

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

Estudio analítico de la ecuación de Richards con término sumidero no lineal del tipo RWU

Por

Guillermo Manns Soto

Profesor Guía

Dr. Emilio Cariaga

Actividad Formativa Equivalente, para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Temuco - 25 de julio de 2021

Universidad Católica de Temuco Facultad de Ingeniería Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

Dr. Emilio Cariaga

Profesor informante:

Dr. Stefan Berres

Profesor informante:

Dr. Ramón Bécar

Director del Programa (Ministro de fe):

Dr. Jacobo Hernández

Temuco ·····

Perfil de Egreso

Magíster en Matemáticas Aplicadas. Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente:

Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi profesor guía, Dr. Emilio Cariaga, quien me brindó su apoyo desde el primer día en el proceso de investigación de esta AFE y cuyas orientaciones, revisiones y sugerencias fueron fundamentales para lograr finalizar este trabajo.

En el proceso de postulación a este programa de magíster, fue menester presentar dos cartas de recomendación. En mi caso, las personas que me otorgaron dichas recomendaciones fueron mis profesores de pregrado Almeira Sampson y Antonio Garrido, a quienes presento mi más sincera gratitud y respeto a quienes incluyo en la dedicatoria de esta investigación.

Agradezco a mi amiga Paloma quien me apoyó y me motivó en la postulación de ingreso a este posgrado, así como también a mis buenos amigos Jorge y Francisco, quienes me motivaron también a ingresar al programa de Magíster en Matemáticas Aplicadas, y con quienes compartí extensas horas de viaje y estudio y que amenizaron con su buen humor las arduas jornadas de trabajo.

Asimismo, doy las gracias a mis colegas y muy buenos amigos, Elsa, María José y Eduardo, quienes me prestaron su apoyo y orientación en innumerables ocasiones en el estudio, en el trabajo y en la resolución de dudas a lo largo del proceso de investigación de esta AFE.

Por último y no menos importante, agradezco a mis queridos tíos Katya y Lizardo, quienes me recibieron afectuosamente en su hogar durante mucho tiempo y cuyo apoyo fue indispensable desde el principio hasta el fin de este programa de magíster.

Abstract

This study focuses on the comparison of analytical methods for solving the Richards equation in the presence of a nonlinear RWU (root-water uptake) sink term. the Richards equation with the presence of a nonlinear sink term of the RWU (root-water uptake) type. This mathematical model arises from the need to model soil-water-plant systems where the sink term models root water uptake. One of the main contributions of this research is to provide a more unified look at the solution of this equation, given that to date there is little literature on the subject, and that which exists is very scattered. First, the quasilinearization method is presented and developed. The method consists mainly in the application of a series of variable changes that reduce the Richards equation with source term to a quasi-linear differential equation. Next, the Green's function method is presented. In this method, the solution of an inhomogeneous partial differential equation is obtained as a superposition of integral expressions in terms of Green's functions. Finally, some computational experiments are provided for the solutions obtained in both methods.

Resumen

Este estudio se centra en la comparación de métodos analíticos de resolución de la ecuación de Richards con presencia de un término sumidero no lineal del tipo RWU (rootwater uptake por sus siglas en inglés). Este modelo matemático surge de la necesidad de modelar sistemas suelo-agua-planta en donde el término sumidero modela el consumo de agua por parte de la raíz. Uno de los principales aportes de esta investigación es entregar una mirada más unificada a la solución de esta ecuación dado que a la fechaexiste poca literatura al respecto, y la que existe está muy dispersa. Primero se presenta y desarrolla el método de cuasilinealización. El método consiste principalmente en la aplicación de una serie de cambios de variable que reducen la ecuación de Richards con término fuente a una ecuación diferencial cuasi lineal. A continuación se presenta el método de funciones de Green. En este método, la solución de una ecuación diferencial parcial no homogénea es obtenida como una superposición de expresiones integrales en términos de funciones de Green. Finalmente, se aportan algunos experimentos computacionales para las soluciones obtenidas en ambos métodos.

Índice

1	Introducción	
2	Objetivos	3
3	Modelo conceptual3.1Propiedades físicas del suelo3.2Zona saturada, zona insatuturada y capa freática3.3Ley de Darcy3.4Conductividad hidráulica3.5Difusividad hidráulica3.6Formulación de Darcy-Buckingham3.7Modelo de suelo de Gardner3.8Formulación de la ecuación de Richards con término sumidero no lineal3.9Familias paramétricas de funciones	4 5 6 7 8 8 8 9 11
4	Solución analítica mediante método de cuasilinealización 1 4.1 Ecuación gobernante del problema 1 4.2 Reducción a una ecuación de Kirchhoff-Helmholtz 1 4.3 Algoritmo para el método de cuasilinealización 1 4.4 Caso particular 1: flujo unidimensional 1 4.5 Caso particular 2: irrigación periódica 1	15 16 22 23 28
5	Solución analítica mediante el método de las funciones de Green:5.1Descripción del método:5.2Reducción a una ecuación de difusión no homogénea:5.3Método de las funciones de Green:5.4Algoritmo para el método de funciones de Green:5.5Caso particular 3: flujo bidimensional:	37 38 41 45 46
6	Experimentos computacionales 5 6.1 Solución mediante el método de cuasilinealización	51 51 57
7	Discusión y conclusiones	62
8	Bibliografía	63
9	Anexos 9.1 Solución analítica mediante el método DRBEM	66 66 72 80

Notación

Notación Nombre		Definición breve	
θ	Humedad volumétrica	$ heta = V_w/V$	
V	Densidad de flujo volumétrico	$\mathbf{V} = -K \nabla H$	
Н	Carga hidráulica $H = \Psi - z$		
S	Función RWU	Función que modela el consumo de	
		agua por parte de la raíz	
		(véase sección 3.10)	
D	Difusividad	Presente en la ley de Fick	
Κ	Conductividad hidráulica	Presente en la ley de Darcy	
u	Potencial de flujo matricial	$u = \frac{K}{K_s} = exp(\alpha \Psi)$	
Ψ	Carga de presión	Atracción del agua por los	
		sólidos del suelo (matriz).	
r	Vector posición	$\mathbf{r} = [x,y,z]$	
Θ	Humedad volumétrica adimensional	$\Theta = rac{ heta}{ heta_s}$	

Cuadro 1: notación

1 Introducción

La creciente demanda de cosechas eficientes y métodos de irrigación productivos es un tema de interés actual para científicos de diversas disciplinas. En la actualidad la población mundial se estima en más de siete mil millones de habitantes, lo que se traduce en la necesidad de buscar métodos para mejorar la explotación de recursos naturales y sobre todo en la búsqueda de un uso más eficiente de los recursos hídricos. Dentro de este contexto resulta evidente la importancia del estudio de la irrigación de suelos agrícolas y en particular de los factores que influyen en un sistema suelo-raíz.

En el campo de las ecuaciones diferenciales, uno de los modelos más utilizados para el estudio de flujo de agua en medio insaturados es la ecuación de Richards [29], que se clasifica como una ecuación de convección-difusión de tipo parabólica no lineal. Si bien esta ecuación se ha estudiado con diversos enfoques desde que el mismo Richards la publicara en 1931, existen aún variantes de la ecuación que siguen siendo de gran interés en la actualidad.

Esta investigación se centra en los métodos de resolución analíticos de la ecuación de Richards en presencia de un término sumidero no lineal del tipo RWU (root-water uptake por sus siglas en inglés). A la complejidad de resolver una ecuación que ya de por sí posee varios componentes no lineales como lo son la difusividad $D(\theta)$ y la conductividad $K(\theta)$, se le suma la inclusión del término sumidero $S(\theta)$ que implica la consideración de formas realistas de tasas de absorción de agua en la raíz, lo que agrega complicaciones para derivar soluciones exactas.

Esta investigación se propone como objetivo explicar la resolución de la ecuación de Richards con término sumidero no lineal mediante el uso de al menos dos métodos diferentes, que en este caso corresponden a el método de cuasi-linealización y el método de funciones de Green. Asimismo se realiza un aporte en cuanto a la unificación de las notaciones utilizadas por cada uno de los autores originales con el fin de hacer más accesibles las cdomparaciones entre los mismos métodos. En última instancia se estudia mediante experimentos computacionales el comportamiento de las soluciones analíticas obtenidas para determinados casos particulares ante la selección de diferentes parámetros.

En los capítulos tres y cuatro se exponen los métodos de cuasi-linealización y de funciones de Green respectivamente. La resolución de esta ecuación mediante el método de funciones de Green fue publicada a principios del 2000, por Basha[1], en donde el autor logró obtener una solución analítica expresada en forma integro-diferencial. Por otra parte, una resolución mediante el método de cuasi-linealización fue publicada de forma reciente en el año 2017 por Broadbridge[5], en donde se obtuvieron resultados analíticos estableciendo ciertas leyes constitutivas entre los términos no lineales $D(\theta)$, $K(\theta)$ y $S(\theta)$.

A continuación, en el sexto capítulo, se presentan algunos experimentos computacionales en los que se ha resuelto la ecuación de Richards con término fuente no lineal para casos particulares, aplicando los métodos de cuasilinealización y de funciones de Green, acompañados de los respectivos resultados, gráficos y conclusiones.

2 Objetivos

Objetivo general

Resolver analíticamente la ecuación de Richards con término sumidero no lineal del tipo RWU

Objetivos específicos

- 1. Resolver analíticamente la ecuación de Richards con término sumidero no lineal del tipo RWU utilizando la transformación de Kirchhoff.
- 2. Comparar al menos dos soluciones analíticas de la ecuación de Richards con término sumidero no lineal del tipo RWU.
- 3. Evaluar la capacidad de las soluciones analíticas obtenidas de representar el fenómeno de estrés hídrico.

3 Modelo conceptual

3.1 Propiedades físicas del suelo

Medio poroso

Al hablar de "medio poroso", nos referimos a un sólido, o una colección de partículas sólidas, con suficiente espacio abierto dentro o alrededor de las partículas para permitir que un fluido pase a través de ellas o alrededor de ella [8], por lo tanto, podemos inferir que la porosidad nos entrega una medida promedio del tamaño volumétrico de las concavidades microscópicas en un determinado tipo de suelo.

Volumen de suelo

Un volumen de suelo V, contiene un volumen de sólidos V_s , un volumen de agua V_w y un volumen de aire V_a . Esto es:

$$V = V_s + V_w + V_a \tag{1}$$

Las fases líquida y gaseosa juntas forman el espacio de poros del suelo, que es ocupado por el volumen de vacíos V_v :

$$V_v = V_w + V_a \tag{2}$$



Figura 1: Esquema de volumen de suelo.

Porosidad

La porosidad ϵ , se define como el cociente entre el volumen de vacíos y el volumen del suelo:

$$\epsilon = \frac{V_v}{V} \tag{3}$$

Contenido de humedad

El contenido de humedad, o la relación agua-suelo para un volumen base, es definida como:

$$\theta = \frac{V_w}{V} \tag{4}$$

Carga hidráulica

Una carga o cabezal, en mecánica de fluidos, es un concepto que relaciona la energía de un fluido incompresible con la altura de una columna estática equivalente de ese fluido.

En este caso, la carga hidráulica (H) es una medida específica de la presión del líquido por encima de un nivel de referencia elegido, que es la suma del cabezal de presión (Ψ) y el cabezal de elevación (Ψ_z) :

$$H = \Psi + \Psi_z \tag{5}$$

Siguiendo las definiciones de Delleur [10], el primer término de la derecha en (5), que corresponde al cociente entre presión (P) y el peso específico del agua (ρg), se define como la carga de presión o cabezal de presión, es decir:

$$\Psi = \frac{P}{\rho g} \tag{6}$$

donde ρ es la densidad del fluido y g es la aceleración de la gravedad.

Por otra parte, el cabezal de elevación se define como el aporte a la carga hidráulica debido al peso del fluido, es decir, depende directamente de la altura del líquido (en este caso, la variable z), de modo que:

$$\Psi_z = -z \tag{7}$$

Entonces, sustituyendo (7) y (6) en (5), se obtiene:

$$H = \Psi - z \tag{8}$$

donde cada uno de los términos de la expresión (8) se mide en unidades de longitud.

3.2 Zona saturada, zona insatuturada y capa freática

Al analizar un medio poroso anegado por agua, distinguiremos tres elementos principales: zona saturada, zona insaturada y capa freática, que se describen a continuación:

- Capa freática: es el límite entre la zona saturada y la zona insaturada.
- Zona saturada: en el suelo bajo la capa freática, todos los poros están generalmente llenos con agua y esta región es llamada zona saturada [30].
- Zona insaturada: se conoce como zona no saturada a aquella en la que los poros del medio se encuentran parcialmente llenos de agua o gas.



Figura 2: Esquema de un medio poroso 2D (Ritzema, 1994).

3.3 Ley de Darcy

Ley de Darcy en medios saturados

En 1856, Darcy [9] formuló la ecuación que describe el flujo del agua a través del subsuelo. Para ello, Darcy llevó a cabo un experimento como el que se muestra en la figura 3, en el que logró establecer una relación entre la distribución de presión y la pérdida del cabezal Δh (es decir, la distancia entre las dos superficies del líquido), haciendo pasar el líquido a través de una columna de arena de longitud L



Figura 3: Experimento de Darcy (Ritzema, 1994).

La ley de Darcy se aplica de forma recurrente en el estudio del flujo de agua en suelos insaturados, dado que nos entrega una relación entre el flujo volumétrico, la conductividad y las diferencias de presión en el el terreno.

La velocidad de flujo de agua subterránea (V), varía directamente con el gradiente hidráulico (dh/dz) y, a velocidad de flujo constante, se relaciona inversamente con la conductividad hidráulica (K) [30]. Según las definiciones previas se satisface la siguiente igualdad:

$$V = -K\frac{dh}{dz} \tag{9}$$

donde:

- V: es la velocidad de flujo de agua subterránea.
- K: es un coeficiente de proporcionalidad llamado conductividad hidráulica.
- $\frac{dh}{dz}$: tasa de cambio de la presión en la dirección z.

Ley de Darcy en medios insaturados

En medios insaturados, la ley de Darcy adquiere mayor complejidad, puesto que ahora la conductividad hidráulica K se comporta como una función que depende del contenido de humedad θ .

Siguiendo a Feddes [12], para un flujo vertical unidimensional, con el origen del eje z en la superficie del suelo y positivo en dirección descendente, la ley de Darcy para medios insaturados está dada por:

$$V_z = -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z}$$

donde V_z corresponde al flujo volumétrico en la dirección z.

Con el fin de expresar esta ley de una forma más general, podemos considerar ahora las tres direcciones espaciales, donde $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$. En este caso la ley de Darcy estará dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{V} = -K(\theta)\boldsymbol{\nabla}H\tag{10}$$

donde H es la carga hidráulica total, \mathbf{V} es la densidad de flujo volumétrico, $K(\theta)$ conductividad hidráulica del suelo.

Sustituyendo (8) en la expresión (10), se tiene:

$$\mathbf{V} = -K(\theta)\boldsymbol{\nabla}(\Psi - z) \tag{11}$$

Resulta entonces la expresión (11) quer permitirá expresar el flujo volumétrico \mathbf{V} en términos de la presión Ψ y la altura z.

3.4 Conductividad hidráulica

La conductividad hidráulica, K, es la constante de proporcionalidad en la ley de Darcy y se define como el volumen de agua que se moverá a través de un medio poroso en una unidad de tiempo bajo una unidad de gradiente hidráulico a través de una unidad de área de medida en ángulo recto a la dirección del flujo. La conductividad hidráulica puede tener cualquier unidad de longitud / tiempo (por ejemplo, [m/d]). Su orden de magnitud depende de la textura del suelo y se ve afectado por la densidad y la viscosidad del agua subterránea [30].

3.5 Difusividad hidráulica

El transporte molecular desde una sustancia A hacia una B, se conoce como difusión molecular (o simplemente difusión) y se denota por D_{AB} .

Ley de Fick

Otra forma de entender la difusión es mediante la ley de Fick de la difusión. Esta ley describe el movimiento de una especie química A a través de una mezcla binaria entre A y otra especie B debido a la existencia de un gradiente de concentración. Se representa por:

$$\mathbf{J} = -D\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{12}$$

donde **J** es el flujo difusivo, ϕ es la concentración de materia y D es la difusividad.

3.6 Formulación de Darcy-Buckingham

A principios del siglo XX, el físico Edgar Buckingham encontró una generalización para la ley de Darcy [6], dada por:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\Psi(\theta)}{d\theta}$$
(13)

Esta relación entre la difusividad agua-suelo $D(\theta)$, conductividad $K(\theta)$ y el potencial de sorción Ψ , resulta muy importante para la resolución analítica ecuación de Richards, pues es aplicable incluso cuando estos coeficientes son no lineales.

3.7 Modelo de suelo de Gardner

En 1958, Gardner [13] propuso un método de resolución para la ecuación de Richards sin presencia de un término fuente no lineal.:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot [D\boldsymbol{\nabla}\theta] + \frac{\partial K}{\partial z} \tag{14}$$

donde la función incógnita es $\theta = \theta(x, y, z, t)$, mientras que $D = D(\theta)$ y $K = K(\theta)$ son funciones conocidas, pero que dependen de la incógnita, esta dependencia origina una fuerte no linealidad.

En la literatura existen diversas propuestas para las expresiones funciones $D \ge K$, la mayoría de las cuales tienen su origen en extensos experimentos de campo. Una de las primeras propuestas es la de Gardner(1958) quien propuso la relación funcional dada por:

$$K = K_s e^{\alpha \Psi} \tag{15}$$

donde α es una constante, K_s corresponde a la conductividad en la zona saturada y $\Psi = Psi(\theta)$ es la función para el cabezal de presión.

