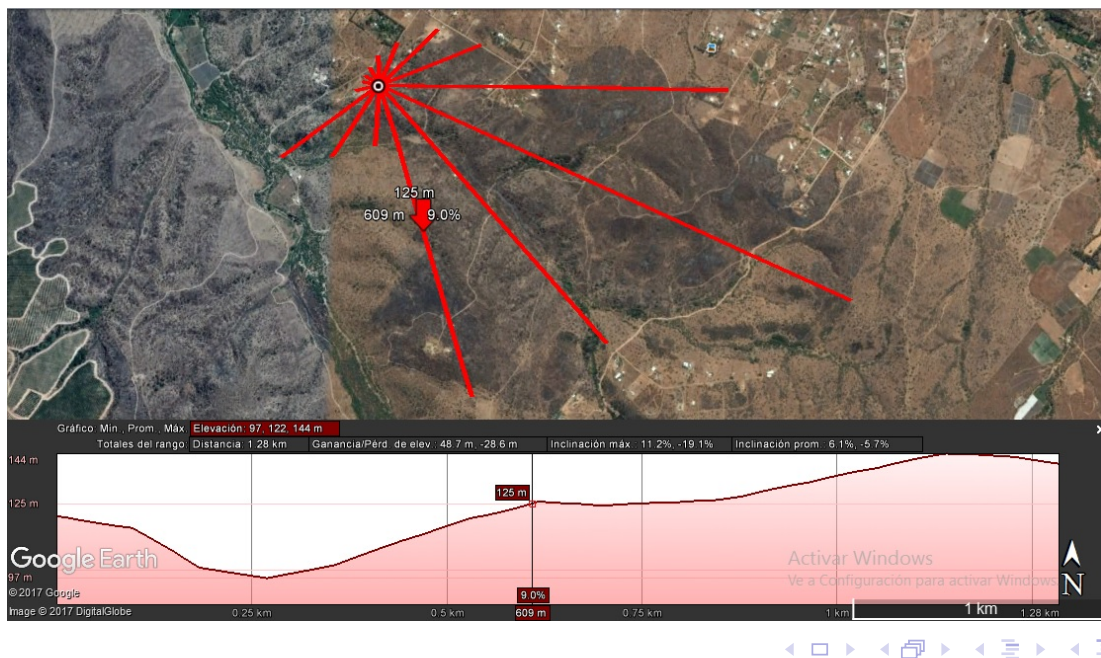
Inclinación del terreno

Caracterización del terreno

$$C_k(X_j^i, Z_j^i) = s_{k,0} + s_{k,1}(X - X_{jN}^k) + s_{k,2}(X - X_{jN}^k)^2 + s_{k,3}(X - X_{jN}^k)^3$$

$(s_{k,c})_{c=0}^3$: parámetros del polinomio

Este resultado es utilizado para incorporar a la ecuación diferencial representativa del modelo.



Ecuación diferencial

El valor $x_j(T)$, que corresponde al avance del fuego en la dirección ϕ_j en el tiempo T , se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dx_j}{dt} = R(U_{\phi_j}, \theta(x_j))$$

con

$$R(U, \Theta) = ae^{(bU+c\Theta)}, \quad U_{\phi_j} = U_0 \cos(\phi_j - \phi_j^*)$$

y datos iniciales $x_j(0) = 0$.

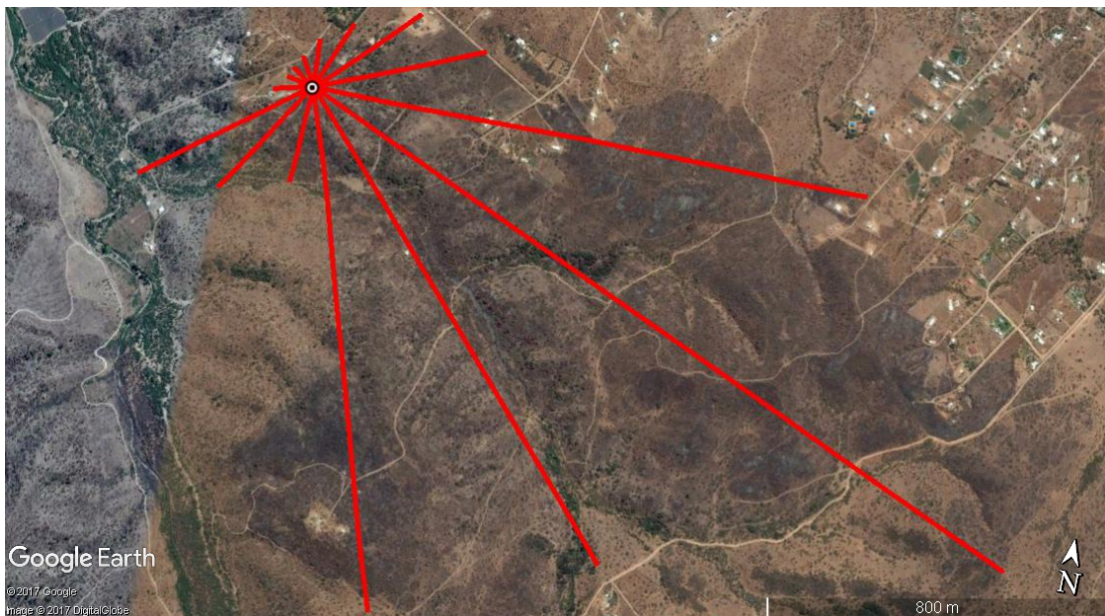
La solución nos entregará las posiciones alcanzadas en cada línea de control por el incendio forestal

