UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO

Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL RENDIMIENTO DE UNA SESIÓN DE LLUVIA DE IDEAS POR ESCRITO UTILIZANDO SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Por:
Carolina Andrea Uribe Pilgún

Supervisada por:
Dr. Emilio Cariaga López

Actividad formativa equivalente (AFE), para optar al grado de Magíster en Matemáticas Aplicadas (profesional).

Temuco - 4 de julio de 2019

Dedicado a mi familia: Mi hija Rocío y a mi pareja Jean

Universidad Católica de Temuco
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias Matemáticas y Física

COMISIÓN EVALUADORA

Profesor Guía:

.....
Dr. Emilio Cariaga López

Profesor informante:

.....
Dr. Stefan Berres.

Profesor informante:

.....
Dr. Jacobo Hernández.

Ministro de fe:

.....
Dirección de Posgrado

Temuco, 10 de mayo del 2019

PERFIL DE EGRESO

Magíster en Matemáticas Aplicadas.

Universidad Católica de Temuco.

El egresado del Magíster en Matemáticas Aplicadas es un profesional posgraduado que posee la competencia de aplicar la matemática al análisis de sistemas y procesos complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte. Específicamente:

- Formula ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, en el ámbito de los fenómenos de transporte, para obtener una relación cuantitativa entre las variables relevantes del sistema.

- Resuelve ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos, utilizando técnicas numéricas y analíticas, para obtener valores cuantitativos de la variable respuesta del sistema.

- Utiliza programas computacionales en la resolución, análisis y aplicación de ecuaciones diferenciales al mejoramiento de sistemas complejos en el ámbito de los fenómenos de transporte.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a cada una de las personas que fueron parte de este proceso. Primero agradecer a Dios que me dio la fortaleza en los momentos donde sentí que no podía continuar, por darme la vida y haberme permitido llegar a esta etapa de mi vida profesional.

Además, agradecer a mi profesor guía de esta actividad formativa equivalente (AFE), Dr. Emilio Cariaga, quien me brindó dedicación, comprensión y las herramientas durante todo este proceso.

Finalmente, quiero agradecer a mis padres María y Ricardo, pues con gran esfuerzo me impulsaron y apoyaron para que sea una profesional. A mi hija Rocío, mi pareja Jean y mi suegra Leonor, quienes viven conmigo y estuvieron en los buenos y malos momentos de lo que implica un proceso de Magíster, brindándome su apoyo incondicional para seguir adelante.

ABSTRACT

In this work, the problem of numerically simulating a written brainstorming session is considered, using a mathematical model as a system of ordinary non-linear differential equations, which includes the effects of decay and accommodation of the subject. Using Octave free software as a computing environment, different scenarios are simulated and the impact of each of the aforementioned factors is evaluated. In addition, progress is made in solving the problem of estimation of parameters, which are difficult to obtain experimentally given their cognitive nature. It is concluded that the model manages to capture the dynamics of the phenomenon, at least qualitatively, as long as no more experimental data is available.

RESUMEN

En este trabajo se considera el problema de simular numéricamente una sesión de lluvia de ideas por escrito, utilizando como modelo matemático un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal, que incluye los efectos de decaimiento y acomodación del sujeto. Utilizando el software libre Octave como ambiente de cómputo, se simulan diversos escenarios y se evalúa el impacto de cada uno de los factores mencionados. Además, se avanza en la resolución del problema de estimación de parámetros los cuales son difíciles de obtener experimentalmente dada su naturaleza cognitiva. Se concluye que el modelo logra capturar la dinámica del fenómeno, al menos cualitativamente, mientras no se disponga de un mayor número de datos experimentales.

Palabras claves: lluvia de ideas, lluvia de ideas forma verbal, lluvia de ideas forma escrita, modelo no lineal, acomodación, decaimiento, estimación de parámetros.