En el modelo de suelos de Gardner, la relación funcional entre Ψ y θ estará condicionada por la relación que se asuma entre θ y K. Por ejemplo, tal como se verá en la sección 6, si se propone una dependencia lineal tal como:

$$\theta = cK + d$$

donde c,d son constantes, entonces la función del cabezal de presión estaría dada por:

$$\Psi = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\theta - d}{cK_s} \right)$$

En ocasiones, la formulación de Gardner puede ser también expresada en términos de la difusividad $D(\theta)$, con el fin de obtener dicha relación, de deriva la expresión (15) con respecto a θ , esto es:

$$K(\theta) = K_s e^{\alpha \Psi(\theta)}$$

$$K'(\theta) = \alpha K_s e^{\alpha \Psi(\theta)} \Psi'(\theta)$$

Recurriendo a la formulación de Darcy-Buckingham (13), se obtiene entonces:

$$K'(\theta) = \alpha D(\theta) \tag{16}$$

esta relación se cumple incluso cuando $K(\theta) \ge D(\theta)$ son no lineales.

En la actualidad esta relación de conoce como el modelo de suelos de Gardner, y se trata de un modelo ampliamente aceptado en el estudio de las ecuaciones de advección-difusión.

3.8 Formulación de la ecuación de Richards con término sumidero no lineal

En el sistema suelo-raíz, el agua se desplaza de forma natural debido a gradientes de potencial hídrico, cuando entra en contacto con la raíz, la planta puede absorber ciertas cantidades de esta a través de vellos radiculares, mediante los cuales el agua puede ingresar al interior de la raíz para posteriormente desplazarse a través del tallo. Más tarde la planta perderá esta humedad a través del proceso de transpiración.



Figura 4: Esquema de sistema suelo raíz.

En mecánica de fluidos, es frecuente estudiar el flujo de un determinado fluido mediante sus ecuaciones de continuidad y movimiento.

• Ecuación de continuidad [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) \tag{17}$$

• Ecuación de movimiento [4]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} p - [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho g \tag{18}$$

Para (17) y (18), ρ corresponde a la densidad del fluido, **v** es la velocidad a la que se desplaza el fluido, p representa cantidad de movimiento, τ es el tensor de esfuerzo y ρg es el peso específico del fluido.

Según el enfoque de Richards [29], para el flujo de un fluido a través de un medio poroso, las ecuaciones de continuidad y movimiento pueden sustituirse por la ecuación de continuidad para flujo capilar y por la ley de Darcy (10) respectivamente.

• Ecuación de continuidad para flujo capilar:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} \tag{19}$$

• Ley de Darcy:

$$\mathbf{V} = -K(\theta)\boldsymbol{\nabla}H$$

Aplicando la ley de Darcy en la ecuación (19), se obtiene la ecuación de Richards:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \left[-K(\theta)\boldsymbol{\nabla}H\right] \tag{20}$$

Si se considera ahora la ecuación (19) en el contexto de una planta cuyas raíces se han desarrollado dentro de un medio poroso, resulta evidente que existirá consumo de agua por parte de la raíz de la planta, por lo que será necesario añadir un nuevo término, que notaremos por S, para representar dicho consumo.

Además, se considerará que S depende de la cantidad de humedad θ , que a su vez depende de la posición \vec{r} y el tiempo t. Se obtiene entonces el "modelo estándar continuo para flujo no saturado en la presencia de una red de raíces de plantas", que está dado por:

$$\frac{\partial \theta(\vec{r},t)}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} - S(\theta, \vec{r}, t)$$
(21)

donde $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ y $t \ge 0$. El término no lineal $S(\theta, \vec{r}, t)$ se denomina razón de consumo de agua de la raíz (que en adelante será denotado por RWU o root-water uptake por sus siglas en inglés).

3.9 Familias paramétricas de funciones

Modelo de Van Genuchten

El modelo de Van Genuchten [33] es de gran aceptación debido a su buena capacidad predictiva para el comportamiento de la conductividad hidráulica en suelos insaturados. El modelo está definido por:

$$k_r = \Theta^{1/2} \left[1 - \left(1 - \Theta^{1/m} \right)^m \right]^2$$
(22)

donde k_r es la conductividad hidráulica relativa, Θ es el contenido de agua volumétrico adimensional.

En este modelo, se utiliza un determinado tipo de ecuación general para el contenido de humedad, dado por:

$$\Theta = \left[\frac{1}{1 + (\alpha h)^{1/(1-m)}}\right]^m \tag{23}$$

aquí, α y m son parámetros experimentales.

Modelo de Brooks y Corey

Otro modelo construido a partir de observaciones experimentales y que describe el comportamiento de propiedades hidráulicas como la saturación y la presión capilar es el modelo de Brooks y Corey.

En la investigación de Brooks y Corey, se destacan principalmente dos familias de funciones paramétricas, una de ellas describe la saturación efectiva (S_e) en un medio poroso

mientras que la segunda describe la permeabilidad relativa en la fase húmeda (K_{rw}) .

El modelo para la saturación efectiva en el medio poroso está dado por:

$$S_e = \left(\frac{P_b}{P_c}\right)^{\lambda} \qquad , \qquad P_c \ge P_b \tag{24}$$

donde P_c en la diferencia de presión entre el gas y el líquido en los poros, P_b es una medida del tamaño máximo del poro y λ es una constante que caracteriza la distribución del tamaño de los poros.

Por otro lado, el modelo para permeabilidad relativa en la fase húmeda está dado por:

$$K_{rw} = \left(\frac{P_b}{P_c}\right)^{2+3\lambda} \tag{25}$$

Modelos para la función RWU

En los diferentes estudios relativos a la ecuación de Richards se ha utilizado una gran variedad de modelos para la función de extracción agua-raíz. Los modelos para extracción de agua en la zona de la raíz de la planta se pueden clasificar en dos tipos, aquellos que siguen un enfoque macroscópico y los que siguen un enfoque de carácter microscópico.

Los modelos microscópicos, requieren de información muy detallada, tal como la geometría de la raíz, la heterogeneidad del suelo y la relación estre estas variables. Por otra parte, el enfoque macroscópico, donde en el que todo el sistema de raíces se trata como una sola unidad para resumir los efectos de todas las raíces individuales [20].

En esta investigación se presentarán principalmente modelos de tipo macroscópico debido a que en este enfoque se incluye en la ecuación gobernante un término de sumidero, que representa la extracción de agua por las raíces de las plantas, que considera variables de tipo espacial y temporal dependientes de la humedad del suelo y la demanda de las plantas. Algunos de estos modelos se presentan a continuación:

n^o	Modelo	Ecuación
1	Molz (1981) [23]	$S = \frac{T(t)\theta(z,t)L(z,t)[\Psi(z,t) - \phi_x(t)]}{\int_0^{v(t)} \theta(z,t)L(z,t)[\Psi(z,t) - \phi_x(t)]dz}$
2	Perrochet (1987) [26]	$S(\Psi,z) = \alpha(\Psi)g(z)T_p$
3	Prasad (1988) [28]	$S(h) = \alpha(h)S_{max}$, $S_{max} = \frac{2T_j}{z_{rj}}\left(1 - \frac{z}{z_{rj}}\right)$
4	Jarvis (1989) [18]	$S_i = \left(\frac{\Delta E_a}{Z_i}\right) \left\{\frac{R_i \alpha_i}{\overline{\alpha}}\right\}$
5	Govindraju y Kavvas (1993) [15]	$S_{max} = rac{E_{pot}}{z_r}$, $S(\Psi) = \alpha(\Psi)S_{max}$
6	Janz y Stonier (1995) $[17]$	$S = \frac{-1, 6T}{(v-e)^2} + \frac{(1, 8v - 0, 2e)T}{(v-e)^2}$
7	Jinquan (1999) [19]	$S = \alpha(h) \frac{T_P L_{nrd}(z_r)}{L_r}$
8	Li (1999) [22]	$S = \alpha(h) \frac{K_{Z_1 - Z_2} P T_j}{ z_1 - z_2 }$
9	Lai y Katul (2000) [21]	$S(\theta, z, t) = \alpha(\theta)g(z)E_p(t)$

Cuadro 2: modelos macroscópicos para la función RWU [20]

En la literatura, algunos investigadores han creado una tercera categoría de modelos, un enfoque híbrido para tener en cuenta la densidad de las raíces, la permeabilidad de las raíces y la extracción del agua de las raíces en la relación de extracción [20].

n^o	Modelo		Ecuación	
10	Ojha y Rai (1996) [25]	$S_{max} = \alpha \left[1 - \left(\frac{z}{z_{rj}} \right) \right]^{\beta}$, $0 \le z \le z_{rj}$, $S(h) = f(h)S_{max}$
11	Li (1999) [22]	$S_i =$	$\frac{\alpha_i^2 F_i^{\lambda} P_t}{\Delta Z_i \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i^{\lambda}}$	

Cuadro 3: modelos para la función RWU con enfoque híbrido. [20]

Algunos investigadores, como es el caso de Vrugt [34], han propuesto modelos multidimensionales para la función de extracción, tal como se resume en el siguiente cuadro, este tipo de enfoque permiten abordar el comportamiento de la función RWU desde una a tres variables espaciales:

n^o	Modelo	Ecuación
12	Vrugt (2001) [34]	$S_m(z) = \frac{\beta(z)T_{pot}}{\int_{z=0}^{z=z_m}\beta(z)dz}$
	1D	$\beta(z) = \left[1 - \frac{z}{Z_m}\right] e^{-(p_z/z_m) z^* - z }, \ z \ge 0$
	2D	$\beta(r,z) = \left[1 - \frac{z}{Z_m}\right] \left[1 - \frac{r}{R_m}\right] e^{-(p_z/z_m) z^* - z }$
	3D	$\beta(x,y,z) = \left[1 - \frac{x}{X_m}\right] \left[1 - \frac{y}{Y_m}\right] \left[1 - \frac{z}{Z_m}\right] e^{-(p_z/z_m) z^* - z }$

Cuadro 4: modelos multidimensionales de Vrugt para la función RWU [20]

Al momento de resolver la ecuación de Richards con término sumidero, a través de métodos analíticos, resulta más útil recurrir a modelos de la función RWU surgidos a partir de enfoques macroscópicos tales como los presentados anteriormente debido a que estos, generalmente suelen presentarse con la fomra de funciones que dependen directamente del contenido de humedad θ , o de la profundidad z.

El modelo número 12 propuesto por Vrugt [34] resulta ser especialmente útil y es uno de los más completos al poder aplicarse en sus diferentes variantes uni-, bi- y tridimensional, además de considerar el potencial de transpiración de la planta T_{pot} . Se caracteriza principalmente por relacionar exponencialmente el consumo de agua por parte de la raíz con la profundidad. En el método de funciones de Green se recurre a una versión simplificada del modelo de Vrugt tal como se puede ver en (104). En el anexo 9, se ha incluido un método de resolución de la ecuación de Richards con término sumidero, propuesto por Solekhudin [32], en donde se utiliza específicamente este modelo de función RWU.

4 Solución analítica mediante método de cuasilinealización

4.1 Ecuación gobernante del problema

El método que se explica acontinuación fue propuesto por los investigadores Philip Broadbridge, Edoardo Daly y Joanna Goard el año 2017 [5]. Este estudio proporciona por primera vez soluciones analíticas de la ecuación de Richards con un término sumidero no lineal que depende del contenido de agua del suelo [5]. El método consiste principalmente en la aplicación de una serie de cambios de variable que reducen la ecuación de Richards con término fuente a una ecuación diferencial cuasi lineal.

En adelante, abreviaremos la notación haciendo $\theta(\vec{r},t) = \theta$ y $S(\theta,\vec{r},t) = S$. Dicho esto, es claro que la ecuación (21) también se puede escribir como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + S = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} \tag{26}$$

Aplicando la ley de Darcy en la ecuación (26) podremos obtener una forma de representar la ecuación gobernante en términos del potencial de humedad Ψ y de la conductividad K. El procedimiento es el siguiente:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S = -\nabla \cdot \left[-K(\theta)(\nabla \Psi - \nabla z) \right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S = \nabla \cdot \left[K(\theta) \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z} - 1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S = \nabla \cdot \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial x}, K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial y}, K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial z} - K(\theta) \right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S = \nabla \cdot \left(K(\theta) \nabla \Psi \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$
(27)

En este punto, se recurre a la regla de la cadena y la formulación de Darcy - Buckingham (13) para expresar la ecuación (27) en términos del coeficiente de difusividad $D(\theta)$ y del contenido de humedad θ . El procedimiento es el que sigue:

$$\nabla \Psi = \frac{d\Psi}{d\theta} \cdot \nabla \theta$$

$$D(\theta)\nabla\Psi = D(\theta)\frac{d\Psi}{d\theta}\cdot\nabla\theta$$

$$\frac{D(\theta)}{d\Psi/d\theta}\nabla\Psi = D(\theta)\cdot\nabla\theta$$

$$K(\theta)\nabla\Psi = D(\theta)\cdot\nabla\theta$$
(28)

Utilizando el resultado (28), en la ecuación (27), se tiene:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[D(\theta) \nabla\theta \right] - \frac{\partial K}{\partial z} - S(\theta, \vec{r}, t)$$
⁽²⁹⁾

El resultado (29), corresponde a la ecuación de Richards expresada en términos de la difusividad y la conductividad, esta transformación resultará útil para aplicar la transformación de Kirchhoff a continuación.

4.2 Reducción a una ecuación de Kirchhoff-Helmholtz

En esta sección se aplican algunos cambios algebraicos que permitirán obtener una forma de la ecuación de Richards con término sumidero más simple de resolver. La ecuación gobernante se expresa más simplemente en términos del potencial de flujo matricial, que resulta de la transformación de Kirchhoff, que es usada en conducción de calor no lineal. En este caso se define la variable auxiliar:

$$u = \int_0^\theta D(\overline{\theta}) d\overline{\theta} \tag{30}$$

donde u recibe el nombre de potencial de flujo matricial y $\overline{\theta}$ corresponde a una variable auxiliar. a partir de la cual se sigue que:

$$\frac{du}{d\theta} = D(\theta) \Longrightarrow \frac{d\theta}{du} = \frac{1}{D(\theta)}$$
(31)

Es importante resaltar aquí que la experesión (31) obliga a que θ esté restringida por $D(\theta) \neq 0$. A continuación, expresamos las derivadas parciales de θ en términos de u utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial t}$$
(32)

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{d\theta}{du}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial z}$$
(33)

Por otro lado es posible reescribir $\nabla \theta$ como:

 $\nabla \theta$

$$= \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{D(\theta)}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{1}{D(\theta)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$\boldsymbol{\nabla}\theta = \frac{1}{D(\theta)}\boldsymbol{\nabla}u$$
(34)

En este punto se define la función auxiliar F como: $F(u) = 1/D(\theta(u))$. Es posible entonces reescribir las expresiones (32) y (33) respectivamente como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = F(u) \frac{\partial u}{\partial t} \tag{35}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = F(u) \frac{\partial u}{\partial z} \tag{36}$$

Es posible también expresar $\partial K/\partial z$ en términos de u aplicando la relación (33) y el modelo de suelos de Gardner (16) de la forma que sigue:

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \alpha D(\theta)$$
$$\frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \alpha D(\theta)$$
$$\frac{\partial K}{\partial z} = \alpha D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}$$
$$\frac{\partial K}{\partial z} = \alpha D(\theta) \frac{1}{D(\theta)} \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\frac{\partial K}{\partial z} = \alpha \frac{\partial u}{\partial z}$$

Entonces, aplicando los cambios (34), (35) y (37) en la ecuación (29):

$$F(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}^2 u - \alpha \frac{\partial u}{\partial z} - S(u)$$
(38)

(37)

La ecuación (38) nos permite expresar la ecuación de flujo original (27) en términos del potencial de flujo u.

El problema se simplifica cuando es expresado en términos de variables adimensionales normalizadas, como:

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_s} \; ; \; \vec{r_*} = \frac{\vec{r}}{l_s} \; ; \; t_* = \frac{t}{t_s} \tag{39}$$

donde: l_s es la longitud de sorción de escala α^{-1} , t_s es el tiempo de gravedad de escala: $t_s = \frac{\theta_s}{\alpha K_s} = \frac{1}{\alpha^2 \overline{D}}$ y \overline{D} es la difusividad media.