El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

- └ Datos experimentales
- └ Inclinação del terreno

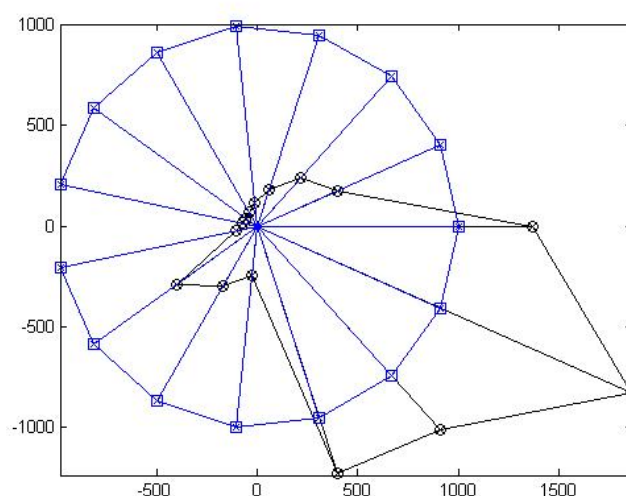
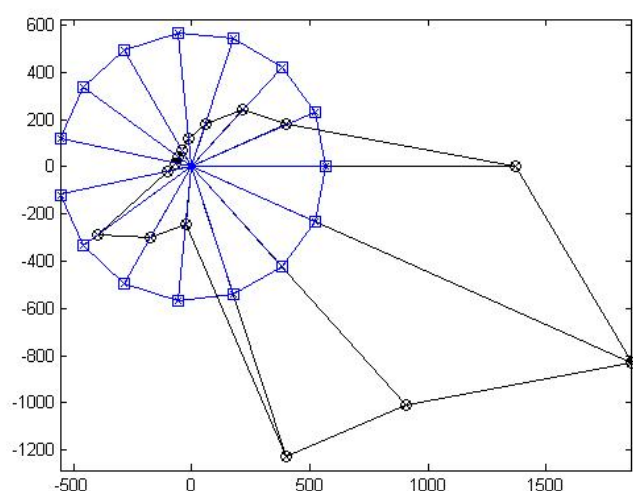
Supuestos de cese del fuego

- Presencia de viviendas
- Tipo de combustible



Descripción de velocidad de avance del incendio

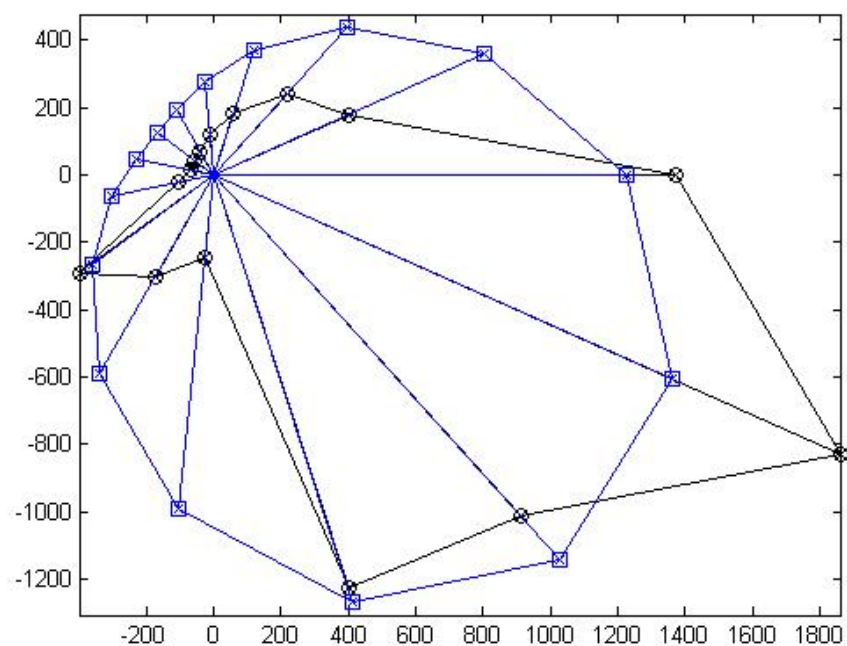
Esto implica que el parámetro a es el que describe la velocidad de avance. En las imágenes vemos diferentes variaciones.



$$R(U, \Theta) = a e^{(bU + c\Theta)}$$

Descripción de dirección de avance del incendio

En este ajuste se utilizó la variación del parámetro ϕ^* con $a = 5.6947$, $c = 0$ obtenemos un ϕ óptimo.

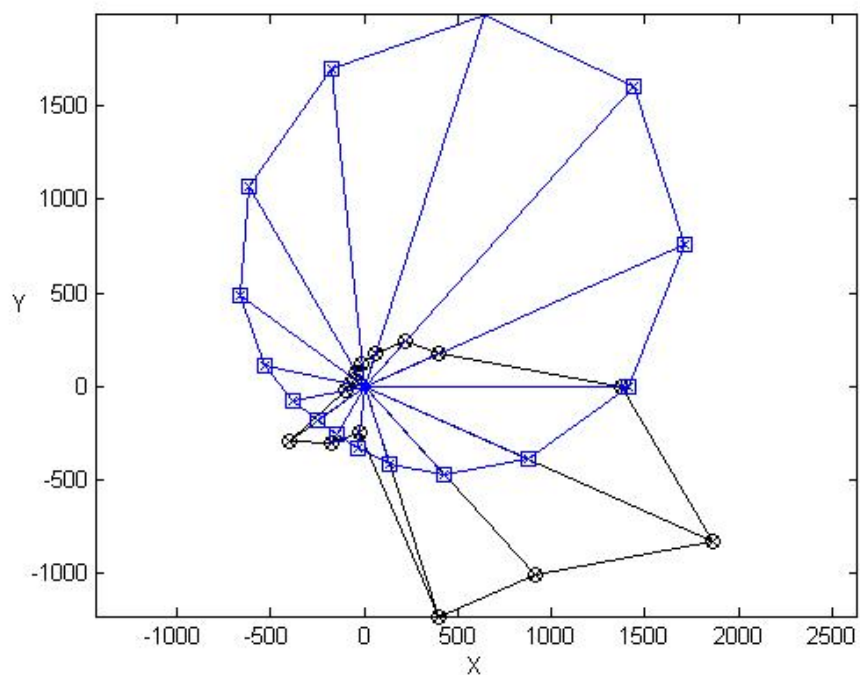


El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

└ Simulación - uso de datos

└ Análisis de comportamiento del incendio forestal

Parámetro ϕ mal ajustado



$$R(U_\phi, \Theta) = ae^{(bU_\phi + c\Theta)} \quad \text{con} \quad U_\phi = U_0 \cos(\phi - \phi^*),$$