Índice

Índice **V**

1. INTRODUCCIÓN **1**

2. OBJETIVOS **4**

3. MATERIALES Y MÉTODOS **5**
3.1. MODELO CONCEPTUAL 5
3.1.1. Creatividad 5
3.1.2. Resolución de problemas (RP) 6
3.1.3. Lluvia de ideas 8
3.1.4. Lluvia de ideas por escrito 10
3.2. MODELO MATEMÁTICO 12
3.2.1. Lluvia de ideas por escrito para dos personas 12
3.2.2. Lluvia de ideas por escrito para tres personas 14
3.2.3. Lluvia de ideas por escrito para cuatro personas 14
3.2.4. Modelo caso general 15
3.3. FORMULACIÓN PROBLEMA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS 16

4. RESULTADOS **18**
4.1. ESTUDIO NUMÉRICO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD 18
4.1.1. Análisis de sensibilidad 18
4.1.2. Evaluar el impacto de la condición inicial en el rendimiento del grupo 26
4.1.3. Evaluar el impacto del número de integrantes en el rendimiento del grupo 30
4.1.4. Evaluar el impacto de cada uno de los factores y su interacción. 35
4.1.5. Grupos con tendencias particulares 43
4.2. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS 53
4.2.1. Uso de software 53
4.2.2. Estimación de parámetros para una lluvia de ideas por escrito de tres personas . . 53
4.2.3. Problema 1: Estimar el factor de decaimiento 57
4.2.4. Problema 2: Estimar el factor de acomodación (m_i) 63
4.2.5. Problema 3: Estimar el factor de decaimiento y acomodación 69
4.2.6. Estimación de parámetros para una lluvia de ideas por escrito de cuatro personas . 74
4.2.7. Problema 1: Estimar el factor de decaimiento a_i 76
4.2.8. Problema 2: Estimar el factor de acomodación m_i 80
4.2.9. Problema 3: Estimar el factor de decaimiento y acomodación 84

5. DISCUSIÓN **89**

6. CONCLUSIONES **91**

7. BIBLIOGRAFÍA **92**

8. ANEXOS **94**

1. INTRODUCCIÓN

En diversas áreas como la publicidad, economía, educación, etc. las personas se enfrentan a situaciones problemáticas en donde deben ejecutarse procesos creativos a través de la conformación de grupos de trabajo para la toma de decisiones. Desde esta perspectiva el concepto de creatividad toma una gran relevancia. Esta se define como una habilidad propia de los seres humanos de combinar los conocimientos previos y nuevos de un individuo para dar solución a un problema dado [14]. Por otro lado, la creatividad es considerada como el motor de toda actividad humana, siendo una cualidad existente en todos los seres humanos y que puede manifestarse en menor o mayor grado entre las personas, además, es aplicable para dar solución a cualquier situación de la vida. Se afirma que la creatividad da sentido a nuestras vidas y que muchas de las cosas relevantes en la humanidad son fruto de la creatividad . Asimismo, el proceso creativo es concebido como un proceso de resolución de problemas, en el cual interfieren ciertos obstáculos, algunos de ellos son la incapacidad de cambiar las respuestas ya establecidas y los bloqueos emocionales o sociales. [16]

En consecuencia, existen diversas técnicas que estimulan la creatividad y producción de ideas en grupo. Dichas técnicas son definidas como procedimientos para estimular el potencial creativo de los participantes con la finalidad de dar solución a diversos problemas [22]. Una de ellas es la lluvia de ideas, la cual hace referencia a grupos de personas que se reúnen para interactuar entre ellos y dar solución a un problema mediante la producción de ideas creativas. Como se menciona en [12] es una de las técnicas creativas que más difusión ha alcanzado.

Dichos grupos reunidos son el ambiente propicio para la aplicación de modelos de sistemas dinámicos. Estos describen la relación o dependencia entre las magnitudes que lo caracterizan. En el caso de lluvia de ideas, estos proporcionan la relación existente entre la tasa de producción de ideas y el tiempo [3].

La técnica de lluvia de ideas puede darse de forma verbal o escrita. Este documento utiliza un modelo dinámico no lineal para una sesión de lluvia de ideas por escrito. Para ello es necesario abordar en mayor profundidad el concepto de lluvia de ideas. Como se menciona en [4], el primero personaje en desarrollar este concepto fue Alex Osborn, al atribuirlo como un proceso de generación de ideas. Este desarrolló las cuatro reglas base para una lluvia de ideas con la finalidad de mejorar la productividad y creatividad grupal:

Primero, se descarta la crítica, es decir no juzgar ninguna de las ideas en el proceso.