Se definen también los siguientes cambios de variable:

• $\nabla_* = \alpha^{-1} \nabla$ • $D_* = \frac{D}{\overline{D}} = \alpha^2 t_s D$ • $S_*(\Theta) = (t_s/\theta_s)S(\theta)$

•
$$u_* = \frac{\alpha^2 t_s u}{\theta_s}$$

A partir de las expresiones en (39) es posible obtener los siguientes resultados:

$$t_* = \frac{t}{t_s} \Longrightarrow \frac{\partial t_*}{\partial t} = \frac{1}{t_s} \tag{40}$$

$$\theta = \theta_s \Theta \Longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} = \theta_s \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \theta_s \frac{\partial \Theta}{\partial t_*} \frac{\partial t_*}{\partial t} = \frac{\theta_s}{t_s} \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$
(41)

Recordemos que la ecuación gobernante se puede expresar de la forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot [D(\theta)\boldsymbol{\nabla}\theta] - \alpha D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z} - S(\theta)$$

Multiplicando por el factor (t_s/θ_s) y simplificando:

$$\frac{t_s}{\theta_s}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{t_s}{\theta_s}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[D(\theta)\boldsymbol{\nabla}\theta\right] - \alpha\frac{t_s}{\theta_s}D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{t_s}{\theta_s}S(\theta)$$
$$\frac{t_s}{\theta_s}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{t_s}{\theta_s}\alpha\boldsymbol{\nabla}_*\cdot\left[\frac{1}{\alpha^2 t_s}D_*(\Theta)\alpha\boldsymbol{\nabla}_*(\theta_s\Theta)\right] - \alpha\frac{t_s}{\theta_s}D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{t_s}{\theta_s}S(\theta)$$

Entonces la ecuación (29) en su forma adimensional estará dada por:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t_*} = \boldsymbol{\nabla}_* \cdot \left(D_*(\Theta) \boldsymbol{\nabla}_* \Theta \right) - D_* \frac{\partial \Theta}{\partial z_*} - S_*(\Theta)$$
(42)

De forma análoga a (40) y (41), podemos calcular ahora las derivadas de μ respecto de t y de z para expresar la ecuación gobernante en términos de variables adimensionales de la forma que sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\theta_s}{\alpha^2 t_s} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} \frac{\partial t_*}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\theta_s}{\alpha^2 t_s^2} \frac{\partial u_*}{\partial t_*}$$
(43)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\theta_s}{\alpha^2 t_s} \frac{\partial u_*}{\partial z_*} \frac{\partial z_*}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\theta_s}{\alpha^2 t_s^2} \frac{\partial u_*}{\partial z_*}$$
(44)

Sustituyendo (43) y (44) en la ecuación (38):

$$\frac{\alpha^2 t_s}{D_*} \frac{\theta_s}{\alpha^2 t_s^2} \frac{\partial u_*}{\partial t_*} = \alpha^2 \boldsymbol{\nabla}_*^2 \frac{\theta_s}{\alpha^2 t_s} u_* - \alpha \frac{\theta_s}{\alpha t_s} \frac{\partial u_*}{\partial z_*} - S_*(u)$$

Multiplicando por el factor (t_s/θ_s) y simplificando:

$$\frac{1}{D_*}\frac{\partial u_*}{\partial t_*} = \boldsymbol{\nabla}_*^2 u_* - \frac{\partial u_*}{\partial z_*} - S_*(u) \tag{45}$$

En adelante, se usarán variables adimensionales, pero por conveniencia los asteriscos se omitirán, por lo que podemos reescribir las ecuaciones (42) y (45) de la forma que sigue:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (D(\Theta)\boldsymbol{\nabla}\Theta) - D\frac{\partial \Theta}{\partial z} - S(\Theta)$$
(46)

$$\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}^2 u - \frac{\partial u}{\partial z} - S(u) \tag{47}$$

La ecuación (47) presenta la forma general:

$$\frac{1}{D(u)}\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - S(u) \tag{48}$$

con:

$$Lu = \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial z} \tag{49}$$

donde L es un operador elíptico y lineal. Este operador L le da sentido al nombre del método que se expone en este capítulo, pues permite expresar la ecuación de flujo (27) como una ecuación diferencial cuasi-lineal.

Se recurre a continuación a la teoría de clasificación de simetrías no clásico [14] en la que se identifican casos de D(u) y S(u) para los cuales existe solución de la forma:

$$u = e^{At} \Phi(\mathbf{r}) \tag{50}$$

donde Φ es una función auxiliar que depende solo de las variables espaciales y A es una constante.

Recordamos ahora que la forma general de la ecuación gobernante se reescribió en términos de variables adimensionales de la forma que sigue:

$$\frac{1}{D(u)}\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - S(u)$$

$$Lu = \frac{1}{D(u)}\frac{\partial u}{\partial t} + S(u)$$
(51)

Considerando ahora que la derivada de la expresión (50) está dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A e^{At} \Phi(\mathbf{r}) = A u \tag{52}$$

Y sustituyendo la solución (50) y la derivada (52) en la forma general (51), se tiene:

$$Lu = A\frac{u}{D(u)} + S(u) \tag{53}$$

Si se elige una combinación de D(u) y S(u) de tal manera que el miembro derecho de la ecuación (53) sea igual a $-\kappa u$ (con $\kappa \in \mathbb{R}$), se tendrá:

$$Lu = A\frac{u}{D(u)} + S(u) = -\kappa u \tag{54}$$

Entonces, queda para u satisfacer la siguiente ecuación lineal:

$$Lu + \kappa u = 0$$

A pesar de que la ecuación (47) es no lineal, esta admite separación de variables en un sistema lineal. A partir de la definición del operador elíptico Lu dada en (49) podemos expresar las igualdades:

$$Lu + \kappa u = \boldsymbol{\nabla}^2 u - \frac{\partial u}{\partial z} + \kappa u = 0$$

consideramos ahora la solución general (50), resultando:

$$L(e^{At}\Phi) + \kappa(e^{At}\Phi) = \nabla^{2}(e^{At}\Phi) - \frac{\partial(e^{At}\Phi)}{\partial z} + \kappa(e^{At}\Phi) = 0$$

$$e^{At}L\Phi + e^{At}\kappa\Phi = e^{At}\nabla^{2}\Phi - e^{At}\frac{\partial(\Phi)}{\partial z} + e^{At}\kappa\Phi = 0$$

$$e^{At}(L\Phi + \kappa\Phi) = e^{At}\left(\nabla^{2}\Phi - \frac{\partial(\Phi)}{\partial z} + \kappa\Phi\right) = 0$$

$$L\Phi + \kappa\Phi = \nabla^{2}\Phi - \frac{\partial(\Phi)}{\partial z} + \kappa\Phi = 0$$

$$L\Phi + \kappa\Phi = \nabla^{2}\Phi - \Phi_{z} + \kappa\Phi = 0$$
(55)

Además, a partir del segundo y tercer miembro de la igualdad (54), se tiene que D y S deberían satisfacer la siguiente ley constitutiva:

$$-S(u) = A\frac{u}{D(u)} + \kappa u \tag{56}$$

la cual es una restricción que surge con esta metodología.

En este punto, la ecuación de Richards en presencia de un término sumidero no lineal se ha logrado reducir a una ecuación diferencial del tipo Kirchhoff-Helmholtz tal como aparece en (55). Esta ecuación es mucho más fácil de resolver, sin embargo es necesario considerar que (56) es una restricción que deben satisfacer ambas funciones D y S.

Entre las posibles funciones que admiten la transformación (50), Broadbridge [5] escoge funciones específicas que cumplan con estas restricciones y que muestren comportamientos similares a modelos validados experimentalmente como el de Van Genuchten [33]. En el caso de la difusividad, la función escogida es de la forma:

$$D(\Theta) = \frac{m}{(e^m - 1)} e^{m\Theta}$$
(57)

donde Θ es la cantidad de humedad adimensional definida previamente el (39) y m > 0 es una constante real arbitraria. La expresión (57) no tiene un significado físico, pero resulta de gran interés matemático en la obtención de soluciones analíticas con este método.

Esta función permite ahoraresolver la ecuación gobernante (29). Para ello se sustituye (57) en la transformación de Kirchhoff (30), esto es:

$$u = \int_0^{\Theta} D(\overline{\Theta}) d\overline{\Theta}$$

$$u = \frac{m}{(e^m - 1)} \int_0^{\Theta} e^{m\overline{\Theta}} d\overline{\Theta}$$
$$u = \frac{1}{(e^m - 1)} \left(e^{m\Theta} - 1 \right)$$
$$u = \frac{e^{m\Theta} - 1}{(e^m - 1)}$$
(58)

La ecuación (58) expresa el potencial de flujo matricial u en términos de la cantidad de humedad adimensional Θ , siempre que la difusividad sea una función de la forma (57). A partir de aquí se puede despejar Θ fácilmente para obtener la solución analítica final:

$$u = \frac{e^{m\Theta} - 1}{(e^m - 1)}$$

$$(e^m - 1)u = e^{m\Theta} - 1$$

$$1 + (e^m - 1)u = e^{m\Theta}$$

$$\ln[1 + (e^m - 1)u] = m\Theta$$

$$\Theta = \frac{1}{m}\ln[1 + (e^m - 1)u]$$
(59)

Otro punto importante es considerar cuál será la forma que tendrá la función RWU para este caso. Con esa finalidad, se sustituyen (57) y (58) en (56), obteniéndose:

$$-S = A\frac{u}{D} + \kappa u$$
$$-S = \left[A\frac{1}{D} + \kappa\right] u$$
$$-S = \left[A\left(\frac{m}{(e^m - 1)}e^{m\Theta}\right)^{-1} + \kappa\right] \left(\frac{e^{m\Theta} - 1}{e^m - 1}\right)$$
$$-S = A\left(\frac{m}{(e^m - 1)}e^{m\Theta}\right)^{-1} \left(\frac{e^{m\Theta} - 1}{(e^m - 1)}\right) + \kappa\left(\frac{e^{m\Theta} - 1}{e^m - 1}\right)$$
$$-S = \frac{A}{m}\left((e^m - 1)^{-1}e^{-m\Theta}\right) \left(\frac{e^{m\Theta} - 1}{(e^m - 1)}\right) + \frac{\kappa}{(e^m - 1)}\left(e^{m\Theta} - 1\right)$$
$$S(\Theta) = -\left[\frac{\kappa}{e^m - 1}\left(e^{m\Theta} - 1\right) + \frac{A}{m}\left(1 - e^{-m\Theta}\right)\right]$$
(60)

4.3 Algoritmo para el método de cuasilinealización

Según lo visto hasta ahora, el método se puede resumir mediante el siguiente algoritmo:

- **Paso 1:** expresar la ecuación de Richards (26) con término fuente en términos de la difusividad y conductividad (29).
- **Paso 2:** expresar dicha ecuación en términos variables adimensionales (42) y se aplica la transformación de Kirchhoff (30) para expresar la ecuación en términos del potencial de flujo matricial *u*.
- **Paso 3:** utilizar separación de variables dada por (50) que permite reducir el problema a una ecuación de Kirchhoff-Helmholtz (55).
- Paso 4: escoger una forma específica para difusividad dada por (57) se aplica nuevamente la transformación de Kirchhoff para regresar a la variable original Θ y obtener así la solución analítica (59).

Si bien se ha obtenido satisfactoriamente una solución de carácter analítico es importante considerar que tenemos varias restricciones a tomar en cuenta para resolver la ecuación gobernante (29), tales como el modelo de suelos de Gardner (15), la relación exponencial para el potencial de flujo matricial (50) y la expresión (56) que restringe la relación entre la función RWU y la función de difusividad.

4.4 Caso particular 1: flujo unidimensional

A través del método análitico de [5], se redujo la ecuación de Richards tridimensional con término fuente:

$$\frac{\partial \theta(\vec{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[D(\theta) \boldsymbol{\nabla} \theta \right] - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - S(\theta,\vec{r},t)$$
(61)

a la forma lineal de la ecuación de Kirchhoff-Helmholtz:

$$\nabla^2 \Phi - \Phi_z + \kappa \Phi = 0 , \ \kappa \in \mathbb{R}$$
(62)

El caso unidimensional a resolver, se seguirá expresando en términos de z, dado que ésta es la variable que representa la dirección del flujo. Por lo tanto, se tiene:

$$\Phi_{zz} - \Phi_z + \kappa \Phi = 0 , \ \kappa \in \mathbb{R}$$
(63)

que se trata de una EDO de segundo orden con coeficientes constantes, por lo que podemos hacer $\Phi = e^{\nu z}$ para obtener la ecuación característica:

$$\nu^2 - \nu + \kappa = 0$$
$$\nu = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\kappa}}{2}$$

Luego la solución de (63) está dada por:

$$\Phi = c_1 e^{\nu_1 z} + c_2 e^{\nu_2 z} \tag{64}$$

donde:

$$\nu_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\kappa}}{2}, \ \nu_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\kappa}}{2}$$

Un aumento exponencial conduce a condiciones de borde inaceptables cuando $z \to \infty$. Por lo que se escoge $\kappa < 0$ y $c_1 = 0$. Al considerar $c_1 = 0$ en la ecuación (64) se tiene:

$$\Phi = c_2 e^{\nu_2 z} \tag{65}$$

Luego, usando la relación (65) en (50) se obtiene:

$$u = e^{At}c_2 e^{\nu_2 z}$$
$$u = c_2 e^{At + \nu_2 z}$$
$$u = c_2 e^{\nu_2 (z + At/\nu_2)}$$

En este punto consideramos solo el valor negativo en el argumento de la exponencial para que el resultado tenga sentido físico, obteniéndose:

$$u = c_2 e^{-|\nu_2|(z+|A|t/|\nu_2|)|} \tag{66}$$

Desde el punto de vista físico, este último resultado representa una onda viajera de velocidad $|A|/\nu_2$.

Para la forma general de la ecuación:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial z} - S(u) \tag{67}$$

la reducción de onda viajera lleva a una ecuación de Abel, cuyas soluciones son conocidas sólo en casos especiales, por ejemplo:

$$D = ce^u = \frac{c}{1 - c\Theta}; \ c = 1 - e^{-1}$$

En este caso la relación entre la solución u y la difusividad D está dada por:

$$u = \int_{0}^{\Theta} D \ d\Theta$$
$$u = \int_{0}^{\Theta} \frac{c}{1 - c\Theta^{*}} \ d\Theta$$
$$u = -\int_{0}^{\Theta} \frac{-c}{1 - c\Theta^{*}} \ d\Theta$$
$$u = -\left[\ln(1 - c\Theta^{*}) \right]_{0}^{\Theta}$$
$$u = -\left[\ln(1 - c\Theta) - \ln(1 - c \cdot 0) \right]$$
$$u = -\ln(1 - c\Theta)$$

Método de las ondas viajeras

En el método de las ondas viajeras, se propone un cambio de variable de la forma $\phi = z - ct$ que permitirá reducir la EDP a una EDO. Si bien este cambio implica pérdida de generalidad en la solución, esta permite simplificar bastaante la forma de la EDP original. Este método recibe su nombre debido a qué físicamente la función ϕ representa la función de una onda que depende del tiempo t, con una velocidad c y con posición inicial z.

Si introducimos la notación $c = |A|/\nu_2$ en el resultado (66), se aprecia claramente que tenemos una función del tipo u = u(z - ct). Sin embargo, si introducimos el cambio $\phi = z - ct$, se puede ahora expresar la ecuación gobernante de este problema en términos de $u(\phi)$.

Para ello, en primer lugar se expresan las respectivas derivadas parciales en función de las nuevas variables introducidas, esto es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}^{-c} = -c \frac{du}{d\phi} = -cu'(\phi)$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z}^{1} = \frac{du}{d\phi} = u'(\phi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{d\phi} \right) = \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{dz} = \frac{d^2 u}{d\phi^2} \frac{\partial \phi'}{\partial z} = \frac{d^2 u}{d\phi^2} = u''(\phi)$$

Si introducimos estos cambios en la forma unidimensional de la ecuación (67) y consideramos $D = ce^u$ y $S(u) = 1 - e^{-u}$, se obtiene entonces:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z} - S(u)$$
$$-\frac{1}{ce^u}cu'(\phi) = u''(\phi) - u'(\phi) - (1 - e^{-u})$$
$$-e^{-u}u'(\phi) = u''(\phi) - u'(\phi) - (1 - e^{-u})$$
$$(1 - e^{-u})u'(\phi) = u''(\phi) - (1 - e^{-u})$$
$$u'(\phi) = \frac{u''(\phi)}{(1 - e^{-u})} - 1$$
$$(u'(\phi) + 1) = \frac{u''(\phi)}{(1 - e^{-u})}$$
$$(1 - e^{-u(\phi)}) = \frac{u''(\phi)}{(u'(\phi) + 1)}$$

Multiplicando la ecuación por el factor $u'(\phi)$:

$$(1 - e^{-u(\phi)})u' = \frac{u''(\phi)}{(u'(\phi) + 1)}u'(\phi)$$

$$u'(\phi) - u'(\phi)e^{-u(\phi)} = \frac{u'(\phi)}{(u'(\phi) + 1)}u''(\phi)$$

$$u'(\phi) - u'(\phi)e^{-u(\phi)} = \frac{u'(\phi) + 1 - 1}{(u'(\phi) + 1)}u''(\phi)$$
$$u'(\phi) - u'(\phi)e^{-u(\phi)} = \left(1 - \frac{1}{(u'(\phi) + 1)}\right)u''(\phi)$$
$$u'(\phi) - u'(\phi)e^{-u(\phi)} = u''(\phi) - \frac{u''(\phi)}{(u'(\phi) + 1)}$$

Integrando la ecuación con respecto a ϕ :

$$u(\phi) - e^{-u(\phi)} + c_1 = u'(\phi) - \ln(u'(\phi) + 1)$$

donde c_1 es una constante de integración.

A partir de aquí, sería conveniente despejar $u'(\phi)$ con el fin de resolver esta ecuación. Por lo tanto, reordenando términos, se tiene:

$$u'(\phi) - \ln(u'(\phi) + 1) = u(\phi) - e^{-u(\phi)} + c_1$$
$$\ln(u'(\phi) + 1) - u'(\phi) = -(u(\phi) - e^{-u(\phi)}) - c_1$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos podemos reescribir la expresión anterior como:

$$ln(u'(\phi) + 1) - ln(e^{u'(\phi)}) = ln(e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)}) - c_1})$$
$$ln\left(\frac{u'(\phi) + 1}{e^{u'(\phi)}}\right) = ln(e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)}) - c_1})$$
$$\frac{u'(\phi) + 1}{e^{u'(\phi)}} = e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)}) - c_1}$$
$$(u'(\phi) + 1)e^{-u'(\phi)} = e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)}) - c_1}$$

Multiplicando la ecuación por $-e^{-1}$:

$$-(u'(\phi)+1)e^{-(u'(\phi)+1)} = -e^{-c_1-1}e^{-(u(\phi)-e^{-u(\phi)})}$$

Haciendo el cambio $c_2 = -e^{-c_1-1}$:

$$-(u'(\phi)+1)e^{-(u'(\phi)+1)} = c_2 e^{-(u(\phi)-e^{-u(\phi)})}$$

A continuación se aplica sobre ambos miembros de la igualdad, la función W de Lambert, que se caracteriza por tener la propiedad $z = W(z)e^{W(z)}$. Entonces:

$$W\left[-(u'(\phi)+1)e^{-(u'(\phi)+1)}\right] = W\left[c_2e^{-(u(\phi)-e^{-u(\phi)})}\right]$$

$$-(u'(\phi) + 1) = W \left[c_2 e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)})} \right]$$
$$u'(\phi) + 1 = -W \left[c_2 e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)})} \right]$$
$$u'(\phi) = -W \left[c_2 e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)})} \right] - 1$$
$$u'(\phi) = -\left(W \left[c_2 e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)})} \right] + 1 \right)$$

Por último, a través de las propiedades de la inversa de una derivada es posible obtener una expresión para la onda viajera ϕ en términos del potencial de flujo matricial μ , esto es:

$$\frac{du}{d\phi} = -\left(W\left[c_2 e^{-(u(\phi) - e^{-u(\phi)})}\right] + 1\right)$$
$$\frac{d\phi}{du} = -\frac{1}{\left(W\left[c_2 e^{-(u-e^{-u})}\right] + 1\right)}$$
$$\phi = -\int \frac{1}{\left(W\left[c_2 e^{-(u-e^{-u})}\right] + 1\right)} du$$
(68)

Si bien el resultado (68) no constituye una solución analítica explícita, ésta podría ser útil para calcular resultados numéricos.