Dirección del viento

Definimos la dirección del viento como ϕ^* , y la velocidad del viento U para determinar la velocidad del viento en la dirección ϕ como

$$U_{\phi} = U_0 \cos(\phi - \phi^*),$$

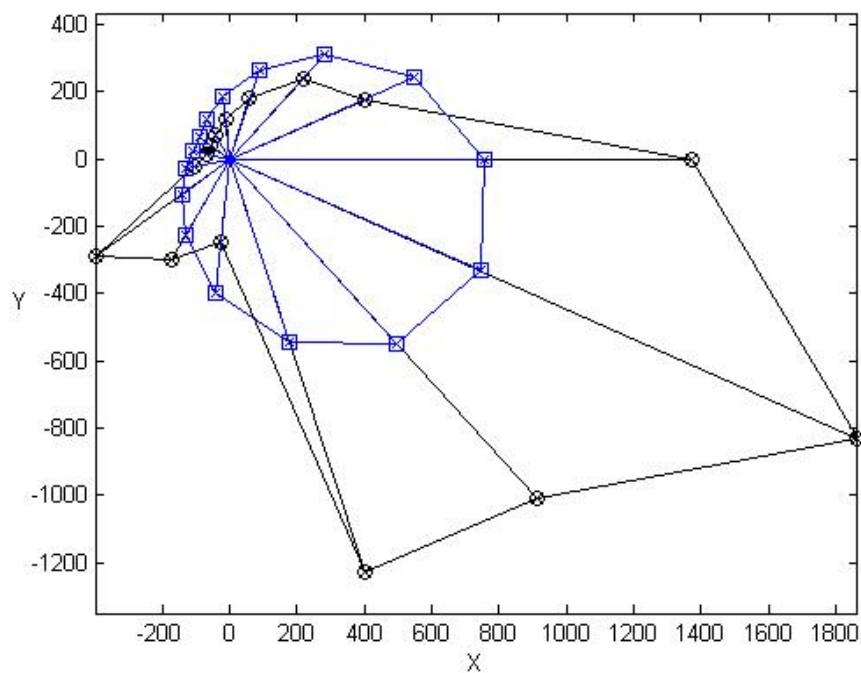
donde ϕ es el ángulo absoluto y $\phi - \phi^*$ el ángulo relativo a la dirección del viento.

El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

└ Simulación - uso de datos

└ Análisis de comportamiento del incendio forestal

Parámetro a mal ajustado



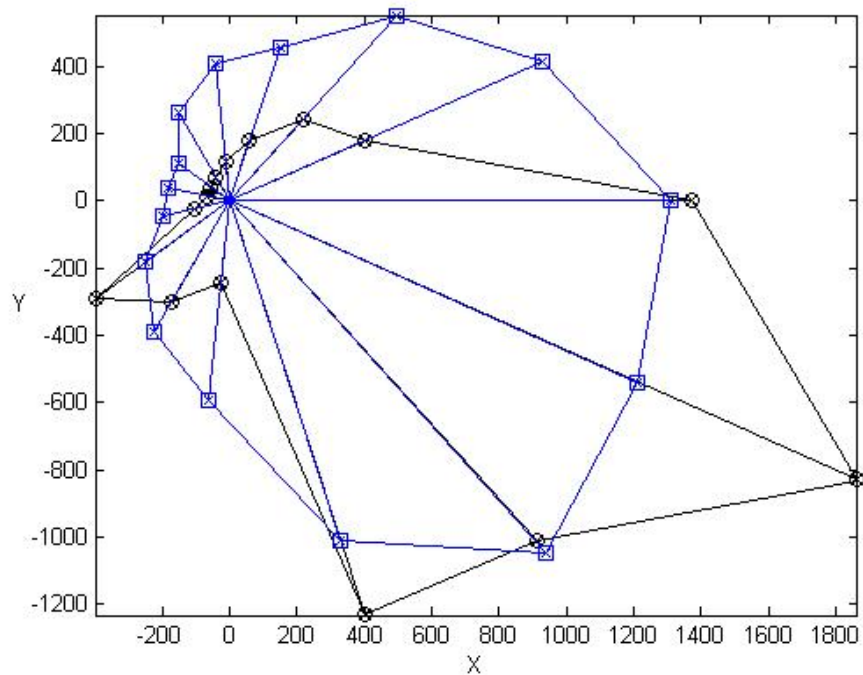
$$R(U, \Theta) = \textcolor{red}{a}e^{(bU+c\Theta)}$$

El efecto de pendientes del terreno en incendios forestales

└ Simulación - uso de datos

└ Análisis de comportamiento del incendio forestal

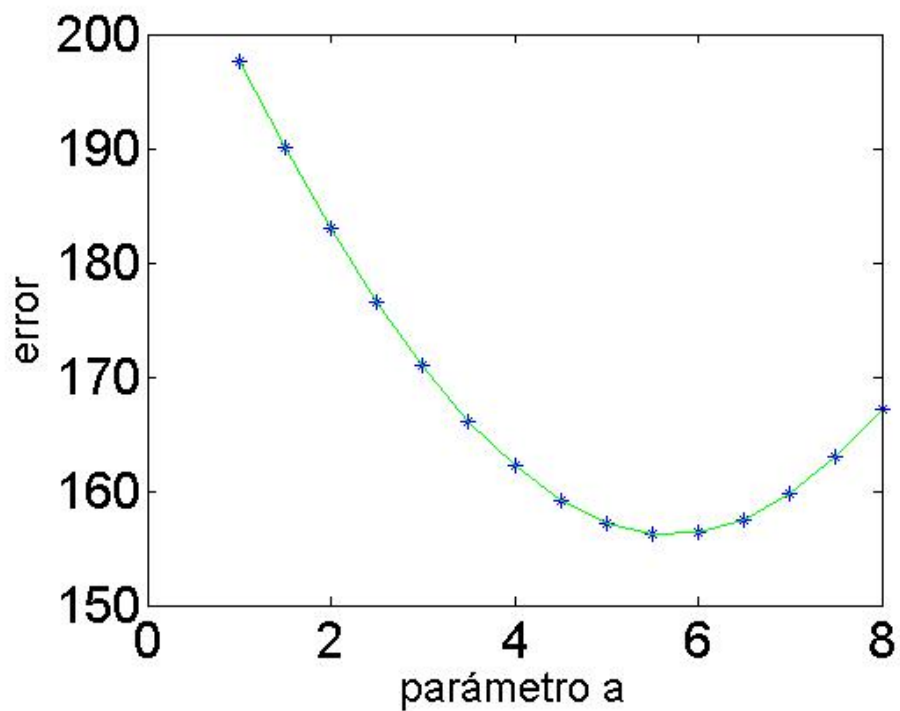
Efecto de datos de inclinación del terreno