Segundo, libertad de pensamiento, es decir que todos los participantes deben sentirse con total libertad de compartir toda idea que se les ocurra.

Tercero, prima la cantidad sobre la calidad, la finalidad es reunir la mayor cantidad de ideas para luego poder trabajar sobre estas.

Y, por último, buscar mejoras y combinación de ideas, pues todas las ideas que surjan serán fruto del trabajo en equipo .

Osborn pudo evidenciar a través de datos experimentales que grupos de lluvia de ideas que trabajan de forma interactiva son más productivos que aquellos que trabajan de forma solitaria [4]. Pues como plantearon Paulus, Dzindolet, Poletes y Camacho, 1993 (citado en [3]) muchas personan afirman que generarían más ideas como miembros de un grupo de lo que lo harían solos. A raíz de esta afirmación han surgido diversas investigaciones que la contradicen y afirman que la pérdida de productividad puede

explicarse debido a cuatro factores. De acuerdo con [4], [3] y [18], dichos factores que explican la pérdida de productividad se manifiestan a través de:

Aprehensión de la evaluación (temor a la evaluación de las ideas por parte de los miembros del grupo).

Holgazanería social (pérdida de motivación en aportar ideas y depender del trabajo de los demás).

Bloqueo en la producción de ideas (atascamiento mental para expresar una idea).

Fenómeno de acomodación (ajustar su rendimiento mediante la comparación de este con el desempeño promedio del grupo). En definitiva, serían estos factores los que reducen la tasa de producción de ideas.

En el caso de lluvia de ideas en forma verbal puede ocurrir que sólo los integrantes con más personalidad puedan expresar sus ideas y queden muchas ideas de otros integrantes que no han sido consideradas y que podrían haberse generado. Como se menciona en [3] "las personas también pueden sentirse incómodas o socialmente ansiosas en grupos debido a su preocupación por las posibles reacciones de evaluación de otros miembros del grupo".

En relación a la pérdida de productividad y como un intento de eliminar los factores inhibidores se han hecho investigaciones en técnicas para mejorar el rendimiento de grupos de lluvia de ideas. Camacho y Paulus, 1995 (citado en [5]) proponen como una alternativa conformar grupos con participantes menos ansiosos. Además, se han sugerido versiones electrónicas de grupos de lluvia de ideas, en donde los participantes generan sus ideas en forma simultánea, de este modo se elimina el bloqueo en la producción de ideas.

Como se menciona en [12] la generación de ideas por parte de un individuo tiene un alto impacto en la contribución de ideas de los demás integrantes de una lluvia de ideas, puesto que si un participante de bajo conocimiento de la situación problemática presta atención a las ideas de sus compañeros, esto aumentará su número de ideas generadas y convertirá al individuo en un generador de ideas más productivo. Además, si no fuera por el efecto de bloqueo en la producción de ideas, la cantidad de ideas aumentaría a medida que aumenta el tamaño del grupo.

En consecuencia, se introduce la lluvia de ideas por escrito en donde todos los participantes tengan la oportunidad de expresar sus ideas, aquí los participantes exponen sus ideas en papel. Los participantes generan sus ideas leyendo y escribiendo, en lugar de ir hablando y escuchando. Como se señala en [18] la lluvia de ideas por escrito es un enfoque alternativo para mejorar la lluvia de ideas grupales, evitando los problemas de intercambio verbal de ideas en grupo, pues estudios señalan que dicho enfoque logra un mejor desempeño que la lluvia de ideas en forma oral, ya que los participantes generan sus ideas en forma simultánea sin bloquearse entre sí. Además, el fenómeno de acomodación, a diferencia de la lluvia de ideas en forma verbal, en este caso sólo se da en forma ascendente, es decir , a favor de la producción de ideas ya que existe una tendencia de los miembros del grupo a ajustar su desempeño cuando su rendimiento es más bajo que los demás. En caso contrario, cuando un participante perciba que su rendimiento es más alto que los demás integrantes del grupo no intentará disminuirlo [4].