4.5 Caso particular 2: irrigación periódica

Considere surcos de irrigación poco profundos de ancho $2x_0$, localizado la superficie z = 0, $-x_0 \le x \le x_0$ y espaciado periódicamente con periodo espacial $2l > 2x_0$.



Figura 5: Esquema de irrigación periódica entre surcos [5].

El sistema puede entonces ser considerado como bidimensional con coordenadas cartesianas apropiadas (x, z).

La difusividad agua-suelo, la conductividad hidráulica y la tasa de extracción planta-raíz son asumidas para satisfacer el modelo de suelos de Gardner (16):

$$K'(\theta) = \alpha D(\theta)$$

-S(u) = $\left[\frac{A}{D(u)} + \kappa\right] \left[\int_0^{\theta} D(\overline{\theta}) d\theta\right]$ (69)

El potencial de flujo matricial por lo tanto satisface en coordenadas adimensionales:

$$u = e^{At} \Phi(\vec{r})$$

$$L\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{zz} - \Phi_z = -\kappa \Phi$$
(70)

Las condiciones de borde en la superficie incluyen el flujo vertical a través de un surco, y flujo cero a través de la superficie entre surcos.

Con el objetivo de solucionar la ecuación diferencial parcial (70), resultaría útil expresar estas condiciones de borde en términos de potencial de flujo matricial u, para ello se recurre a la ley de Darcy para medios insaturados y al hecho de que en los suelos de Gardner se cumple que $K(\theta) = u$. El plantemiento es el siguiente:

$$\mathbf{V} = -K(\theta)(\boldsymbol{\nabla}\Psi - \boldsymbol{\nabla}z)$$

Expandiendo por componentes, se tiene:

$$\left(\mathbf{V}\cdot\hat{e}_x\,,\,\mathbf{V}\cdot\hat{e}_y\,,\,\mathbf{V}\cdot\hat{e}_z\right) = \left(-K(\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,,\,-K(\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,,\,-K(\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial z}+K(\theta)\right)\right)$$

donde cada \hat{e}_k es un vector unitario en la dirección k.

Igualando los componentes orientados en la dirección z:

$$\mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = -K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} + K(\theta)$$
$$\mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = -K(\theta) \frac{d\Psi}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta)$$
$$\mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta)$$
$$\mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = K(\theta) - D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z}$$
$$\mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = u - \frac{du}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

por lo tanto, el flux lateral total está dado por:

$$\mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = u - u_z \tag{71}$$

Dado lo anterior, se tiene el siguiente problema con valores en la frontera:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} - \Phi_z + \kappa \Phi = 0 \tag{72}$$

$$C.B. \begin{cases} V \cdot \hat{e_z} = \mu - \mu_z = e^{At} \left[\Phi - \Phi_z \right] = V_0(t) \; ; \; z = 0 \; , \; 0 \le x < x_0 \\ V \cdot \hat{e_z} = 0 \; ; \; z = 0 \; , \; x_0 \le x \le l \end{cases}$$
(73)

Sin embargo, la solución invariante de la escala debe tener $V_0(t) = F_0 e^{At}$ con F_0 constante. El flujo horizontal a través de planos de reflexión de simetría (x = 0 y x = l) debe ser cero, por lo tanto, $\Phi_x = 0$ cuando x = 0 y x = l.

Si definimos una densidad de flujo variable vertical: $F = \Phi - \Phi_z$, entonces el nuevo problema de valores en la frontera se puede expresar de la forma que sigue:

$$F_{xx} + F_{zz} - F_z + \kappa F = 0 \tag{74}$$

$$C.B. \begin{cases} F(x,0) = F_0, \ 0 \le x < x_0 \\ F(x,0) = 0, \ x_0 \le x \le l \\ F_x(x,z) = 0, \ x = 0, \ x = l \end{cases}$$
(75)
Para resolver este PVF, se recurre al método de separación de variables, comenzamos suponiendo que existe una solución de la forma:

$$F(x,z) = X(x)Z(z) \tag{76}$$

Por tanto, las respectivas derivadas parciales están dadas por:

$$F_{xx} = X''Z ; F_{zz} = XZ'' ; F_z = XZ'$$

Al susituir estas derivadas en la EDP (74), se obtiene:

$$X''Z + XZ'' - XZ' + \kappa XZ = 0$$

Dividiendo por XZ:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Z''}{Z} - \frac{Z'}{Z} + \kappa = 0$$
$$\frac{X''}{X} = -\frac{Z''}{Z} + \frac{Z'}{Z} - \kappa$$
(77)

Claramente, el miembro izquierdo de la ecuación (77) depende solo de x, mientras que su miembro derecho depende solo de z por lo tanto, derivando dicha ecuación respecto a x se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{X''}{X} \right] = 0 \tag{78}$$

y derivando (77) respecto a z se tiene:

$$\frac{d}{dz}\left[-\frac{Z''}{Z} + \frac{Z'}{Z} - \kappa\right] = 0 \tag{79}$$

Resolviendo la ecuación (78) tenemos:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{X''}{X} \right] = 0$$

$$\frac{X''}{X} = \lambda , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X'' - \lambda X = 0$$
(80)

Ahora resolvemos la ecuación diferencial (80) para cada caso de λ :

I) Para $\lambda = 0$:

$$X'' = 0$$

$$X_I(x) = c_1 + c_2 x \tag{81}$$

II) Para $\lambda=\alpha^2>0$

$$X_{II}(x) = c_3 \cosh(\alpha x) + c_4 \sinh(\alpha x)$$
(82)

III) Para $\lambda=-\alpha^2\ {\rm con}\ \alpha>0$

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

$$X_{III}(x) = c_5 \cos(\alpha x) + c_6 \sin(\alpha x)$$
(83)

Considerando la forma de la solución propuesta en (76) en adición con la siguiente condición de borde:

 $X'' - \alpha^2 X = 0$

$$F_x(x,z) = X'(x)Z(z) = 0$$
, $x = 0$, $x = l$

Se puede concluir que, para $Z(z) \neq 0$, se cumple que:

$$X'(0) = 0 (84)$$

$$X'(l) = 0 \tag{85}$$

Si se aplica (84) en (81), se obtiene $c_2 = 0$, lo que implica que $X_I(x) = c_1$. Mientras que si se aplica (85) en (81) se obtiene que $c_2 = l$ y por consiguiente $c_2 = l = 0$. Sin embargo, nos interesa estudiar las soluciones para las cuales $l \neq 0$, por lo que descartamos esta solución.

Si se aplica (84) en (82), se obtiene $c_4 = 0$, lo que implica que $X_{II}(x) = c_3 \cosh(\alpha x)$. Por otro lado, si ahora se aplica (85) en este resultado se obtendrá l = 0, así que la solución X_{II} se descarta por la misma razón que X_I .

Por último, si se aplica (84) en (83), se obtiene $c_6 = 0$, entonces:

$$X_{III}(x) = c_5 \cos(\alpha x)$$

Aplicando la condición (85):

$$-\alpha c_5 \ sen(\alpha l) = 0$$
$$sen(\alpha l) = 0 , \qquad c_5 \neq 0 , \ \alpha \neq 0$$
$$\alpha l = n\pi , \qquad n \in \mathbb{Z}$$
$$\alpha = \frac{n\pi}{l} , \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, solo X_{III} nos entrega soluciones no triviales para $\lambda_n = \alpha_n^2 = (n\pi/l)^2$, con n = 1, 2, 3, ..., donde λ_n corresponden a los valores propios de este problema.

A continuación, retomamos la ecuación diferencial (79) y se trabaja de forma análoga al trabajo realizado en (78), por lo tanto:

$$\frac{d}{dz} \left[-\frac{Z''}{Z} + \frac{Z'}{Z} - \kappa \right] = 0$$
$$-\frac{Z''}{Z} + \frac{Z'}{Z} - \kappa = \lambda$$
$$Z' - Z'' - (\kappa + \lambda)Z = 0$$
$$Z'' - Z' + (\kappa + \lambda)Z = 0$$
(86)

Resolvemos la ecuación diferencial (86) para $\lambda = -\alpha^2$, con $\alpha > 0$:

$$Z'' - Z' + (\kappa - \alpha^2)Z = 0$$
$$Z_{III}(z) = c_7 \ e^{-(\sqrt{1+4\alpha^2 - 4\kappa} - 1)z/2} + c_8 \ e^{(\sqrt{1+4\alpha^2 - 4\kappa} - 1)z/2}$$

No obstante, es importante recordar que se desea que las soluciones analíticas obtenidas tengan también coherencia física, así que con el fin de obtener condiciones de borde aceptables conforme $z \longrightarrow +\infty$, se escoge $c_8 = 0$ y $\kappa \leq 0$. Entonces:

$$Z_{III}(z) = c_7 e^{-(\sqrt{1+4\alpha^2 - 4\kappa} - 1)z/2}$$

Por lo tanto, sustituyendo los resultados Z_{III} y X_{III} en la suposición inicial del método de separación de variables, tenemos:

$$F(x,z) = X(x)Z(z)$$
$$F(x,z) = c_5 c_7 \cos(\alpha x) e^{-(\sqrt{1+4\alpha^2 - 4\kappa} - 1)z/2}$$

Si consideramos que $\alpha = (n\pi/l)$ y hacemos $A_n = c_5 c_7$:

$$F_n(x,z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}$$

Por principio de superposición:

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}$$
(87)

Recodemos que una de las condiciones de borde de este problema está dada por:

$$F(x,0) = F_0$$
, $0 \le x < x_0$

Aplicando dicha condición de borde en la solución (87), se tiene:

$$F_o = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$
$$F_o = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Con el fin de encontrar una expresión que determine a los coeficientes A_n resultará útil recordar la definición de un serie de Fourier de cosenos, es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$
$$\begin{cases}a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx\\a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx\end{cases}$$

En este caso identificamos a $A_0 = a_0/2$; $A_n = a_n \text{ y } f(x) = F_0$ para $0 \le x \le x_0$, entonces:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{l} \int_0^{x_0} F_0 dx = \frac{1}{l} (x_0 - 0) F_0$$
$$A_0 = \frac{F_0 x_0}{l}$$

Además:

$$A_n = a_n = \frac{2}{l} \int_0^{x_0} F_0 \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$
$$A_n = \frac{2}{n\pi} F_0 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right) , \qquad n \ge 1$$

4

A continuación, es posible encontrar la función $\Phi(x, z)$, pues, tal como se definió al comienzo del problema, sabemos que $F(x, z) = \Phi(x, z) - \Phi_z(x, z)$. Ésta última expresión se puede resolver fácilmente como una ecuación direncial lineal cuya única derivada depende de z, para ello se multiplicará la ecuación por un factor intergante e^{-z} . El procedimiento es el siguiente:

$$\Phi - \Phi_z = F(x, z)$$
$$\Phi_z - \Phi = -F(x, z)$$
$$e^{-z}\Phi_z - e^{-z}\Phi = -e^{-z}F(x, z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e^{-z} \Phi \right] = -e^{-z} F(x, z)$$
$$e^{-z} \Phi = -\int e^{-z} F(x, z) \partial z + C$$

Con el fin de hacer más simple la solución, se escoge una constante C = 0:

$$e^{-z}\Phi = -\int e^{-z}F(x,z)\partial z$$
$$\Phi = -e^{z}\int e^{-z}F(x,z)\partial z$$

Si se sustituye ahora F(x, z) por el resultado obtenido en (87), se obtiene:

$$\Phi = -e^{z} \int e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}-1)z/2} \partial z$$

$$\Phi = -e^{z} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \int e^{-z} e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}-1)z/2} \partial z$$

$$\Phi = -e^{z} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \int e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}+1)z/2} \partial z$$

$$\Phi = -e^{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2A_{n} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}+1)z/2}}{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}+1)}$$

$$\Phi = e^{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2A_{n} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}+1)z/2}}{1+\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}}$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} 2A_{n} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}-1)z/2}}{1+\sqrt{1+4(n\pi/l)^{2}-4\kappa}}$$
(88)

La solución (88) está estrechamente relacionado con el comportamiento de función de extracción de agua planta-raíz. La interpretación física dada por el autor es la siguiente:

Por la noche, cuando no está ocurriendo la extracción planta-raíz, la solución de estado estacionario para el potencial de flujo matricial u es dada exactamente por la solución anterior para Φ con $\kappa = 0$ [5].

El resultado (88) nos permite también calcular el flux total de agua entregada lateralmente lejos de las zonas de irrigación. Cuando la extracción planta-raíz está operando durante la irrigación matinal, existe una dependencia del tiempo exponencial dada por $u = e^{-|A|t}\Phi$. Recordando que el flux lateral total obtenido en (71) está dado por $u - u_z$, entonces:

$$\begin{split} u - u_z &= -2 \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x, z, t) \right] \Big|_{x_0} dz dt \\ u - u_z &= -2 \int_0^\infty e^{-|A|t} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, z) \right] \Big|_{x_0} dz dt \\ u - u_z &= -2 \int_0^\infty e^{-|A|t} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^\infty 2A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}} \right] \Big|_{x_0} dz dt \\ u - u_z &= -2 \int_0^\infty e^{-|A|t} \int_0^\infty \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{4}{n\pi} F_0 \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right) \, cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}} \right) \right] \Big|_{x_0} dz dt \\ u - u_z &= 2 \int_0^\infty e^{-|A|t} \int_0^\infty \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{4}{l} F_0 \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right) \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}} \right] \Big|_{x_0} dz dt \\ u - u_z &= 2 \int_0^\infty e^{-|A|t} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{l} F_0 \, sen^2\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}} dz dt \\ u - u_z &= \frac{8F_0}{l} \int_0^\infty e^{-|A|t} \sum_{n=1}^\infty sen^2\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right) \int_0^\infty \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}} dz dt \end{split}$$

En los pasos posteriores, con el fin de abreviar la notación, se introducirá la notación $\varepsilon_n = \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}$, por lo tanto, ahora tenemos:

$$\begin{aligned} u - u_z &= \frac{8F_0}{l} \int_0^\infty e^{-|A|t} dt \sum_{n=1}^\infty sen^2 \left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \int_0^\infty \frac{e^{-(\varepsilon_n - 1)z/2}}{1 + \varepsilon_n} dz \\ u - u_z &= -\frac{8F_0}{|A|l} \left[e^{-|A|t} \right] \Big|_0^\infty dt \sum_{n=1}^\infty sen^2 \left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \frac{1}{1 + \varepsilon_n} \int_0^\infty e^{-(\varepsilon_n - 1)z/2} dz dt \\ u - u_z &= \frac{8F_0}{|A|l} \sum_{n=1}^\infty sen^2 \left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \frac{2}{1 - \varepsilon_n^2} \left[e^{-(\varepsilon_n - 1)z/2} \right] \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

$$u - u_z = \frac{8F_0}{|A|l} \sum_{n=1}^{\infty} sen^2 \left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \frac{2}{\varepsilon_n^2 - 1}$$

A partir del hecho que $\varepsilon_n^2 = 1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa$, obtenemos:

u

$$u - u_{z} = \frac{8F_{0}}{|A|l} \sum_{n=1}^{\infty} sen^{2} \left(\frac{n\pi}{l}x_{0}\right) \frac{2}{4(n\pi/l)^{2} - 4\kappa}$$

$$u - u_{z} = \frac{8F_{0}}{|A|l} \sum_{n=1}^{\infty} sen^{2} \left(\frac{n\pi}{l}x_{0}\right) \frac{2}{\frac{4}{l^{2}}\left[(n\pi)^{2} - \kappa l^{2}\right]}$$

$$u - u_{z} = \frac{F_{0}}{|A|} l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^{2}(n\pi x_{0}/l)}{\left[(n\pi)^{2} - \kappa l^{2}\right]}$$

$$u - u_{z} = \frac{F_{0}}{|A|} l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos^{2}\left(2n\pi x_{0}/l\right)}{\left[(n\pi)^{2} - \kappa l^{2}\right]}$$
(89)

Sea $O(\kappa)$ una función constante de la forma $f(x) = \kappa$ que acota superiormente de forma asintótica a la serie de la expresión (89), entonces:

$$u - u_z = \frac{F_0}{|A|} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos^2 \left(2n\pi x_0/l\right)}{(n\pi)^2} \right] + O(k)$$
$$- u_z = \frac{1}{|A|} \frac{F_0}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \left(2n\pi x_0/l\right)}{n^2} \right] + O(k)$$
(90)

En la expresión (90), se puede verificar fácilmente que la primera serie converge a $\pi^2/6$, mientras que la segunda serie converge a $\pi^2 [(x_0/l)^2 - (x_0/l) + (1/6)]$, tal como se puede verificar en los resultados de Gradshteyn y Ryzhik [16]. Por lo tanto, ahora tenemos que:

$$u - u_{z} = \frac{1}{|A|} \frac{F_{0}}{\pi^{2}} \left[\frac{\pi^{2}}{6} - \pi^{2} \left(\left(\frac{x_{0}}{l} \right)^{2} - \frac{x_{0}}{l} + \frac{1}{6} \right) \right] + O(k)$$
$$u - u_{z} = \frac{1}{|A|} F_{0} \left[\frac{1}{6} - \left(\frac{x_{0}}{l} \right)^{2} + \frac{x_{0}}{l} - \frac{1}{6} \right] + O(k)$$
$$u - u_{z} = \frac{1}{|A|} F_{0} \frac{x_{0}}{l} \left[1 - \frac{x_{0}}{l} \right] + O(k)$$
(91)

El resultado (91) nos permite concluir entonces que este flux lateral total es igual $|A|^{-1}F_0(x_0/l)[1-(x_0/l)]$ y que esta igualdad debe ser exacta para cualquier valor de κ .