$$R(U, \Theta) = ae^{(bU + c\Theta)}$$

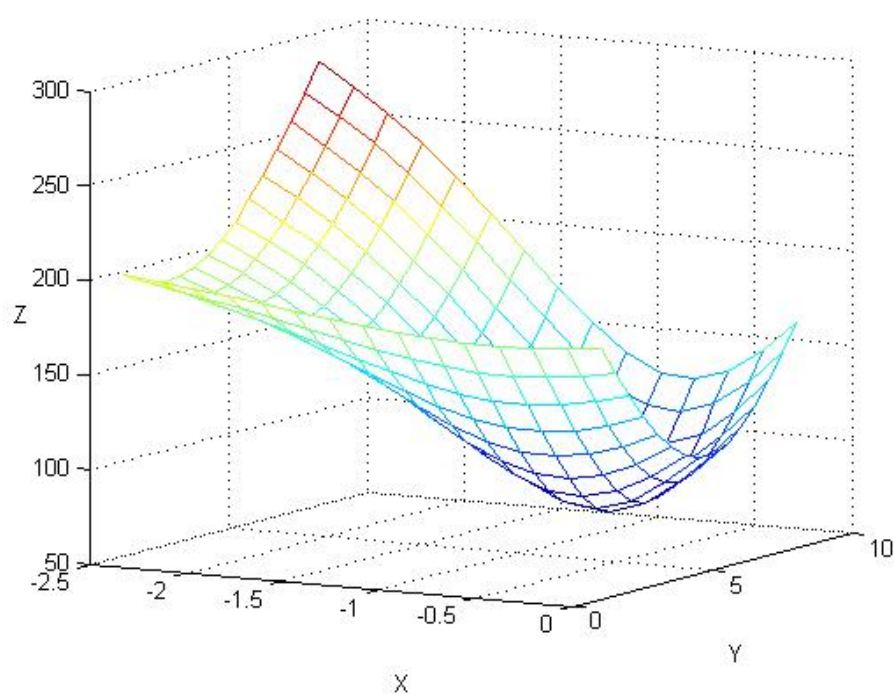
Descripción de velocidad de avance del incendio

En este ajuste se utilizó la variación del parámetro a con $b = c = 0$ obtenemos un a óptimo.



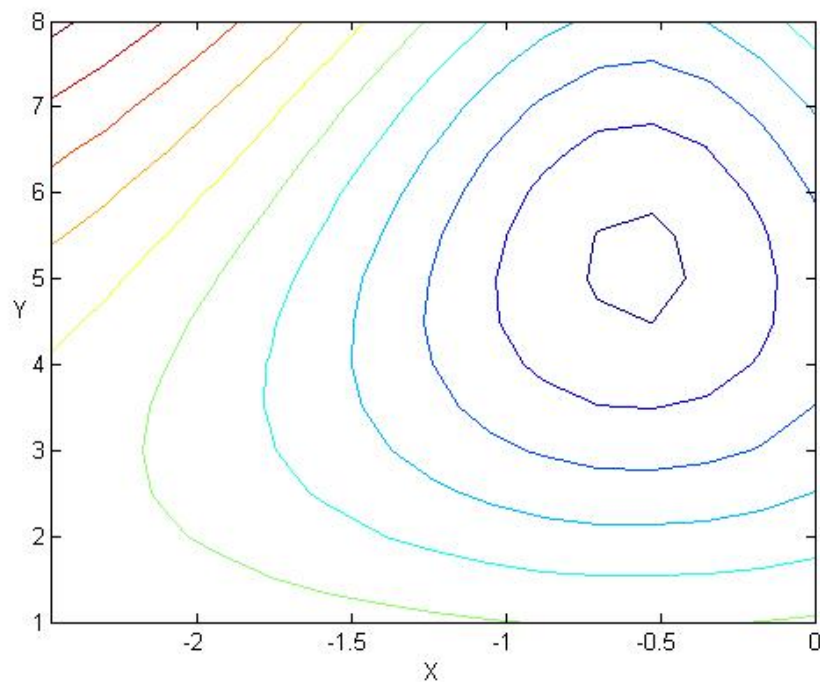
Descripción de velocidad de avance del incendio

En este ajuste se utilizó la variación del parámetro a y ϕ^* obtenemos ambos parámetros óptimo.



Descripción de velocidad de avance del incendio

En este ajuste se utilizó la variación del parámetro a y ϕ^* obtenemos ambos parámetros óptimo.



Conclusiones

- Propuesta de análisis estadístico de parámetros óptimos utilizados en la simulación de la propagación de un incendio forestal.
- Falta incorporar variantes importantes a la simulación tal como tipo de combustible y humedad del combustible
- Para esto **necesitamos datos**.

B Anexo II: 21st Internacional Congress on Modelling and Simulation MODSIM

El 21° Congreso Internacional de Modelado y Simulación (MODSIM2015) se llevó a cabo en el Centro de Convenciones y Exhibiciones de Gold Coast, Broadbeach, Queensland, Australia, del domingo 29 de noviembre al viernes 4 de diciembre de 2015. Organizado por la Sociedad de Modelado y Simulación de Australia y Nueva Zelanda Inc. (MSSANZ)

El tema de este evento fue asociarse con la industria y la comunidad para la innovación y el impacto a través del modelado .

An augmented level set model for the propagation of bushfire fronts

S. Berres^a and N. Cárcamo^a

^a*Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas, Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile
Email: sberres@uct.cl*

Abstract: Based on the model of Rothermel (1972), during several decades, the spread of bushfires has been studied by empirical, quasi-empirical and physical models, in order to increase the knowledge on this phenomenon and its relevant characteristics, and to deliver timely information for fire extinction. In Chile, since 1976, the UNESCO has proclaimed in total 9 Biosphere Reserves within its ‘Man and the Biosphere’ program (Gedda, 2014). This program emphasizes the importance of protection measures and the relevance of scientific research in the area.