El modelo matemático que se usará en este estudio corresponde a sistemas dinámicos no lineales a través de la utilización de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La no linealidad está determinada por el efecto de acomodación.

Un modelo dinámico que describe una lluvia de ideas, en su versión más simple propuesto por Brown y Paulus (1996) se basa en que existen sólo tres factores que intervienen en la productividad de ideas: bloqueo en la producción de ideas, acomodación y decaimiento. Este último se refiere a que en un momento

determinado un individuo se quedará sin ideas. Ellos proponen que la capacidad de un individuo para producir ideas decaería exponencialmente y que la productividad de un individuo disminuye en función de la productividad del grupo. En tanto el modelo de lluvia de ideas por escrito se basa en que los factores que inciden en la producción de ideas a lo largo del tiempo son el decaimiento y acomodación [4]. Dicho modelo consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales poseen coeficientes que representan los parámetros de decaimiento y acomodación, definidos como los factores que intervienen en la tasa de producción de los participantes de una lluvia de ideas por escrito.

En los modelos dinámicos es deseable tener modelos simples y lineales. Pero, como ya se ha mencionado, la lluvia de ideas por escrito representa un modelo no lineal, ya que el fenómeno de acomodación sólo se da en sentido positivo.

En resumen, existen dos parámetros en el modelo no lineal que explican la pérdida de productividad de ideas; decaimiento (A) y acomodación (M). En el estudio hecho por [4] el coeficiente elegido de decaimiento fue 0.2 y para el factor de acomodación fue 0.02, esto para cada persona que compone una lluvia de ideas por escrito. Por consiguiente es necesario conocer el origen de estos parámetros. Para ello se hizo la estimación de dichos parámetros con el uso de datos experimentales y la solución numérica a través del método de mínimos cuadrados. En primer lugar, se formuló el problema de optimización y se implementó un programa computacional que automatiza todo el proceso a través de dos algoritmos $fminunc$ y $fminsearch$. El objetivo es poder ofrecer aproximaciones a los parámetros que ya están establecidos en [4].

Los objetivos de la presente investigación fueron evaluar el impacto del número de integrantes en el desempeño del grupo, resolver el modelo de forma numérica y estimar los parámetros del modelo por comparación con datos experimentales. Para ello se presentan secciones que desarrollan el modelo conceptual y modelo matemático, donde se explica y sustenta teóricamente el modelo no lineal. Una sección referida a resultados, donde se desarrolla el modelo de forma numérica a través de una serie de simulaciones, que muestran gráficamente el desempeño grupos característicos que conforman una lluvia de ideas por escrito, para evidenciar bajo qué condiciones el número de integrantes impacta en el rendimiento del grupo, a través de variaciones en los parámetros y su interacción. Otra sección, está orientada en la estimación de los parámetros del modelo para una lluvia de ideas de tres y cuatro integrantes. Finalmente, se presentan las secciones de discusión y conclusiones.

2. OBJETIVOS

Objetivo general

Simular computacionalmente la generación de ideas expresadas en forma escrita en el contexto de una sesión grupal tipo lluvia de ideas.

Objetivos específicos

1. Evaluar el impacto del número de integrantes en el desempeño global del grupo.
2. Estimar los parámetros del modelo matemático por comparación con datos experimentales.
3. Resolver el modelo matemático utilizando métodos analíticos, numéricos y/o cualitativos.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. MODELO CONCEPTUAL

3.1.1. Creatividad

El mundo actual requiere de individuos autónomos e independientes en el área cognitiva que sean capaces de insertarse en los procesos de cambio de la sociedad y en aquellos que ocurren debido a la globalización, ya sea en el ámbito científico o en el laboral, es decir, sujetos creativos que puedan aplicar dicha competencia en la solución de problemas. Por ello, los nuevos paradigmas educativos se centran en la forma en que los sujetos alcanzan el desarrollo de habilidades de pensamiento e intelectuales para ser autónomos a la hora de aprender y producir nuevos conocimientos. Esto se puede constatar hoy en día, por ejemplo, en las grandes empresas, las cuales invierten en la capacitación de sus empleados para el manejo de técnicas que propicien la producción de ideas creativas, puesto que para que una empresa pueda sobrevivir en el mundo competitivo, debe ser innovadora. [8].