5 Solución analítica mediante el método de las funciones de Green

5.1 Descripción del método

El método de funciones de Green es utilizado para resolver problemas físicos que se modelan por ecuaciones diferenciales con condiciones de borde homogéneas o no homogéneas. En este método, la solución de una ecuación diferencial parcial no homogénea es obtenida como una superposición de expresiones integrales en términos de funciones de Green.

Este método entrega varias ventajas si lo comparamos con un método más tradicional, como el método de expansión por eigenfunciones. En primer lugar, entrega una representación integral de soluciones, lo que provee una vía más directa de describir la estructura analítica general de una solución. Además, desde un punto de vista analítico, la evaluación de una solución de una representación integral puede resultar más simple que encontrar la suma de una serie infinita. Siguiendo el enfoque de Myint-U y Debnath [24], el método se puede sintetizar en los siguientes pasos:

Consideremos un PVF dado por una EDP no homogénea de la forma:

$$L\left[p(\mathbf{x})\right] = f(\mathbf{x}) \tag{92}$$

donde L es un operador diferencial parcial lineal y $\mathbf{x} = [x, y, z]$ un vector de 3 (o más) dimensiones.

Sea $\mathbf{x}_s = [x_s, y_s, z_s]$ un vector de variables auxiliares, entonces la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$ del problema (92) satisface:

$$L[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \tag{93}$$

donde δ es la función delta de Dirac, que se define en el anexo de (190) a (192). La ecuación (93) se denomina ecuación de Green adjunta de la ecuación (92).

Multiplicando (93) por $f(\mathbf{x}_s)$ se obtiene:

$$L[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)] f(\mathbf{x}_s) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(\mathbf{x}_s)$$
(94)

A continuación, se integra respecto a un volumen V_s (se denota con subíndice s por pertenecer al espacio de las variables \mathbf{x}_s), resultando:

$$\int_{V_s} L\left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)\right] f(\mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x}_s = \int_{V_s} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) f(\mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x}_s \tag{95}$$

Los límites de este volumen V_s estarán determinados por el problema a modelar y sus condiciones de borde.

Si se aplica una de las propiedades de la función delta de Dirac (descrita en (192)) en el miembro derecho de la ecuación (95), entonces:

$$\int_{V_s} L\left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)\right] f(\mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x}_s = f(\mathbf{x}) \tag{96}$$

$$L\left[\int_{V_s} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) f(\mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x}_s\right] = f(\mathbf{x}) \tag{97}$$

$$\int_{V_s} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) f(\mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x}_s = L^{-1} \left[f(\mathbf{x}) \right] \tag{98}$$

A partir de la ecuación (92) se sigue que $p(x) = L^{-1}[f(\mathbf{x})]$, por tanto:

$$p(x) = \int_{V_s} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) f(\mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x}_s \tag{99}$$

Por consiguiente, el método de funciones de Green puede ser aplicado para cualquier EDP no homogénea lineal con coeficientes constantes en cualquier número de variables independientes.

5.2 Reducción a una ecuación de difusión no homogénea

El problema con valores iniciales y de frontera a abordar en este capítulo está dado por la ecuación de Richards con presencia de una función RWU:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + S = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[K(\boldsymbol{\nabla} \Psi - \boldsymbol{\nabla} z) \right]$$
(100)

Mientras que las condiciones están dadas en términos de la carga de presión Ψ (tridimensional y dependiente del tiempo) definida previamente en (6):

(a) La condición inicial está dada por:

$$\Psi(x, y, z, 0) = \Psi_i(x, y, z)$$
(101)

para todo el dominio en t = 0.

(b) Mientras que las condiciones de borde se presentan de dos formas. En primer lugar, está la condición de borde dada por la carga de presión al nivel de la capa freática, es decir z = L:

$$\Psi(x, y, L, t) = \Psi_L(x, y, L, t) \tag{102}$$

(c) En segundo lugar, está la condición de borde dada por el componente vertical de la ley de Darcy, que usualmente se usa para para modelar infiltración por lluvia o riegos por aspersión:

$$-K(\Psi)\left[\frac{\partial\Psi}{\partial z} - 1\right] = q(x, y, t) , \qquad z = 0$$
(103)

donde $q = \mathbf{V} \cdot \hat{e}_z$.

Siguiendo a Basha [1], se asume que la expresión funcional para el término S puede tener la forma:

$$S = ae^{-bz} \tag{104}$$

que modela un caso particular de la función RWU en la que existe un consumo exponencialmente decreciente, donde $a \ge b$ son parámetros empíricos. Podemos considerar este modelo como una versión mucho más simple del modelo de Vrugt [34], tal como se vio al final de la sección 3.9.

Con el fin de linealizar la ecuación (100) se aplica un caso particular de la transformación de Kirchhoff:

$$u = \frac{K(\Psi)}{K_s} = e^{\alpha \Psi} \tag{105}$$

donde α es una constante.

Según Warrick [35], Para casos no estacionarios como este, solo seráq posible linealizar la ecuación gobernante si la conductividad K está relacionada linealmente con el contenido de humedad θ , esto es:

$$\theta = cK + d \tag{106}$$

donde c, d son constantes.

Se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad \frac{T}{t} = \frac{\alpha}{4c} \qquad ; \qquad \overline{S} = \frac{S}{\alpha k_0}$$

La ecuación (100) se convierte entonces en:

$$\nabla^2 u - 2\frac{\partial u}{\partial Z} = \frac{\partial u}{\partial T} + 4\overline{S}$$
(107)

donde las condiciones iniciales y de borde transformadas quedarán expresadas como sigue:

(a) Condiciones iniciales:

$$u_i = e^{(\alpha \Psi_i)} \tag{108}$$

(b) Condición de borde de la capa freática:

$$u_L = e^{(\alpha \Psi_L)} \tag{109}$$

(c) Flux vertical prescrito:

$$-u\left[\frac{\partial\Psi}{\partial z}-1\right] = \overline{q}(x,y,t) , \qquad z = 0$$
(110)

donde $\overline{q} = q/K_s$

Con el fin de eliminar la derivada parcial u_Z y por tanto obtener la ecuación de difusión, se hace uso de la siguiente transformación:

$$u = w e^{Z - T} \tag{111}$$

Se calculan entonces las respectivas derivadas parciales para llevar a cabo dicha transformación:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(we^{Z-T} \right) = \frac{\partial w}{\partial X} e^{Z-T} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} e^{Z-T}$$
$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(we^{Z-T} \right) = \frac{\partial w}{\partial Y} e^{Z-T} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} e^{Z-T}$$
$$\frac{\partial u}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(we^{Z-T} \right) = \frac{\partial w}{\partial Z} e^{Z-T} + we^{Z-T}$$
$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(we^{Z-T} \right) = \frac{\partial w}{\partial T} e^{Z-T} - we^{Z-T}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} e^{Z-T} + 2\frac{\partial w}{\partial Z} e^{Z-T} + we^{Z-T} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} + 2\frac{\partial w}{\partial Z} + w \right) e^{Z-T}$$

Por lo tanto, se puede reescribir la ecuación (107) en la forma de la ecuación de difusión de calor no homogénea:

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial T} + 4 \,\overline{S} \, e^{T-Z} \tag{112}$$

en adelante usaremos el símbolo \triangle para el operador laplaciano (∇^2) con el fin de simplificar la notación.

Es importante también resaltar que en la ecuación (112), elsegundo término del miembro derecho, que corresponte a la función RWU transformada, ahora solo depende de coordenadas escaiales y temporales y no de la incógnita w, por tanto la ecuación es ahora completamente lineal.

Al igual que antes, se vuelven a escribir las condiciones iniciales y de borde en términos de las nuevas variables, en este caso:

(a) Condiciones iniciales:

 $\overline{\partial Z}$

$$w|_{T=0} = u_i e^{-Z} \tag{113}$$

(b) Condición de borde de la capa freática:

$$w|_{z=L} = u_w e^{T-L} \tag{114}$$

(c) Flux vertical prescrito:

$$-\frac{\partial w}{\partial z} + w \Big|_{Z=0} = 2 \,\overline{q} \, e^T \,, \qquad z = 0 \tag{115}$$

donde $\overline{q} = q/K_s$

5.3 Método de las funciones de Green

De acuerdo con el método presentado por Duffy en [11] establecemos ahora que la solución a la ecuación de difusión no homogénea puede ser expresada en términos de la función de Green, la C.I. y las C.B. prescritas.

Según lo expuesto al principiode este capítulo, el método de Green recurre a variables auxiliares denotadas con subíndice s. Así, si w es una función que depende de $X, Y, Z \ge T$, denotaremos por w_s a la función que depende de las variables auxiliares $X_s, Y_s, Z_s \ge T_s$.

Expresando la ecuación (112) en términos de las variables auxiliares, tenemos:

$$\Delta_s w_s = \frac{\partial w_s}{\partial T_s} + 4 \ \overline{S} \ e^{T_s - Z_s} \tag{116}$$

cuya respectiva ecuación de Green adjunta es:

$$\Delta_s G = -\frac{\partial G}{\partial T_s} + \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s) \tag{117}$$

donde $\triangle_s = \left(\frac{\partial}{\partial X_s}, \frac{\partial}{\partial Y_s}, \frac{\partial}{\partial Z_s}\right), \vec{R} = (X, Y, Z), \vec{R}_s = (X_s, Y_s, Z_s), G = G(\vec{R}, T; \vec{R}_s, T_s),$ $w = w(\vec{R}, T)$ y $w_s = w_s(\vec{R}_s, T_s)$. La ecuación (117) es también conocida como ecuación de función de Green adjunta (Basha, 2000).

Multiplicando la (116) por G y la (117) por w_s :

$$G\triangle_s w_s = G \frac{\partial w_s}{\partial T_s} + 4 \ G \ \overline{S} \ e^{T_s - Z_s} \tag{118}$$

$$w_s \triangle_s G = -w_s \frac{\partial G}{\partial T_s} + w_s \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s)$$
(119)

Sustrayendo (118) y (119):

$$G\triangle_s w_s - w_s \triangle_s G = G \frac{\partial w_s}{\partial T_s} + w_s \frac{\partial G}{\partial T_s} + 4 \ G \ \overline{S} \ e^{T_s - Z_s} - w_s \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s)$$
(120)

$$G\triangle_s w_s - w_s \triangle_s G = \frac{\partial}{\partial T_s} [Gw_s] + 4 G \overline{S} e^{T_s - Z_s} - w_s \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s)$$
(121)

Considerando que el volumen V_s y el tiempo T_s están dados por:

$$V_s = \{(X_s, Y_s, Z_s) / -\infty < X_s < \infty \ , \ -\infty < Y_s < \infty \ , \ 0 \le Z_s < L, \}$$

 $T_s \in [0, T[$

Integramos ahora la expresión (121) sobre el volumen V_s y el tiempo T_s :

$$\int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[G \triangle_s w_s - w_s \triangle_s G \right] \, dV_s \, dT_s = \int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[\frac{\partial}{\partial T_s} \left[G w_s \right] \right] \, dV_s \, dT_s$$

$$+4 \int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[G \, \overline{S} \, e^{T_s - Z_s} \right] \, dV_s \, dT_s - \int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[w_s \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s) \right] \, dV_s \, dT_s \quad (122)$$

A continuación, se recurre a la segunda identidad de Green:

$$\int_{T_s} \int \int_{C_s} \left[G \frac{\partial w_s}{\partial n_s} - w_s \frac{\partial G}{\partial n_s} \right] \, dC_s \, dT_s = \int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[G \triangle_s w_s - w_s \triangle_s G \right] \, dV_s \, dT_s \tag{123}$$

A partir de que el flujo es vertical (drección del eje Z), hacemos $\hat{n} = \hat{Z}$. Por tanto:

$$\frac{\partial w_s}{\partial n_s} = \boldsymbol{\nabla} w_s \cdot \hat{n}_s = \boldsymbol{\nabla} w_s \cdot \hat{Z}_s = \frac{\partial w_s}{\partial Z_s} \tag{124}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_s} = \boldsymbol{\nabla} G \cdot \hat{n}_s = \boldsymbol{\nabla} G \cdot \hat{Z}_s = \frac{\partial G}{\partial Z_s}$$
(125)

Además, debido a las propiedades de la función delta de Dirac, tenemos que:

$$\int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[w_s \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s) \right] \, dV_s \, dT_s = w \tag{126}$$

Aplicando los resultados del (123) al (126) en la ecuación (122), obtenemos:

$$\int_{T_s} \int \int_{C_s} \left[G \frac{\partial w_s}{\partial Z_s} - w_s \frac{\partial G}{\partial Z_s} \right] \, dC_s \, dT_s = \int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[\frac{\partial}{\partial T_s} \left[G w_s \right] \right] \, dV_s \, dT_s$$
$$+4 \int_{T_s} \int \int \int_{V_s} \left[G \, \overline{S} \, e^{T_s - Z_s} \right] \, dV_s \, dT_s - w$$
(127)

Reordenando términos, obtenemos:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \left[w_{s} \frac{\partial G}{\partial Z_{s}} - G \frac{\partial w_{s}}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=0}^{Z_{s}=L} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
$$+ \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [G w_{s}]_{T_{s}=0}^{T_{s}=T} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
$$+ 4 \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} G \overline{S} e^{T-Z} dT_{s} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
(128)

El problema de funciones de Green adjunto siempre tiene condiciones de borde homogéneas, es decir G = 0, entonces:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \left[w_s \frac{\partial G}{\partial Z_s} \right] \Big|_{Z_s=L}^{Z_s=0} dT_s \, dX_s \, dY_s$$
$$+ \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G \, w_s \right]_{T_s=0}^{T_s=T} dX_s \, dY_s \, dZ_s$$
$$+ 4 \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} G \, \overline{S} \, e^{T-Z} dT_s \, dX_s \, dY_s \, dZ_s$$
(129)

La ecuación anterior se puede también expresar como:

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \left[w_{s} \frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=0} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \left[w_{s} \frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=L} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
$$+ \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[G w_{s} \right]_{T_{s}=0}^{T_{s}=T} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
$$+ 4 \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} G \overline{S} e^{T-Z} dT_{s} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
(130)

Aplicando ahora la condición inicial (113) y las condiciones de borde (114) y (115) tenemos:

$$w = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \overline{q} e^{T} \left[\frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=0} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} u_{w} e^{T-L} \left[\frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=L} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
$$+ \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{i} e^{-Z} \left[G \right]_{T_{s}=0}^{T_{s}=T} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
$$+ 4 \int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} G \overline{S} e^{T-Z} dT_{s} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
(131)

Ahora, es posible regresar a la variable u multiplicando toda la ecuación por el factor e^{Z-T} , esto es:

$$we^{Z-T} = u = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \overline{q} e^{Z} \left[\frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=0} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} u_{w} e^{Z-L} \left[\frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=L} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$

$$+\int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{i} e^{-T} [G]_{T_{s}=0}^{T_{s}=T} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$

$$+4\int_{0}^{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} G \overline{S} e^{T-Z} dT_{s} dX_{s} dY_{s} dZ_{s}$$
(132)

Esta última expresión, conformada por la suma de cuatro términos se puede expresar de forma más sencilla como:

$$u = u_{bc} + u_{wt} + u_{ic} + u_{sf} \tag{133}$$

donde:

$$u_{bc} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \overline{q} e^{Z} \left[\frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=0} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
(134)

$$u_{wt} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} u_{w} e^{Z-L} \left[\frac{\partial G}{\partial Z_{s}} \right] \Big|_{Z_{s}=L} dT_{s} dX_{s} dY_{s}$$
(135)

$$u_{ic} = \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_i e^{-T} \left[G\right]_{T_s=0}^{T_s=T} dX_s \, dY_s \, dZ_s \tag{136}$$

$$u_{sf} = 4 \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T G \,\overline{S} \, e^{T-Z} dT_s \, dX_s \, dY_s \, dZ_s \tag{137}$$

Según nos indica Basha [1] los resultados desde la ecuación (134) hasta la (137) se interpretan de la forma que sigue:

- u_{bc} es la contribución del potencial transformado debido a las condiciones de borde en la superficie del suelo.
- u_{wt} es la contribución del potencial transformado debido a las condiciones de borde debido a la capa freática.
- u_{ic} es la contribución del potencial transformado debido a las condiciones iniciales.
- u_{sf} es la contribución del potencial transformado debido a la función de extracción agua-raíz

5.4 Algoritmo para el método de funciones de Green

Según lo visto hasta ahora, el método se puede resumir mediante el siguiente algoritmo:

- **Paso 1:** se aplica la transformación de Kirchhoff y se introducen variables adimensionales en el PVF original, con el fin de expresar el problema original en términos del potencial de flujo matricial u.
- Paso 2: se aplica la transformación $u = we^{Z-T}$ que simplifica la ecuación diferencial eliminando una de sus derivadas parciales
- **Paso 3:** la EDP obtenida en el paso 2 (116) se multiplica por la función de Green G, obteniéndose (118).
- **Paso 4:** la ecuación de Green adjunta (117) se multiplica por la función *w* obteniéndose la ecuación (119).
- Paso 5: se sustraen las ecuaciones (118) y (119), obteniéndose así la ecuación (121), que se debe integrar en torno al dominio definido por las condiciones de borde del PVF.
- Paso 6: reduciendo y reordenando los términos se obtiene (131). Este resultado de multiplica por el factor e^{Z-T} con el fin de regresar a la variable u. Se obtiene entonces una expresión en la que se ha despejado el potencial de flujo matricial u en términos de una suma de términos integro-diferenciales.