Recently, in March 2015, a large forest fire in the ‘China Muerta’ National Park in mid-southern Chile devastated some 8,000 hectares of native *Araucaria araucana*-*Nothofagus* forest, as firefighters had a hard job to extinguish the fires. This study is motivated by the need of a better understanding of forest fire dynamics in order to allow for improved prediction and prevention measures.

Propagating fronts or interfaces in general can be described by the Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

where $\phi = \phi(t, x, y)$ represents the front implicitly as level-set where $\phi = 0$. This implicitly defined front is propagated by the convection velocities v and w in x and y direction, respectively. The propagation direction is normal to the front, pointing to the side where $\phi > 0$. Propagating fronts can be observed in different situations such as the interaction of gas and liquid in improved oil recovery, medical image segmentation and object tracking.

In the application of the Hamilton-Jacobi equation to bushfire propagation, the sign of ϕ distinguishes whether the corresponding area is burned ($\phi < 0$) or unburnt ($\phi > 0$), thus implicitly characterising the location of the fire front as $\phi = 0$.

In this contribution, an augmented propagation model based on the Hamilton-Jacobi equation is developed by introducing additional variables such as combustion and heat. The evolution of these variables is described by differential equations. The goal is to couple the equation for front evolution with a heat equation and an equation that corresponds to the local combustion process. The model dynamics is demonstrated by numerical simulations.

Keywords: *Hamilton-Jacobi equation, level set method, bushfire front propagation*

1 INTRODUCTION

Bushfire propagation models are formulated to be able to gather and consider prior information, which can be useful in an emerging fire attack. Studies focussing on specific fire events have yielded valuable insights that certain parameters like soil properties, combustion material, moisture or slope characterize the physical phenomenon, see e.g. Pedernera et al. (2010), Cassagne et al. (2011), Dumond (2009), Alexander and Cruz (2013), Hilton et al. (2015). Complementarily, models originated as a rather academic exercise, even though they do not fully describe the whole phenomenon, have shown to find their way to operational or experimental use, see Sullivan (2007).

Since the 1920s, various empirical, quasi-empirical and physical propagation models have been proposed. Several authors argue that for fire spread there are three factors that have a significant influence, namely topography, climate and fuel, see Rothermel (1972), Sethian (1996), Finney (2004), Sullivan (2007). A general consensus is also the ellipsoidal form for the spread of fire, although other forms as ovals or drops may be more accurate according to the scenario or fuel type being studied (Dumond (2009); Finney (2004); Hilton et al. (2015), Mallet et al. (2009)). We also refer to coupled fire-atmosphere models, where the fire spread model includes fuel decay and heat release, see Mandel et al. (2011).

The forest fuel consists of living and dead plant material as shrubs, wood or grass, i.e. biomass consisting of cellulose as main chemical component (Sullivan, 2007). The principal physical process during burning is heat transfer, which can be realized through conduction, convection or radiation.

This contribution adapts the setup of using a Hamilton-Jacobi equation (1), and in particular the Level Set Method proposed by Osher and Fedkiw (2006), as modeling framework for the numeric calculation of fire front propagation. Thereby, the movement of the interface is described by an Eulerian formulation, where the function ϕ represents the front implicitly as the set satisfying $\phi = 0$.

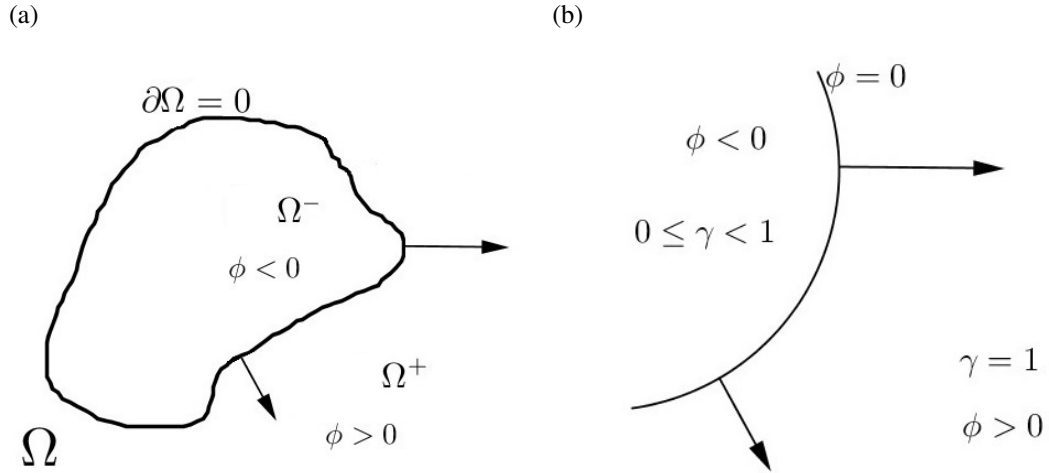


Figure 1. (a) Partition of $\Omega = \Omega^- \cup \partial\Omega \cup \Omega^+$ corresponding to the subdomains where $\phi < 0$, $\phi = 0$ and $\phi > 0$, respectively. (b) Values of combustible γ : full load $\gamma = 1$ in unburnt area ($\phi > 0$), reduced combustibility $\gamma \in (0, 1)$ in burning area ($\phi < 0$).

Figure 1 (a) explains the partition of the two-dimensional spatial domain Ω for distinct values of ϕ , namely $\partial\Omega = \{(x, y) | \phi = 0\}$ for the fire front itself, $\Omega^+ = \{(x, y) | \phi > 0\}$ for the unburnt surface, and $\Omega^- = \{(x, y) | \phi < 0\}$ for the burning or burnt surface.

Combustion is a chemical process with fuel and oxygen as main ingredients. Given that these ingredients are exhaustively available in forests or bushland, fires occur naturally as soon as the ignition temperature of the respective fuel is reached. In order to track the fuel change in a fire, the variable γ is introduced to account for the fuel amount, which evolves according to the combustion rate. The fuel amount γ depends on the fire status ϕ as

$$\gamma \begin{cases} = 1, & \text{for } \phi > 0, \quad (\text{unburnt surface}), \\ \in [0, 1) & \text{for } \phi < 0, \quad (\text{burning surface}). \end{cases} \quad (2)$$

Here, $\gamma = 1$ corresponds to full fuel load, which applies for the unburnt area (where $\phi > 0$), and $\gamma \in [0, 1)$ indicates reduced combustible, which applies for the burning area (where $\phi < 0$), see Figure 1 (b) for illustration. In the augmented model, the fuel γ and the resulting heat are incorporated as additional variables, which are described by corresponding equations, that eventually take account of environmental conditions.

2 MODELLING

In the modelling of bushfire spread, the most relevant physical properties are fuel moisture, topographic characteristics or weather conditions. The conceptual modelling indicates how these properties can be included in a mathematical modeling framework set up by the Hamilton-Jacobi equation that describes the fire front propagation.

2.1 Conceptual modelling

In the spread of bushfires the propagation speed depends on how the heat received by the fuel is related to the heat required to bring the fuel to the ignition temperature which activates the combustion. The equation of Rothermel (1972)

$$R = \frac{I_R \xi (1 + \phi_w + \phi_s)}{\rho_b \zeta Q_{ig}}$$

predicts the propagation speed R in a bed of homogeneous fuel by experimental data, using statistical correlation techniques for adjustments.

The topography is expressed in terms of the slope of the surface, which is flat under ideal conditions. Rothermel (1972) defined a dimensionless coefficient $\phi_s = 5.275\beta^{-0.3}(\tan \phi)^2$ with packing ratio of the fuel bed β , assuming that there is no relationship between slope $\tan \phi$ and wind direction. In the work of Finney (2004), the effects of varying slope and wind combinations establishing a so-called ‘wind-slope vector’ are simulated. In their documented simulation, some interesting effects can be observed: The length of the spread increases disproportionately with the wind speed. For example, the spread of the fire at wind speed of 20 m/s is more than the double than the spread at wind speed 10 m/s.

The topography directs how energy is transferred to the fuel and the atmosphere. The upslope area is burned faster than the downward slope area, see Sullivan (2007).

For the wind being a relevant factor, Rothermel (1972) defined a dimensionless coefficient given by $\phi_w = CU^B(\frac{\beta}{\beta_{op}})^{-E}$, where β_{op} is the fuel packing for optimal combustion, U is the mean wind velocity at midflame height, and C , B and E are parameters depending on the fuel bed.

In the conceptual modeling of the physical phenomenon we consider the interaction of various variables such as heat η , fuel γ and the fire state ϕ , in addition to parametric functions as environmental conditions a and combustion rate b .

2.2 Mathematical modelling

Essentially, there are three modelling variants to describe the movement of a front positioned at points (x, y) propagating at velocities (v, w) , namely a Lagrangian, an Eulerian, and a hybrid modelling approach. These modeling approaches correspond, respectively, to the situations where the positions (x, y) are dependent or independent variables, or are split, one dependent and the other independent.

The Lagrangian formulation

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad (3)$$

describes the movement of each point (x, y) , being dependent variables, on the front to have the velocities (v, w) , where the set of points on the front can be parametrized by arc length.

In the hybrid formulation in terms of the convection-reaction equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} = w, \quad (4)$$

the position $y = y(t, x)$ of the front is a dependent variable, expressed as a function of the independent variable x . In the equation, the propagation speed v in x direction appears as the convection velocity of the y -profile, whereas the speed w in y direction turns out to be the reaction term of the equation. Such a hybrid modelling approach has been adopted e.g. by Sharples et al. (2013) to the modeling of fire front propagation.

In Eulerian coordinates, front propagation can be expressed in terms of the Hamilton-Jacobi equation (1). In this modeling approach the positions (x, y) are independent variables. The front position is described implicitly by $\phi = 0$. Convection velocities (v, w) in (x, y) direction are defined for any location, and in particular for the points on the front. In the modelling of fire front propagation the variable ϕ describes the fire status, positive for burning area, negative for unburnt area, such that $\phi = 0$ describes the fire front.

The fire front modelling can be adapted for each of these three approaches. The focus of this contribution is on the Eulerian approach. Within the Eulerian modelling framework the convection velocities are incorporated as follows. The normal vector for points on the front is defined as

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|_2}, \quad \nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)^T. \quad (5)$$

If the normal vector (5) indicates the direction of the front propagation and some parameter a the speed, then the velocity vector $U = (v, w)^T$ becomes

$$U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = a\mathbf{n}, \quad v = \frac{a}{\|\nabla\phi\|_2}\phi_x, \quad w = \frac{a}{\|\nabla\phi\|_2}\phi_y. \quad (6)$$

Here, the speed $a = a(x, y, t)$ is not necessarily a constant but might depend the context, reflecting spatial and temporal influences. Substituting (6) in the convective terms of the Eulerian model (1), by the definition of the Euclidean norm one gets

$$v\phi_x + w\phi_y = \frac{a}{\|\nabla\phi\|_2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) = \frac{a}{\|\nabla\phi\|_2}(\|\nabla\phi\|_2)^2 = a\|\nabla\phi\|_2, \quad (7)$$

which in turn gives the governing equation

$$\phi_t + a\|\nabla\phi\|_2 = 0. \quad (8)$$

This is an equation that describes the evolution of implicitly defined curves. It can be resolved numerically with methods proposed by Osher and Sethian (1988).

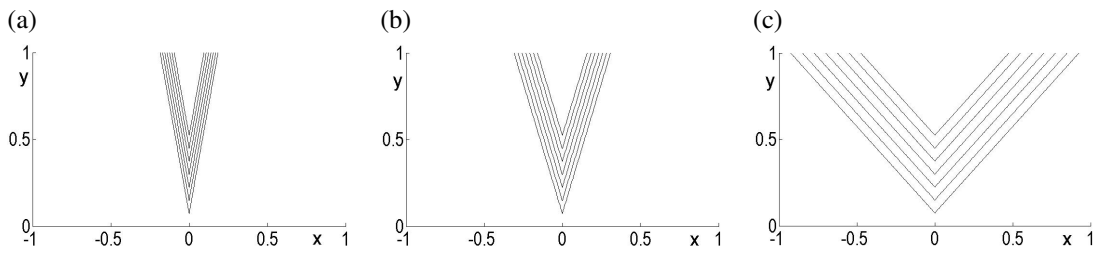


Figure 2. Propagation of level set zero of ϕ with initial data $\phi = y - r|x|$, (a) $r = 5$, (b) $r = 3$, (c) $r = 1$.