5.5 Caso particular 3: flujo bidimensional

Problema de Green adjunto

Para obtener una solución particular mediante el método de las funciones de Green será necesario previamente resolver el problema de Green adjunto (117) correspondiente. Para el caso más genral (tres variables espaciales y el tiempo), el problema de Green adjunto se expresa:

$$\Delta_s G = -\frac{\partial G}{\partial T_s} + \delta(T - T_s, \vec{R} - \vec{R}_s)$$

sin embargo, en un caso más simple (una variable espacial y el tiempo), la ecuación estará dada por:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Z_s^2} + \frac{\partial G}{\partial T_s} = \delta(T - T_s, Z - Z_s) \tag{138}$$

Las condiciones inicial y de borde de un problema de Green adjunto, son las mismas condiciones del problema original, es decir, las condiciones (113), (114) y (115), pero en este caso se consideran siempre homogéneas y se sustituye la función original w por la función de Green G, resultando así:

• Condición inicial:

$$G(Z_s; 0) = 0$$
 (139)

• Condición de borde de la capa freática:

$$G(L;Ts) = 0 \tag{140}$$

• Condición de borde dada por el componente vertical de la ley de Darcy:

$$\left[-\frac{\partial G}{\partial Z_s} + G\right] = 0 , \qquad z = 0$$
(141)

En lo que sigue resultará útil reescribir la ecuación (138) aplicando la propiedad (194) de la delta de Dirac:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Z_s^2} + \frac{\partial G}{\partial T_s} = \delta(T - T_s) \ \delta(Z - Z_s) \tag{142}$$

Definiendo $\overline{T} = T - T_s$ y $\overline{G} = \mathcal{L} \{G\}$, donde \mathcal{L} es la transformada de Laplace, se aplica dicha transformada en la EDP (142) y en cada una de sus condiciones, obteniéndose:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Z_s^2} + \frac{\partial G}{\partial T_s} = \delta(\overline{T}) \ \delta(Z - Z_s) \tag{143}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial Z_s^2} + s \ \overline{G} = 1 \cdot \delta(\vec{Z} - \vec{Z}_s) \tag{144}$$

• Condición de borde de la capa freática:

$$\overline{G}(L;Ts) = 0 \tag{145}$$

• Flux vertical dado por la ley de Darcy:

$$\left[-\frac{\partial \overline{G}}{\partial Z_s} + \overline{G}\right] = 0 , \qquad z = 0$$
(146)

A continuación, se puede resolver la ecuación (144) mediante el método de expansión por eigenfunciones. Siguiendo el procedimiento de Beck [3], se debe proponer una forma de serie para la función de Green y para la delta de Dirac, respectivamente dadas por:

$$\overline{G}(Z, Z_s) = \sum_m D_m \frac{\phi_m^*(Z_s)\phi_m(Z)}{N_m}$$
(147)

$$\delta(Z - Z_s) = \sum_m \frac{\phi_m^*(Z_s)\phi_m(Z)}{N_m} \tag{148}$$

donde D_m es un parámetro por determinar, ϕ_m es un conjunto de eigenfunciones y N_m a la norma. Las eigenfunciones y eigenvalores a escoger dependen del tipo de condiciones de borde del cada problema. En este PVF en particular, se observa que se tiene una condición de borde de primer tipo (145) y una condición de borde de tercer tipo (146), así que siguiendo los resultados tabulados por Beck [3], se debe escoger la norma $N_m = L/2$ y se debe usar el conjunto de eigenfunciones:

$$\phi_m(Z) = \operatorname{sen}\left[\beta_m \left(1 - Z/L\right)\right] \tag{149}$$

donde β_m es el conjunto de eigenvalores, que se obtienen como solución de la ecuación:

$$\tan(\beta_m) = \frac{\beta_m}{L} \tag{150}$$

Por tanto, las ecuaciones (147) y (148) respectivamente, están dadas por:

$$\overline{G}(Z, Z_s) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \operatorname{sen}\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z_s}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right]$$
(151)

$$\delta(Z - Z_s) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z_s}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right]$$
(152)

Para determinar el parámetro D_m se sustituyen (151), su derivada y (153) en la ecuación (144), obteniéndose:

$$D_m = \frac{1}{s - \beta_m^2 / L^2}$$
(153)

Sustituyendo D_m en la ecuación (151) se obtiene:

$$\overline{G}(Z, Z_s) = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s - \beta_m^2 / L^2} \right] \operatorname{sen} \left[\beta_m \left(1 - \frac{Z_s}{L} \right) \right] \operatorname{sen} \left[\beta_m \left(1 - \frac{Z}{L} \right) \right]$$
(154)

Aplicando la transformada de Laplace inversa se obtiene que la solución está dada por:

$$G_{1D} = \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^2 + L^2}{\beta^2 + L^2 + L} \exp\left[-\frac{\beta_m^2 T_s}{L^2}\right] \cdot \sin\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right] \cdot \sin\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z_s}{L}\right)\right] \quad (155)$$

donde la notación G_{1D} se ha utilizado para indicar que se trata de la solución unidimensional del PVF dado de (138) a (141). Si se aplica el método de la expansión por eigenfunciones para el caso bidimensional, se obtiene que:

$$G_{2D} = \frac{G_{1D}}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(X-X_s)^2}{4T_s}\right]$$
(156)

Solución bidimensional

Al aplicar le método de las funciones de Green, se obtuvo una solución dada por la suma cuatro términos, uno de ellos, la contribución al potencial de flujo matricial debido a las condiciones de borde está dada por la expensión integro-diferencial (134):

$$u_{bc} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \overline{q} \exp(Z - T_s) \left[\frac{\partial G}{\partial Z_s} \right] \Big|_{Z_s = 0} dT_s \, dX_s \, dY_s$$

Si consideramos un problema que sólo depende de dos dimensiones espaciales X y Z, y del tiempo T, entonces (134) estará dada por:

$$u_{bc} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{T} \overline{q} \, \exp(Z - T_s) \left[\frac{\partial G_{2D}}{\partial Z_s} \right] \Big|_{Z_s = 0} \, dT_s \, dX_s \tag{157}$$

En este punto, la derivada de G_{2D} se puede obtener fácilmente a partir de (155) y (156), de donde se obtiene:

$$\frac{\partial G_{2D}}{\partial Z_s} = -\frac{1}{L^2 \sqrt{\pi \tau}} \exp\left[-\frac{(X - X_s)^2}{4T_s}\right].$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m (\beta_m^2 + L^2)}{\beta_m^2 + L^2 + L} \exp\left[-\frac{\beta_m^2 T_s}{L^2}\right] \cdot \sin\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right] \cdot \cos\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z_s}{L}\right)\right]$$
(158)

Evaluando (158) en $Z_s = 0$:

m

$$\left[\frac{\partial G_{2D}}{\partial Z_s}\right]\Big|_{Z_s=0} = -\frac{1}{L^2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(X-X_s)^2}{4T_s}\right].$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m(\beta_m^2+L^2)}{\beta_m^2+L^2+L} \exp\left[-\frac{\beta_m^2T_s}{L^2}\right] \cdot \sin\left[\beta_m\left(1-\frac{Z}{L}\right)\right] \cdot \cos(\beta_m) \tag{159}$$

Si se sustituye (159) en la ecuación (157), y se considera una tasa de infiltración $\overline{q} = \overline{q}_0$ constante, entonces se tiene que:

$$u_{bc} = 2\overline{q}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \frac{1}{L^2 \sqrt{\pi T_s}} \exp(Z - T_s) \exp\left[-\frac{(X - X_s)^2}{4T_s}\right].$$
$$\sum_{m=1}^\infty \frac{\beta_m (\beta_m^2 + L^2)}{\beta_m^2 + L^2 + L} \exp\left[-\frac{\beta_m^2 T_s}{L^2}\right] \cdot \sin\left[\beta_m \left(1 - \frac{Z}{L}\right)\right] \cdot \cos(\beta_m) dT_s \, dX_s \tag{160}$$

Reordenando los términos de (160) e introduciendo el cambio $\lambda_m = 1 + \beta_m^2/L^2$, se obtiene:

$$u_{bc} = 2\overline{q}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\pi T_s}} \exp\left[-\frac{(X-X_s)^2}{4T_s}\right].$$
$$\sum_{m=1}^\infty \beta_m \cos(\beta_m) \, \exp(Z) \frac{\sin\left[\beta_m \left(1-Z/L\right)\right]}{\beta_m^2 + L^2 + L} \, \lambda_m \exp\left[-\lambda_m T_s\right] dT_s \, dX_s \tag{161}$$

Con el fin de abreviar la extensión del resultado (161), se considerará la siguiente notación:

$$f_{1m}(Z) = \beta_m \cos(\beta_m) \exp(Z) \frac{\sin[\beta_m (1 - Z/L)]}{\beta^2 + L^2 + L}$$
(162)

Resultando entonces:

$$u_{bc} = 2\bar{q}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{\pi T_s}} \exp\left[-\frac{(X - X_s)^2}{4T_s}\right] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(Z) \ \lambda_m \exp\left[-\lambda_m T_s\right] dT_s \ dX_s \ (163)$$

Si las condiciones de borde están dadas por un rectángulo finito delimitado por $|X| \leq X_0$, tal como en la figura 17, entonces resolviendo las integrales en (163), se obtiene finalmente un resultado analítico para este caso particular, expresado por:

$$u_{bc} = -2\bar{q}_0 \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(Z) \left[f_{2m}(X, X_0, T) - f_{2m}(X, -X_0, T) \right]$$
(164)

donde $f_{2m}(X, X_s, T)$ está dada por:

$$f_{2m}(X, X_s, T) = \left[\exp(-\lambda_m T) erf\left(\frac{|X - X_s|}{\sqrt{4T}}\right) - 1 + \frac{1}{2} exp(-\sqrt{\lambda_m}|X - X_s|) erfc\left(\frac{|X - X_s|}{\sqrt{4T}} - \sqrt{\lambda_m}T\right) + \frac{1}{2} exp(+\sqrt{\lambda_m}|X - X_s|) erfc\left(\frac{|X - X_s|}{\sqrt{4T}} + \sqrt{\lambda_m}T\right) \right) \right]$$

$$\cdot sign(X - X_s)$$
(165)

En la expresión (165), las notaciones erf, erfc y sign corresponden a las funciones "error", "error complementario" y "signo" respectivamente, cuyas definiciones se pueden encontrar en las expresiones (187), (188) y (189) del anexo.

6 Experimentos computacionales

A lo largo de este estudio se han mostrado dos métodos analíticos para resolver la ecuación de Richards en presencia de un término sumidero no lineal, que corresponden al método de cuasi-linealización y al método de funciones de Green. Luego, al final de las secciones 4 y 5 se expusieron soluciones particulares para cada método.

El objetivo principal de esta sección, es exponer gráficos de las soluciones particulares obtenidas a través de ambos métodos, experimentar con diferentes valores en los parámetros de dichas soluciones, comparar la interacción entre parejas de parámetros presentes en estas soluciones y analizar los resultados de los gráficos de estos experimentos.

6.1 Solución mediante el método de cuasilinealización

Mediante el método de cuasilinealización, fue posible encontrar una solución a la ecuación de Richards con término fuente no lineal (21). Dicha solución, dada por (59), establece que la cantidad de humedad adimensional está dada por:

$$\Theta = \frac{1}{m} ln[1 + (e^m - 1)u]$$

donde el potencial de flujo matricial u debe satisfacer $u = \exp(At)\Phi(\mathbf{r})$, siendo la función $\Phi(\mathbf{r})$ solución del PVF constituido por la EDP (55) y cuyas condiciones iniciales y de borde dependerán del contexto específico que se desea estudiar.

En el capítulo 4 se mostró que a partir del método de cuasilinealización, la función RWU $S(\Theta)$ está dada por (ver ecuación (60)):

$$S(\Theta) = -\left[\frac{\kappa}{e^m - 1}\left(e^{m\Theta} - 1\right) + \frac{A}{m}\left(1 - e^{-m\Theta}\right)\right]$$

donde m, $A \neq \kappa$ son parámetros que están sujetos a las siguientes restricciones:

$$A < 0$$
 , $m > 0$, $|\kappa| < \frac{-A}{m}e^{-m}(1 - e^{-m})$ (166)

Según se ha visto, la función adimensional RWU:

$$S: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$$

representa el consumo de agua por parte de la raíz de la planta. Para diferentes valores de $m, A \ge \kappa$, esta función RWU presenta comportamientos cualitativamente similares, lo que se puede apreciar más claramente en la figura 6, en la que se comparan las curvas de 6 casos diferentes de la función (60). Dichos casos se listan con mayores detalles en el cuadro 5. Con respecto a este punto es importante mencionar que los casos 1, 2 y 3 son los mismos casos revisados por Broadbridge [5], mientras que los casos 4, 5 y 6 son casos adicionales agregados en esta investigación.

Función RWU	m	A	κ
Caso 1	3	$-2,10 \times 10^{-3}$	$-3,31 \times 10^{-5}$
Caso 2	5	$-3,50 imes10^{-3}$	$-4{,}68\times10^{-6}$
Caso 3	10	$-7{,}00\times10^{-3}$	$-3,\!10\times10^{-8}$
Caso 4	11	$-7,70 \times 10^{-3}$	$-1,00 \times 10^{-9}$
Caso 5	4	$-2,84 \times 10^{-3}$	$-4,00 \times 10^{-6}$
Caso 6	7	$-4{,}90\times10^{-3}$	$-4,00 \times 10^{-7}$

Cuadro 5: casos particulares para la función RWU dada por (60)



Figura 6: Comparación de funciones RWU. Los casos 1,2 y 3 son los presentados por Broadbridge [5], mientras que los casos 4, 5 y 6 son de elección propia.

Problema de valores en la frontera

A continuación, se mostrará la resolución un caso específico de la ecuación de Richards con término fuente no lineal mediante el método de cuasilinealización. En primer lugar, es importante mencionar que para este caso en particular, se trabajará con la variante bidimensional de la ecuación (21), dada por:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

Aplicando el método de cuasilinealización, es posible reducir esta ecuacióna una ecuación de Kirchhoff-Helmholtz (55). En un contexto en el que el suelo posee flujos de irrigación periódica, el sistema está representado por el PVF dado en las ecuaciones (72) y (73) según fue explicado en la sección 4.5:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} - \Phi_z + \kappa \Phi = 0$$

$$C.B. \begin{cases} V \cdot \hat{e_z} = F_0 e^{At} ; \ z = 0 , \ 0 \le x < x_0 \\ V \cdot \hat{e_z} = 0 ; \ z = 0 , \ x_0 \le x \le l \end{cases}$$

Para efectos de los siguientes cálculos, se considerará la constante $F_0 = 2.3605$.

El PVF dado por (72) y (73) tiene como solución:

$$\Theta = \frac{1}{m} ln[1 + (e^m - 1)\exp(At)\Phi(x, z)]$$

en donde:

$$\Phi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}}$$

Los resultados y gráficos que se muestran a continuación consideran el caso 4 del cuadro 5 y un valor de n = 100 para serie de la función Φ .



el tiempo (adimensional) t = 0.

Figura 7: curvas de nivel de la función Θ en Figura 8: curvas de nivel de la función Θ en el tiempo (adimensional) t = 100.



Figura 9: curvas de nivel de la función Θ en Figura 10: curvas de nivel de la función Θ en el tiempo (adimensional) t = 1000.

el tiempo (adimensional) t = 5000.

Tal como se ha señalado anteriormente, la variable Θ representa el contenido de humedad (adimensional) en los poros de la zona insaturada, por lo tanto sus valores oscilan entre 0 y 1, donde $\Theta = 0$ representa poros vacíos y $\Theta = 1$ poros llenos.

Desde la figura 7 hasta la 10 se puede apreciar la disminución de contenido de humedad a través del tiempo debido al consumo de agua por parte de la raíz de la planta. En estos gráficos de contorno, cada curva representa una ubicación espacial en el plano xz donde el contenido de humedad se mantiene constante.

En el instante inicial t = 0, donde t es el tiempo adimensional, las curvas tienen valores muy cercanos a 1, es decir, están prácticamente llenos de agua. En las figuras 8 y 9 se observa una evidente disminución del contenido humedad. En particular se observa que en el instante t = 1000 los poros ya sólo poseen alrededor de un 25 % de humedad. Finalmente, se observa que en t = 5000 todas las curvas muestran valores muy cercanos a 0, es decir,los poros ya están prácticamente vacíos, ya sea por el flujo vertical del agua debio a la gravedad, o bien por el consumo de agua por parte de la raíz.

Gráficos para valores de z fijos

Los siguientes gráficos muestran el comportamiento de la solución de este PVF en diferentes valores de altura z fijos dentro del medio poroso.



z = 0, 1.

Figura 11: curvas de nivel de la función Θ en Figura 12: curvas de nivel de la función Θ en z = 0,3.