We consider as sample situation the interaction of two fire fronts at a given angle, see Sharples et al. (2013). In terms of ϕ , the initial condition is expressed as

$$\phi = y - r|x|. \quad (9)$$

Figure 2 shows the front evolution according to equation (8) with $a = 1$. In the initial condition (9) the parameter values $r \in \{1, 3, 5\}$ correspond to different front inclinations. The propagation occurs without considering curvature effects as mentioned in Sharples et al. (2013).

2.3 Augmented model

The augmented model is obtained by incorporating some relevant aspects of the physical phenomenon, which are identified by the conceptual model, into the chosen mathematical modelling framework. In the present application context we have identified the available fuel and the produced heat to be eligible concepts that are suited to be formalized by choosing them as variables of an augmented model. Thus, the governing equation (8) is coupled with equations for the fuel γ and the heat η .

The combustion process is described by the differential equation

$$\frac{d\gamma}{dt} = -b\gamma, \quad \gamma(t = 0, x, y) = 1, \quad \text{for } (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

which is defined for all locations in the two-dimensional spatial domain Ω . A similar approach of ignition modeling, where the fuel is a variable of a coupled modelling approach, is done in Mandel et al. (2011). However, there, the fuel evolution is not explicitly described by a differential equation; rather, the fuel amount is given by a formula that looks like a solution of a linear differential equation.

The initial condition $\gamma(0, x, y) = 1$ corresponds to a full fuel load. The fuel load is largest up to ignition, and it decreases as the fuel is burning. According to the model formulated in equation (10), the right-hand side is proportional to the remaining fuel. The combustion rate $b = b(x, y, t)$ might depend on external effects such as rain, moisture or fuel type. In this contribution, it is assumed that these external effects are homogenous having a constant combustion rate $b_0 > 0$ at all locations with ongoing burning,

$$b(x, y) = \begin{cases} b_0 & \text{if } \phi(x, y) < 0, \\ 0 & \text{if } \phi(x, y) > 0, \end{cases} \quad \text{for } (x, y) \in \Omega. \quad (11)$$

During the combustion processes, energy is released as heat or light. The heat evolution is modeled as

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + bc\gamma - d(\eta - \eta^0). \quad (12)$$

This equations counts with a term for heat production by combustion, which is proportional to the burning rate according to equation (10). If the fuel amount γ is closer to 1, then there is larger fuel diminution by combustion (10), and at the same time there is a larger heat production in (12) through the term $bc\gamma$. A maximal temperature is given implicitly by the limited heat potential of the fuel, $\int_0^\infty \gamma(t) dt < \infty$. It is obtained when heat production and heat diffusion are balanced.

3 COMPUTATIONAL SIMULATION

For the numerical solution of the Hamilton-Jacobi equation (1), as numerical flux, the local Lax-Friedrichs flux was used together with an ENO reconstruction of order 3. The time discretization was done with an explicit Euler method. To ensure stability of the explicit scheme the so-called CFL condition is satisfied. During the simulation with the level set method, a usual technique to maintain the accuracy of the approximate solution is to perform regularly a re-initialization step. However, in the simulations of this contribution, this turned out to be not necessary. For the discretization of the diffusion, the use of the Crank-Nicolson method is a standard approach. However, the test cases considered in this contribution do not involve the diffusion term. A detailed study of the effect of the modelled heat diffusion is going to be provided in an extended version.

In the augmented model, the equation (8) is coupled with the fuel equation (10) and the heat evolution according to equation (12). For the simulations of the augmented model, the parameters are set to hypothetical values, which give qualitatively and quantitatively reasonable simulation results. The front propagation speed in (8) is set to $a = 1$. For the initial condition (9) we set $r = 1$. In order to focus on the reaction dynamics we assume the situation without heat conduction, i.e. $k = 0$. The temperature of the environment is set to $\eta^0 = 20$, which also is used for the initial condition, $\eta(t = 0, x, y) = \eta^0$ for the non-burning area, where $\phi(t = 0, x, y) > 0$. For the burning area we set $\eta(t = 0, x, y) = \eta^{\text{ign}}$ if $\phi(t, x, y) < 0$, where η^{ign} is the ignition temperature of the fuel, here we take $\eta^{\text{ign}} = 500$.

The heat absorption by the atmosphere is scaled by $d = 50$. From the conceptual model it is deferred that the temperature increase depends on the heat radiated by combustion. Therefore, we set the corresponding heat release factor as $c = 4500$. The fuel decay rate due to combustion is set to $b_0 = 10$.

In Figure 3, the fuel and heat distribution at intermediate time $t = 0.5$ are shown for varying x and y . The fuel load γ appears to obey a Laplace-type distribution, which comes from the analytical solution of equation (10). The fact that the distribution is expressed in terms of x instead of t can be explained by the constant convection speed in equation (8), which impacts the combustion via (11).

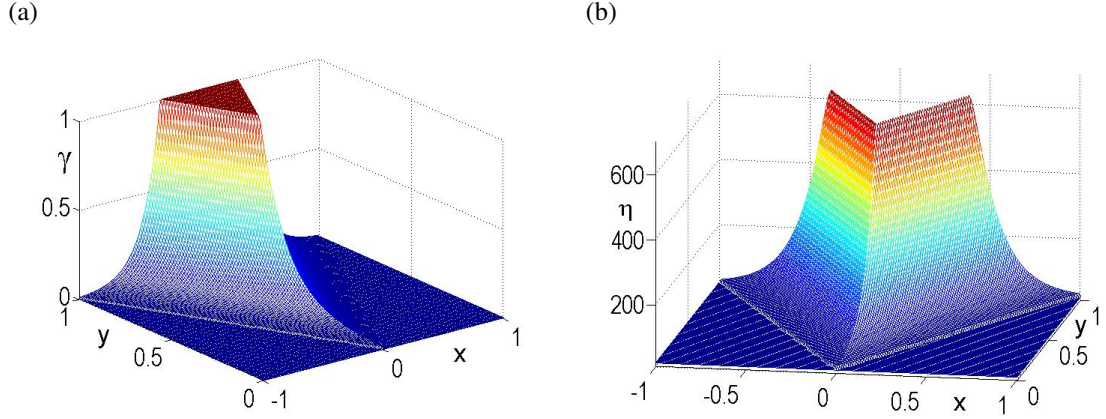


Figure 3. Magnitude of variables in domain Ω at intermediate time $t = 0.5$, (a) fuel load γ , (b) heat η .