Figura 13: curvas de nivel de la función Θ en Figura 14: curvas de nivel de la función Θ en z = 0, 4.

z = 0,9.

Gráficos para valores de m y z fijos

Los siguientes gráficos muestran el comportamiento de la solución de este PVF en diferentes valores de altura z y valores del parámetro m fijos dentro del medio poroso.



z = 0,3.

Figura 15: curvas de nivel de la función Θ en Figura 16: curvas de nivel de la función Θ en z = 0,7.

6.2 Solución mediante el método de funciones de Green

Problema de valores en la frontera

Al igual que en la sección 6.1, en este caso se comienza considerando la ecuación de Richards bidimensional con presencia de un término fuente no lineal, dado por (21):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + S = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

Las condiciones iniciales y de borde son similares a las presentadas en (101), (102) y (103), pero expresadas en su forma bidimensional:

(a) Condiciones iniciales:

$$\Psi(x, z, 0) = \Psi_i(x, z)$$

para todo el dominio en t = 0.

(b) Condición de borde dada por la carga de presión al nivel de la capa freática, es decirz = L:

$$\Psi(x, L, t) = \Psi_L(x, L, t)$$

(c) Condición de borde dada por un flujo vertical inicial constante:

$$q(x,t) = K_s \,\overline{q}_0 \,, \qquad z = 0$$



Figura 17: rectángulo finito que representa el dominio del PVF. Está delimitado por $|X| \le X_0$ y $0 \le Z \le L$. Presenta un flujo inicial constante \overline{q}_0

En la sección 5.2 se resolvió la ecuación de Richards con término sumidero no lineal mediante el método de las funciones de Green, obteniéndose así una solución para u en términos de una formulación integro-diferencial, cuya suma de términos, anotamos como:

$$u = u_{bc} + u_{wt} + u_{ic} + u_{sf}$$

(para el significado de cada término consultar la sección 5.3)

En particular, el término u_{bc} representa aquí la contribución al potencial de flujo matricial total debido a las condiciones de borde prescritas en este problema.

La solución a este caso particular está dada por (164) y (165):

$$u_{bc} = -2\overline{q}_0 \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(Z) \left[f_{2m}(X, X_0, T) - f_{2m}(X, -X_0, T) \right]$$

donde $f_{2m}(X, X_s, T)$ está dada por:

$$f_{2m}(X, X_s, T) = \left[\exp(-\lambda_m T) erf\left(\frac{|X - X_s|}{\sqrt{4T}}\right) - 1 + \frac{1}{2} exp(-\sqrt{\lambda_m}|X - X_s|) erfc\left(\frac{|X - X_s|}{\sqrt{4T}} - \sqrt{\lambda_m}T\right) + \frac{1}{2} exp(+\sqrt{\lambda_m}|X - X_s|) erfc\left(\frac{|X - X_s|}{\sqrt{4T}} + \sqrt{\lambda_m}T\right) \right) \right]$$
$$\cdot sign(X - X_s)$$

A continuación se presenta la gráfica de la función u_{bc} en t=0:



Figura 18: gráfica de superficie de la solución para flujo bidimensional de Basha, 2000.

Figura 19: Curvas de nivel muestran el contenido de humedad Θ en el tiempo T = 0.1.

Comprobación de la convergencia de la solución

A continuación, con el fin de comprobar la convergencia de la solución particular dada por (164) y (165), se estudia la evolución de los valores del potencial de humedad u en la medida que se consideran más términos de la serie, en diferentes puntos del plano XZ.



Figura 20: valores del potencial de flujo u en un punto fijo (X, Z) para diferentes valores de m en un tiempo T = 1.

Figura 21: valores del potencial de flujo u en un punto fijo (X, Z) para diferentes valores de m en un tiempo T = 0.1.

En general, es posible apreciar que en todos los puntos evaluados, la función de potencial de flujo u converge satisfactoriamente hacia algún valor específico a medida que aumenta el valor de m, que en este caso corresponde a la cantidad de términos de la serie presente en la solución del PVF.

Gráficos para valores de z fijos

Los siguientes gráficos muestran el comportamiento de la solución obtenida mediante el método de funciones de Green en diferentes valores de altura z fijos dentro del medio poroso.



Figura 22: curvas de nivel del potencial de flujo u en z = 0,1.

Figura 23: curvas de nivel del potencial de flujo u en z = 0.5.



Figura 24: curvas de nivel del potencial de flujo u en z = 0.7.

Figura 25: curvas de nivel del potencial de flujo u en z = 0.9.

Gráficos a lo largo de los ejes X y Z

Los siguientes gráficos no están presentes en la publicación original de Basha [1], y muestran el comportamiento de la solución obtenida mediante el método de funciones de Green a lo largo de los ejes X y Z respectivamente.



Figura 26: Potencial de flujo u para valores de Figura 27: curvas de nivel del potencial de flu-Z fijos en T = 0.1. jo u a lo largo del eje Z para X = 0.

Es importante recordar que en este caso las variables X, Z y T son todas de carácter adimensional. En el gráfico de la figura 26 se puede apreciar que el potencial de humedad udisminuye en la medida nos alejamos del origen para todos los valores escogidas en Z.

Por otra parte, el gráfico de la figura 27 nos entrega el comportamiento del potencial de humedad a lo largo del eje Z. Siguiente a Basha [1] se ha experimentado con los tiempos adimensionales T = 0.1 y T = 1. En ambos casos se aprecia una relación que el potencial de flujo disminuye rápidamente en la medida que avanzamos hacia la capa freática.

7 Discusión y conclusiones

A lo largo de esta investigación, ha sido posible comparar los métodos de cuasi-linealización y de funciones de Green, así como también el rol de la función RWU en sus respectivas soluciones.

La función RWU, añade un componente extra de no linealidad a una ecuación que de por sí ya posee términos no lineales como la condutividad y difusividad. Esta no es la única complejidad a considerar, dado que a día de hoy no existe un función que represente de forma general el sistema suelo-raíz y su interacción con un medio poroso. Más que una limitación matemática, este tópico constituye un problema físico debido a que naturalmente es esperable que el comportamiento de esta función cambie debido a factores tan diversos como lo son el tipo de suelo, el clima predominante e incluso la especie de planta a estudiar.

Al resolver la ecuación de Richards en presencia de un término sumidero no lineal mediante el método de cuasi-linealización, si bien fue posible obtener una solución analítica, es importante resaltar que dicha solución está sujeta a restricciones para la conductividad K, difusividad D y el término S, estableciendo una forma muy específica para la función RWU dada por (60), dicha forma es consecuencia directa de la ley constitutiva (56).

Por otro lado, al aplicar el método de funciones de Green, es posible obtener una solución analítica en términos de una expresión integro-diferencial. Sin embargo, es importante resaltar que el método de funciones de Green sólo puede aplicarse para resolver ecuaciones de difusión no homogéneas. Esto supone una desventaja en el método de Green si lo que se desea es obtener una solución analítica lo más general posible para esta ecuación, dado que para reducir la ecuación de Richards con término sumidero a una ecuación de difusión es necesario imponer ciertas restricciones (como las relaciones (104) y (106) por ejemplo) que hacen perder generalidad en la solución desde el principio de la aplicación del método.

Según lo visto, ambos métodos presentan también algunas similitudes, como lo es el aplicar ciertas variantes de la transformación de Kirchhoff para expresar la ecuación gobernante en términos del potencial de flujo matricial u. En ambas se recurre a la adimensionalización de variables y en ambas se aplica el modelo de suelos de Gardner que permite relacionar algebraicamente la difusividad, conductividad y potencial de presión.

En general, en ambos métodos se aprecia que el principal obstáculo para llegar a soluciones mediante métodos analíticos en la ecuación de Richards con término sumidero, radica en la elevada no linealidad de sus principales componentes como lo son las tres funciones K, D y S. Esto decanta en que sea necesario aplicar una gran cantidad de restricciones a lo largo del desarrollo de cada método y por consiguiente, se pierde generalidad en la solución. Sin embargo, a pesar de las desventajas propias de cada método, es evidente que ambas son herramientas poderosas en la resolución de esta ecuación y constituyen también un avance importante en la aproximación hacia nuevos métodos menos restrictivos en investigaciones futuras.

8 Bibliografía

- [1] BASHA, H. A. (2000). Multidimensional linearized nonsteady infiltration toward a shallow water table. *Water Resources Research*, 36(9), 2567–2573.
- [2] BASHA, H. A. (1999). Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface. Water Resources Research, 35(1), 75–83.
- [3] BECK, J. V., K. D. COLE, A. HAJI-SHEIKH & B. LITKOUHI (1992) Heat Conduction Using Green's Functions, Hemisphere, Bristol, Pa.
- [4] BIRD R. (2006) Transport phenomena. México: Limusa Wiley. ISBN 968-18-6365-8
- [5] BROADBRIDGE, P., DALY, E. & GOARD, J.(2017). Exact solutions of the Richards equation with nonlinear plant-root extraction. *Water Resources Research*, 53, 9679-9691.
- [6] BUCKINGHAM E. (1907) Studies on the movement of soil moisture. Bull. 38. USDA, Bureau of Soils, Washington D.C.
- [7] CARIAGA, E., VÁSQUEZ, L., JEREZ, J. ET AL. (2019). A Numerical Simulation Model for Highbush Blueberry Under Drought Stress. J Soil Sci Plant Nutr 19, 98–107.
- [8] DARBY, R. (1996). Chemical engineering fluid mechanics, Marcel Dekker, inc. pág. 391.
- [9] DARCY, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris: Dalmont
- [10] DELLEUR J. (1999) The handbook of groundwater engineering. CRC Press LLC. ISBN 3-540-64745-7
- [11] DUFFY, DEAN G. (2001) Green's functions with applications / Dean Duffy p. cm. (Studies in advanced mathematics). ISBN 1-58488-110-0
- [12] FEDDES, R. A., KOWALIK, P., KOLINSKA-MALINKA, K., & ZARADNY, H. (1976). Simulation of field water uptake by plants using a soil water dependent root extraction function. *Journal of Hydrology*, 31(1-2), 13–26.
- [13] GARDNER, W. R. (1958). Some steady-state solutions of the unsatured moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Science*, 85(4), 228–232.
- [14] GOARD, J., & BROADBRIDGE, P. (1996). Nonclassical symmetry analysis of nonlinear reaction-diffusion equations in two spatial dimensions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 26(4), 735–754.
- [15] GOVINDRAJU, R.S. & KAVVAS, M.L. (1993) Development of an approximate model for unsaturated flow with root water uptake under rectangular water content profiles assumption. J. Hydrol. 146, 321-339
- [16] GRADSHTEYN I. S. & RYZHIK I. M. (2014) Table of Integrals, Series and Products. Burlington, MA: Academis Press.

- [17] JANZ, T.C. & STONIER, R.J. (1995) Modeling water flow in cropped soils: water uptake by plant roots. *Environ. Int.* 21, 705-709
- [18] JARVIS, N.J. (1989) A simple empirical model for root water uptake. J. Hydrol. 107, 57-72
- [19] JINQUAN W., RENDUO, Z. & SHENGXIANG, G. (1999) Modeling soil water movement with water uptake by roots. J. Plant Soil 215, 7-17
- [20] KUMAR, R., JAT, M. K., & SHANKAR, V. (2013). Evaluation of modeling of water ecohydrologic dynamics in soil-root system, *Ecological Modelling*, 269, 51–60.
- [21] LAI C.T. & KATUL, G. (2000) The dynamic role of root water uptake in coupling potential to actual transpiration. Adv. *Water Resour.* 23, 427-439
- [22] LI K.Y., BOISVERT, J.B & JONG, R.D. (1999) An exponential root-water-uptake model with water stress compensation. J. Hydrol. 252, 189-204
- [23] MOLZ, F.J. (1981) Models of water transport in soil plant system: a review. Water Resour. Res. 17, 1245-1260
- [24] MYINT-U T. & DEBNATH L. (2007) Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Fourth Edition, Birkhäuser. ISBN-10: 0-8176-4393-1
- [25] OJHA C.S.P. & RAI A.K. (1996) Non linear root water uptake model. J. Irrig. Drain. Eng. (ASCE) 122, 198-202
- [26] PERROCHET, P. (1987) Water uptake by plant roots a simulation model. I. Conceptual model. J. Hydrol. 95, 55-61
- [27] PHILIP, J. R. (1969). Hydrostatics and hydrodynamics in swelling soils. Water Resources Research, 5(5), 1070–1077.
- [28] PRASAD, R. (1988) A linear root water uptake model. J. Hydrol. 99, 297-306
- [29] RICHARDS L. A. (1931). Capillary conduction of liquids trough porous mediums. Physics, 1(5), 318–333.
- [30] RITZEMA, H.P. (1994). Drainage Principles and Applications. International Institute for Land Reclamation and Improvement (ILRI), Publication 16, second revised edition, Wageningen, The Netherlands, ISBN 90 70754 3 39
- [31] SOLEKHUDIN, I., & ANG, K.-C. (2012). A DRBEM with a predictor-corrector scheme for steady infiltration from periodic channels with root-water uptake. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(8), 1199–1204.
- [32] SOLEKHUDIN, I., & ANG, K.-C. (2015). A Laplace transform DRBEM with a predictor-corrector scheme for time-dependent infiltration from periodic channels with rootwater uptake. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50, 141–147.
- [33] VAN GENUCHTEN, M. T. (1980). A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. Soil Science Society of America Journal, 44(5), 892.

- [34] VRUGT J. A., VAN WIJK M. T., HOPMANS, J. W., & ŠIMUNEK, J. (2001). One-, two-, and three-dimensional root water uptake functions for transient modeling. *Water Resources Research*, 37(10), 2457–2470.
- [35] WARRICK, A. W., Time-dependent linearized infiltration, I, Point sources, Soil Sci. Soc. Am. J. 38, 383-386, 1974
9 Anexos

A continuación se presentan secciones anexas de diferentes tópicos. En 8.1 se presenta el método DRBEM, en 8.2 se presentan los códigos implementados en el entorno Octave para los experimentos del capítulo 6, y en el 8.3 se presentan funciones importantes utilizadas en diferentes secciones.

9.1 Solución analítica mediante el método DRBEM

En esta sección se presenta el método de solución propuesto por Solekhudin I. y Aang KC. el año 2015 [32]. Si bien este método entrega soluciones de carácter numérico, se ha añadido a la sección de anexos dada la similitud que posee con respecto a los otros dos métodos estudiados en los capítulos 4 y 5.

Reducción a una ecuación de Helmholtz modificada

En este método se comienza desde un problema modelado a través de la ecuación de Richards bidimensional, no estacionaria y con la presencia de un término RWU no lineal. La idea central es reducir la ecuación gobernante, mediante determinadas transformaciones, a una ecuación de Helmholtz modificada. Dicha ecuación será reescrita en su formulación integro-diferencial para posteriormente aplicar el método de elementos de frontera de reciprocidad dual (Dual reciprocity boundary elements method, o DRBEM por sus siglas en inglés).

Tal como se vio en la sección 4, la ecuación de Richards esta dada por:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + S(\vec{r}, \Psi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}$$

La ecuación gobernante en este problema es la ecuación de infiltración dependiente del tiempo bidimensional con consumo agua-raíz, por tanto se omitirá la variable y, resultando:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\theta) \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} - S(x, z, \Psi)$$
(167)

que se trata de la ecuación de Richards bidimensional con término fuente dependiente del tiempo. Donde K es la conductividad hidráulica, θ corresponde al contenido de humedad, Ψ es el potencial de succión y R representa a la función de consumo agua-raíz.

La función de consumo agua-raíz, S, es:

$$S(x, z, \Psi) = \gamma(\Psi) \frac{L_t \beta(x, z) T_{pot}}{\int_0^{z_m} \int_{L+D-x_m}^{L+D} \beta(x, z) dx dz}$$
(168)

donde γ es la función adimensional de respuesta al estrés de agua, L_t es el ancho de la superficie del suelo asociada con la tasa de transpiración, T_{pot} es el potencial de transpiración

y β : distribución espacial de consumo agua-raíz.