Figure 4 shows selected one-dimensional profiles of the simulation data. The fuel load γ and heat η at various intermediate times are shown for fixed $x = 0.25$ and varying $y \in [0, 1]$. It can be observed that the heat maximum is centered near the fire front.

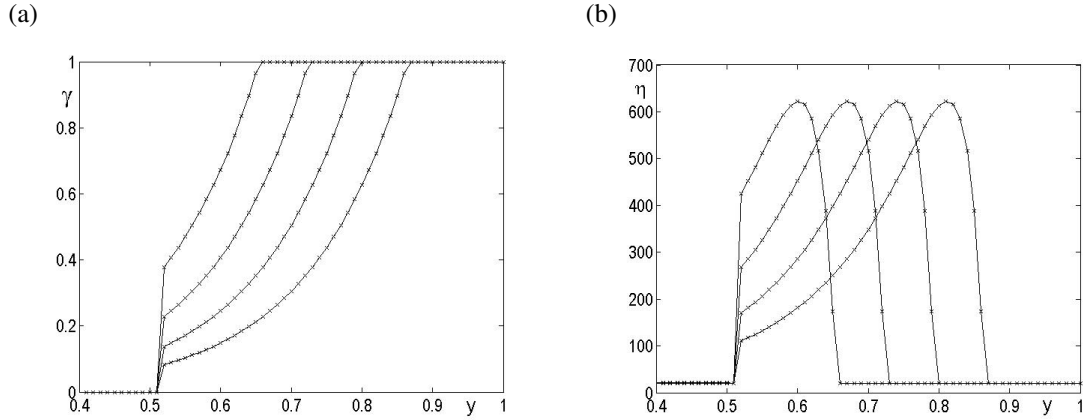


Figure 4. Solution profiles for $x = 0.25$ at times $t \in \{0.1, 0.15, 0.2, 0.25\}$, (a) fuel load γ , (b) heat η .

4 DISCUSSION

In this contribution, the propagation of bushfire is modeled by a Hamilton-Jacobi equation coupled with two additional equations that describe the fuel and heat evolution, where parametric functions describing environmental conditions and the combustion rate. The model dynamics is illustrated by numerical simulations. A pending task is, besides running further test cases and parameter studies, the comparison with experimental data and the outcomes of other simulations tools.

The coupling of equations (8), (10) and (12), as stated here, is one-way: the front evolution and thus the fire location affects the fuel change and thus the heat release, but the heat release does not affect reversely the front evolution. However, in real-world scenarios it is expected that the heat also should affect the spread rate. In a further model development, one desired feature is that the propagation velocity a depends on η , in the sense that a higher temperature leads to a faster propagation. This can be achieved by starting with a linear approach, setting $a = a(\eta) = a_0 + a_1\eta$ with $a_0, a_1 > 0$.

The heat is evolved according to a diffusion term with diffusivity k . Besides a temperature evolution in the (x, y) directions of the landscape, a model that considers heat evolution is expected to account for a

temperature radiation into the atmosphere in z -direction, eventually counting with a three-dimensional heat diffusion operator $\Delta\eta = \eta_{xx} + \eta_{yy} + \eta_{zz}$. However, since a coupling with an atmosphere model is not intended within this contribution, the heat diffusion in z direction is modelled by a heat absorption term. For extensive bushfire-atmosphere coupling see Mandel et al. (2011).

A boundary condition corresponding to the z -direction has to be set anyway, independently whether it consists of one single or several layers. We opt to describe the atmosphere as one single layer, such that the atmospheric cooling is modelled by the $d(\eta - \eta^0)$ lumped term on the right hand side of equation (12). This corresponds to a temperature diminution by absorption through the environment, where the reference temperature of the environment is η^0 . A compromise for the inclusion of effects in z direction would be to model the atmosphere by a limited amount (e.g. around 3) layers.

ACKNOWLEDGEMENT

This article is a product of the ‘Observatorio Regional UC Temuco’ in the context of the ‘Convenio de Desempeño para la Educacin Superior Regional UCT1302’.

REFERENCES

- Alexander, M. E. and M. G. Cruz (2013). Are the applications of wildland fire behaviour models getting ahead of their evaluation again? *Environmental Modelling & Software* 41, 65–71.
- Cassagne, N., F. Pimont, J.-L. Dupuy, R. R. Linn, A. Mårell, C. Oliveri, and E. Rigolot (2011). Using a fire propagation model to assess the efficiency of prescribed burning in reducing the fire hazard. *Ecological Modelling* 222, 1502–1514.
- Dumond, Y. (2009). An applied step in forest fire spread modelling. In *ECMS*, pp. 32–38.
- Finney, M. A. (2004). Farsite: Fire area simulator: model development and evaluation.
- Hilton, J., C. Miller, A. Sullivan, and C. Rucinski (2015). Effects of spatial and temporal variation in environmental conditions on simulation of wildfire spread. *Environmental Modelling & Software* 67, 118–127.
- Mallet, V., D. Keyes, and F. Fendell (2009). Modeling wildland fire propagation with level set methods. *Computers & Mathematics with Applications* 57, 1089–1101.
- Mandel, J., J. Beezley, and A. Kochanski (2011). Coupled atmosphere-wildland fire modeling with WRF 3.3 and SFIRE 2011. *Geosci. Model Dev.* 4, 591–610.
- Osher, S. and R. Fedkiw (2006). *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Volume 153. Springer Science & Business Media.
- Osher, S. and J. A. Sethian (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79, 12–49.
- Pedernera, P., M. Castillo, and G. Julio (2010). Diseño y validacion de un simulador de incendios forestales en Chile.
- Rothermel, R. C. (1972). A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels.
- Sethian, J. A. (1996). A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 93, 1591–1595.
- Sharples, J., I. Towers, G. Wheeler, V.-M. Wheeler, and J. McCoy (2013). Modelling fire line merging using plane curvature flow. In J. Piantadosi, R. Anderssen, and J. Boland (Eds.), *MODSIM2013, 20th International Congress on Modelling and Simulation. Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand*, pp. 256–262.
- Sullivan, A. (2007). A review of wildland fire spread modelling, 1990-present, 1: Physical and quasi-physical models. *arXiv preprint arXiv:0706.3074*.