Además, se tiene que β está dada por:

$$\beta(x,z) = \left(1 - \frac{L+D-x}{x_m}\right) \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) e^{-H}$$
(169)

para $L+D-x_m \leq x \leq L+D$, $0 \leq z \leq z_m$

Se aplica la transformación de Kirchhoff, la que permite reescribir la ecuación original en términos del potencial de flujo matricial:

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\Psi} K(\overline{\Psi}) \ d\overline{\Psi}$$

Combinando esta tranformación con el modelo de suelos de Gardner (Gardner, 1958), en el que $K = K_s e^{\alpha \Psi}$ y resolviendo la integral, sigue que:

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\Psi} K_s e^{\alpha \overline{\Psi}} d\overline{\Psi}$$
$$\Theta = \frac{1}{\alpha} K_s e^{\alpha \Psi} = \frac{1}{\alpha} K(\Psi)$$
(170)

Resulta fácil comprobar que despejando Ψ de esta última expresión se obtiene:

$$\Psi = \frac{1}{\alpha} ln \left(\frac{\alpha \Theta}{K_s} \right)$$

A partir de (170), obtenemos una relación entre la conductividad y eñ potencial de flujo matricial. Esta es:

$$K(\Theta) = \alpha \Theta$$

Además, se observa que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = \frac{1}{\alpha \Theta} = \frac{1}{K} \tag{171}$$

Los dos resultados anteriores permitirán calcular con mayor facilidad las respectivas derivadas parciales del potencial de humedad Ψ y de la conductividad K. Dichos resultados son:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{1}{K} \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{K} \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$
$$\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial K}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

Para reescribir la derivada temporal (167) en términos del potencial de flujo matricial se recurre a la regla de la cadena y se aplica la ya conocida formulación de Darcy-Buckingham (13), en donde:

$$D(\theta) = K \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$$

Sin embargo, a partir de (171), se tiene que:

$$D(\theta) = \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \Longrightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = \frac{1}{D(\Theta)}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{D(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación gobernante (167) obtenemos:

$$\begin{split} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} - S(x, z, \Psi) \\ & \frac{1}{D(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z} - S(x, z, \Psi) \end{split}$$

donde $D(\Theta)$ corresponde a la difusividad. En determinados casos, donde la variacón del contenido de humedad es pequeña, tal como en la irrigación de alta frecuencia, la difusividad puede ser asumida como una constante d [32]. Esta suposición resulta bastante útil, pues permitirá sortear la no linealidad del primer término, por lo que ahora tenemos:

$$\frac{1}{d}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial\Theta}{\partial z} - S(x, z, \Psi)$$
(172)

Se introducen ahora la siguientes variables adimensionales:

$$\frac{X}{x} = \frac{Z}{z} = \frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad \frac{T}{t} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 d \qquad ; \qquad \Phi = \frac{\pi}{v_0 L} \Theta$$

Las respectivas derivadas parciales para las nuevas variables adimensionales estarán dadas por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{2}{\alpha} \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \frac{4}{\alpha^2} \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{2}{\alpha} \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = \frac{4}{\alpha^2} \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial T} = \frac{4}{\alpha^2 d} \frac{\pi}{v_0 L} \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

Entonces, multiplicando la ecuación (172) por el factor $(4\pi)/(\alpha^2 dv_0 L)$, se obtiene:

$$\frac{4\pi}{\alpha^2 dv_0 L} \frac{1}{d} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{4\pi}{\alpha^2 dv_0 L} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{4\pi}{\alpha^2 dv_0 L} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{\alpha^2 dv_0 L} \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{4\pi}{\alpha^2 dv_0 L} S(x, z, \Psi)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} - 2\frac{\partial \Phi}{\partial Z} - \gamma^*(\Phi) S^*(X, Z)$$
(173)

donde:

$$\gamma^*(\Phi) = \gamma\left(\frac{1}{\alpha} ln\left(\frac{\alpha v_0 L\Phi}{\pi K_s}\right)\right)$$

у

$$S^{*}(X,Z) = \frac{2\pi}{\alpha L} \frac{L_{t}\beta^{*}(X,Z)}{\int_{0}^{Z_{m}} \int_{L+D-X_{m}}^{L+D} \beta^{*}(X,Z) dX dZ} \frac{T_{pot}}{v_{0}}$$

A continuación, aplicamos la siguiente transformación:

$$\Phi(x, z, t) = \phi^*(x, z, t)e^{-Z}$$
(174)

para eliminar las derivadas de primer orden. Haciendo este cambio tenemos que:

$$\begin{split} \frac{\partial \Phi}{\partial T} &= \frac{\partial \phi^*}{\partial T} e^{-Z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X} &= \frac{\partial \phi^*}{\partial X} e^{-Z} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial X^2} e^{-Z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial Z} &= \frac{\partial \phi^*}{\partial Z} e^{-Z} + \phi^* e^{-Z} \Longrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial Z^2} e^{-Z} + 2\frac{\partial \phi^*}{\partial Z} e^{-Z} + \phi^* e^{-Z} \end{split}$$

Entonces, la ecuación (173) se convierte en:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial T} e^{-Z} = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial X^2} e^{-Z} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial Z^2} e^{-Z} + 2\frac{\partial \phi}{\partial Z} e^{-Z} + \phi e^{-Z} 2\frac{\partial \phi^*}{\partial Z} e^{-Z} - 2\phi^* e^{-Z} - \gamma^*(\Phi) S^*(X, Z)$$
$$\frac{\partial \phi^*}{\partial T} = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial Z^2} - \phi^* - \gamma^*(\Phi) S^*(X, Z) * e^{-Z}$$
(175)

donde (175) es la ecuación de Helmholtz modificada.

Formulación integro-diferencial

Como se ha visto, al aplicar las transformaciones correspondientes, se logró reducir la ecuación gobernante a la la ecuación de Helmholtz modificada. Reordenando lso términos de (175), tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi^*(X, Z, T) = \phi^*(X, Z, T) + \gamma^*(\phi) S^*(X, Z) \cdot e^{-Z} + \frac{\partial \phi^*}{\partial T}(X, Z, T)$$
(176)

donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$. Las condiciones de borde asociadas a este problema, se pueden reescribir en términos de la variable ϕ^* , resuntado:

(a)
$$\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \frac{2\pi}{\alpha L} e^{-Z} + \phi^* n$$
, sobre la superficie del canal.
(b) $\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = -\phi^*$, sobre el suelo fuera del canal.
(c) $\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0$; $X = 0$; $Z \ge 0$
(d) $\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0$; $X = \frac{\alpha}{2}(L+D)$; $Z \ge 0$

Con el fin de simplificar los cálculos durante el desarrollo del método de las funciones de Green, reultará útil escribir la ecuación (176) como sigue:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi^*(X, Z, T) = \rho(X, Z, T) \tag{177}$$

Es importante notar que todas las condiciones mencionadas anteriormente están relacionadas con las variables espaciales $X \neq Z$. Dado lo anterior, al aplicar el método de las funciones de Green, se utiliza una función que dependerá solamente de dichas variables espaciales y no del tiempo. Es decir:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 G(X, Z; \xi, \eta) = \delta(\xi - X, \eta - Z) \tag{178}$$

A continuación, se recurre a la segunda identidad de Green:

$$\int_{C} \left[G \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \frac{\partial G}{\partial n} \right] dl = \int \int_{R} (G \nabla^2 \phi^* - \phi^* \nabla^2 G) dA$$
(179)

donde R es la región delimitada por la frontera C, dl = dl(X,Z) y dA = dXdZ. Sustituyendo (177) y (178) en la (179), tenemos:

$$\begin{split} \int_{C} \left[G \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} - \phi^{*} \frac{\partial G}{\partial n} \right] dl &= \int \int_{R} (G\rho(X, Z, T) - \phi^{*}(X, Z, T) \ \delta(\xi - X, \eta - Z)) dA \\ \int_{C} \left[G \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} - \phi^{*} \frac{\partial G}{\partial n} \right] dl &= \int \int_{R} G\rho(X, Z, T) dA - \int \int_{R} \phi^{*}(X, Z, T) \ \delta(\xi - X, \eta - Z) dA \\ \int_{C} \left[G \frac{\partial \phi^{*}}{\partial n} - \phi^{*} \frac{\partial G}{\partial n} \right] dl &= \int \int_{R} G\rho(X, Z, T) dA - \lambda(\xi, \eta) \phi^{*}(\xi, \eta, T) \end{split}$$

$$\lambda(\xi,\eta)\phi^*(\xi,\eta,T) = \int \int_R G\rho(X,Z,T)dA + \int_C \left[\phi^*\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\phi^*}{\partial n}\right]dl$$

Sustituyendo ahora $\rho(X, Z, T)$ por su expresión original:

$$\lambda(\xi,\eta)\phi^*(\xi,\eta,T) = \int \int_R G\left[\phi^* + \gamma^*(\phi)S^*(X,Z) \cdot e^{-Z} + \frac{\partial\phi^*}{\partial T}\right] dA + \int_C \left[\phi^*\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\phi^*}{\partial n}\right] d\mu (180)$$

donde:

$$\lambda(\xi,\eta) = \begin{cases} 1 & , & (\xi,\eta) \in R \\ 1/2 & , & (\xi,\eta) \text{ está sobre una parte suave de C} \\ 0 & , & (\xi,\eta) \notin R \cup C \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\phi(X, Z, s) = \int_0^\infty e^{-sT} \phi^*(X, Z, T) dT$$
(181)

Sujeto a la C.I.:

$$\phi^*(X, Z, 0) = 0 \tag{182}$$

A partir de las propiedades de la transformada de Laplace, tenemos:

$$\mathcal{L}\{\phi^*(X,Z,T)\} = \phi(X,Z,s) \tag{183}$$

$$\mathcal{L}\{\phi_t^*(X, Z, T)\} = s\phi(X, Z, s) - \phi^*(X, Z, s) = s\phi(X, Z, s)$$
(184)

A continuación, la solución (180) queda expresada como:

$$\lambda(\xi,\eta)\phi(\xi,\eta,s) = \int \int_{R} G\left[(1+s)\phi(X,Z,s) + \frac{1}{s}\gamma^{*}(\phi)S^{*}(X,Z) \cdot e^{-Z} \right] dA$$
$$+ \int_{C} \left[\phi(X,Z,s)\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\phi(X,Z,s)}{\partial n} \right] dl$$
(185)

En (185) se ha recurrido a un esquema predictor-corrector para sortear la no linealidad de uno de los términos en el miembro derecho de la ecuación (180), esto es:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-sT} \gamma^{*}(\phi) S^{*}(X, Z) dT = \frac{1}{s} \gamma^{*}(\phi) S^{*}(X, Z)$$
(186)

A partir Solekhudin [32] de aquí se recurre al método de elementos finitos para obtener resultados de cráter numérico a partir de la expresión (186).

9.2 Códigos de los experimentos computacionales

En esta sección se presentan los códigos implementados para la construcción de cada gráfico presente en el capítulo de experimentos computacionales.

Todos los códigos que se presentan a continuación son, o bien de creación, o bien creados en colaboración con Dr. Emilio Cariaga.

Solución para un caso bidimensional

```
• Script 1:
function [sum]=Phi(x,z,n)
sum=0;
F_0=2.3605;
k=-3.31e-5;
for i=1:n
   sum=sum+(4/(i*pi))*F_0*sin(i*(pi/4))*cos(i*pi*x)*((exp(-(sqrt(1+4*(i*pi)^2-4*k)))
*(z/2)))/(1+sqrt(1+4*(i*pi)^2-4*k)));
endfor
%
endfunction
```

Este script entrega la suma de los primeros n términos de la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{n\pi}\right) F_0 \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \frac{e^{-(\sqrt{1+4(n\pi/l)^2 - 4\kappa} - 1)z/2}}{1 + \sqrt{1 + 4(n\pi/l)^2 - 4\kappa}}$$

• Script 2:

Este script entrega las gráficas de las figuras 7 hasta la 10, dependiendo el valor de t que se utilice.

```
clear all
clc
close all
F_0=2.3605;
n=1;
m=3;
x=linspace(0,1,41);
z=linspace(0,1,41);
T=zeros(41,41)
```

```
for i=1:length(x)
    for j=1:length(z)
        T(i,j)=(1/m)*log(1+(exp(m)-1)*[(F_0/4)+Phi(x(i),z(j),n)]);
    endfor
endfor
%
subplot(1,2,1)
surf(x,z,T)
subplot(1,2,2)
contour(z,x,T,15,'ShowText','on')
title('Grafica de contorno 1')
xlabel('eje x');
ylabel('eje z');
zlabel('eje \Theta');
set(gca,'xDir','normal','yDir','reverse');
```

Solución bidimensional de Basha, 2000 [1]

• Script 1: gm.m

```
function y=gm(x)
L=0.5;
y=sin(x)+L*(x.*cos(x));
end
```

Este script se usa para calcular los ceros de la ecuación

```
\sin(x) + L * \cos(x) = 0
```

dondeL =0.5

• Script 2: b.m

```
function bm=b(m)
for n=1:m
w(n)=fzero('gm',n*pi);
end
%
bm=w(1,m);
chek=gm(bm);
%
end
```

• Script 3: lm.m

function y=lm(m)
L=0.5;
y=1+(b(m).^2)/L^2;
end

Este script representa a la función:

$$y = 1 + \frac{\beta_m^2}{L^2}$$

```
• Script 4: S.m
  function [sum]=S(x,z,m)
    sum=0;
    s=0.5;
    T=0.1;
    L=0.5;
    W = 0.25;
    for i=1:m
    sum=sum+b(i)*cos(b(i))*exp(L*z).*[(sin(b(i)*(1-z)))/(b(i)^2+L^2+L)]
    .*[([exp(-lm(i)*T)*erf(abs(L*x-W)/sqrt(4*T))-1
    +0.5*exp(-sqrt(lm(i))*abs(L*x-W)).*erfc(abs(L*x-W)/sqrt(4*T)-sqrt(lm(i)*T))
    +0.5*exp(sqrt(lm(i))*abs(L*x-W)).*erfc(abs(L*x-W)/sqrt(4*T)+sqrt(lm(i)*T))]
    *sign(L*x-W))-([exp(-lm(i)*T)*erf(abs(L*x+W)/sqrt(4*T))-1
    +0.5*exp(-sqrt(lm(i))*abs(L*x+W)).*erfc(abs(L*x+W)/sqrt(4*T)-sqrt(lm(i)*T))
    +0.5*exp(sqrt(lm(i))*abs(L*x+W)).*erfc(abs(L*x+W)/sqrt(4*T)+sqrt(lm(i)*T))]
    *sign(L*x+W))];
    end
  end
```

Este script calcula la sumna de los primeros m términos de la sumatoria:

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(Z) \left[f_{2m}(X, X_0, T) - f_{2m}(X, -X_0, T) \right]$$

donde f_{2m} corresponde a la función (165).

• Script 5: GraficaGreen.m

Este script entrega la gráfica de la figura 18.

```
clear all
clc
close all
q=0.75;
m=16;
M=11;
x=linspace(0,1,M);
z=linspace(0,1,M);
U=zeros(M,M);
for i=1:length(x)
  for j=1:length(z)
    U(i,j)=-2*q*S(x(i),z(j),m)
  end
end
subplot(1,2,1)
surf(x,z,U)
subplot(1,2,2)
contour(x,z,U,6,'ShowText','on')
xlabel('eje x');
ylabel('eje z');
zlabel('eje u');
set(gca,'xDir','normal','yDir','reverse');
```

• Script 6: GraficaGreen2.m

Este script entrega la gráfica de la figura 20.

```
clear all
clc
close all
q=0.75;
x=0.5
z=0.1
M=32
m=linspace(1,M,M);
for i=1:length(m)
    u(i) = -2 * q * S(x, z, m(i))
end
x=0.5
z=0.5
for i=1:length(m)
    u2(i) = -2 * q * S(x,z,m(i))
end
x=0.5
z=0.9
for i=1:length(m)
    u3(i) = -2 * q * S(x,z,m(i))
end
plot(m,u)
hold on
plot(m,u2)
hold on
plot(m,u3)
xlabel('m');
ylabel('Eje u');
v=[1,32,0,0.7]
axis(v)
legend('(X,Z)=(0.5,0.1)','(X,Z)=(0.5,0.5)','(X,Z)=(0.5,0.9)','Location','northeast');
title('Valor u desde m=1 hasta m=32, en T=0.1')
```

• Script 7: GraficaGreen4.m

Este script entrega la gráfica de la figura 26.

```
%%Gráfica de Green 4
clear all
clc
close all
q=0.75;
m=16;
M=11;
x=linspace(0,1,M);
U=linspace(0,1,M);
V=linspace(0,1,M);
W=linspace(0,1,M);
for i=1:length(x)
    U(i)=-2*q*Sztfijo(x(i),m)
end
for i=1:length(x)
    W(i)=-2*q*Sz07t01fijo(x(i),m)
end
for i=1:length(x)
    V(i)=-2*q*Sz05t01fijo(x(i),m)
end
%Gráficas:
plot(x,U)
hold on
plot(x,W)
hold on
plot(x,V)
hold on
%Configuración de gráficas:
xlabel('x');
ylabel('u');
title('Valores de u en el eje X para valores de Z fijos');
legend('Z=0.9','Z=0.7','Z=0.5','Location','northeast');
%set(gca,'xDir','normal','yDir','reverse');
```

• Script 8: GraficaGreen4.m

Este script entrega la gráfica de la figura 27.

```
%%Gráfica de Green 5
clear all
clc
close all
q=0.75;
m=16;
M=11;
z=linspace(0,1,M);
U=linspace(0,1,M);
V=linspace(0,1,M);
W=linspace(0,1,M);
for i=1:length(z)
    U(i) = -2 * q * Sx0t01 fijo(z(i), m)
end
% for i=1:length(z)
%
      W(i) = -2*q*Sx0t05fijo(z(i),m)
% end
for i=1:length(z)
    V(i) = -2 * q * Sx0t1fijo(z(i), m)
end
%Gráficas:
plot(z,U)
hold on
% plot(z,W)
% hold on
plot(z,V)
hold on
%Configuración de gráficas:
xlabel('z');
ylabel('u');
title('Valores de u en el eje Z para valores de X fijos');
legend('T=0.1', 'T=1', 'Location', 'northeast');
set(gca,'xDir','reverse','yDir','normal');
```

9.3 Formulario

Función error

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
 (187)

Función error complemento

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-t^{2}} dt$$
 (188)

Función signo

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & , & x > 0 \\ 0 & , & x = 0 \\ -1 & , & x < 0 \end{cases}$$
(189)

Función delta de Dirac

Sea \mathbf{x} un vector de *n* dimensiones y \mathbf{x}_s un vector de *n* variables auxiliares. Entonces la delta de Dirac se define como aquella función que satisface las siguientes tres propiedades:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = 0 , \ para \ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_s \tag{190}$$

$$\int_{R_{\varepsilon}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \, d\mathbf{x} = 0 \,, \, donde \, R_{\varepsilon} : ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_s||_2 < \varepsilon \tag{191}$$

$$\int_{R} F(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{s}) \, d\mathbf{x} = F(\mathbf{x}_{s}) \tag{192}$$

donde F es una función continua arbitraria en la región R.

Es importante resaltar también que la función delta de Dirac en realidad es una distribución, y no una función en el sentido básico algebraico.

Propiedades de la función delta de Dirac

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{193}$$

$$\delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n) \tag{194}$$