Por otro lado, profesiones relacionadas con la ingeniería están asociadas a la capacidad de resolver problemas de forma creativa, competencia genérica y relevante al momento de graduarse, pues deben tener la capacidad de innovar y crear en manejo y gestión de proyectos.

Sin embargo, teniendo en cuenta los argumentos antes presentados, es de suma importancia preguntarse: ¿Qué es la creatividad?

Como se indica en [14], entendemos por creatividad la capacidad de crear, de producir ideas, cosas nuevas y valiosas; es la capacidad de un cerebro para llegar a conclusiones nuevas y resolver problemas en una forma original. Asimismo, , la creatividad se concibe como una habilidad propia de los seres humanos que consiste en la combinación de los conocimientos previos y nuevos de un individuo para la resolución de problemas de forma adecuada. Es importante tomar en cuenta la habilidad de argumentación que tiene un individuo en un proceso creativo, vale decir la capacidad de evaluar sus argumentos, junto con la construcción de este en base a la ayuda de otros, además de argumentar de acuerdo al objetivo en cuestión [2].

La creatividad es propia de individuos que desarrollan un pensamiento divergente, aquellos que tienen la capacidad para generar múltiples posibilidades para dar solución a un problema en equipo, creando ideas novedosas y de utilidad en el contexto abordado [13].

Por otro lado, el proceso creativo supone de ciertas etapas en la resolución de problemas [22]:

1. Preparación: encuentro con el problema
2. Incubación: momento de la generación de ideas y posibles soluciones para resolver el problema
3. Intuición: cuando se piensa que se ha encontrado la idea adecuada.
4. Evaluación: se examina la idea para ver si es valiosa o no y seguir adelante con ella.
5. Elaboración: se lleva a cabo la idea seleccionada.
6. Dar solución al problema.

Cabe destacar que existen factores sociales, subjetivos y contextuales que condicionan el proceso creativo, sean estos los mecanismos cognitivos, el conocimiento, los estilos de pensamiento, rasgos de personalidad (ansiedad social, individualismo, impulsividad y extroversión), estimulación cognitiva, comparación social y presión del tiempo. Este último juega un papel importante para la incubación y trabajo creativo [21].

En definitiva, el concepto de creatividad tiene una amplia gama de definiciones. Es posible concluir que es propia de los seres humanos y que apunta a la capacidad para dar soluciones creativas en la resolución de problemas. Como se menciona en [7] y [10] dicha capacidad está influenciada por factores cognitivos, afectivos, volitivos y socio culturales, pues la resolución de problemas implica desarrollar un aprendizaje estratégico sobre el plan de acciones que ejecuta un sujeto para dar solución a un problema.

Por otra parte, existen diversas técnicas de generación de ideas que buscan estimular el potencial creativo de los sujetos para dar solución a diversos problemas [22].

3.1.2. Resolución de problemas (RP)

La resolución de problemas es un proceso estrechamente ligado a la creatividad, pues implica individuos creativos que sean capaces de mejorar o transformar una situación a través de la generación de ideas creativas; es decir, el proceso de resolución de problemas es también considerado un proceso creativo, puesto que solucionar un problema es pensar creativamente [8].

La resolución de problemas promueve la capacidad de crear, razonar y analizar situaciones o problemas que luego deben ser resueltos y puede ser aplicada en todas las áreas, por ejemplo, en educación, salud, mercado, etc. En el área de la salud, por ejemplo, se aplica al estudio de casos clínicos, en donde se debe dar solución a problemas reales a través de una estrategia en particular [17].

Por otro lado, en el área de la educación, la resolución de problemas se ha convertido en un eje central de la enseñanza - aprendizaje, se incluye en la formación como una competencia para el ámbito laboral [20]. Es por ello que la RP se incluye en los programas de estudio como una herramienta didáctica potente para el desarrollo de habilidades de los estudiantes, pues posee una gran cantidad de aplicaciones en la vida diaria. Por tanto, la RP juega un rol muy importante en la enseñanza, ya que estimula capacidades en los estudiantes como crear, inventar, razonar y analizar situaciones problemáticas, con la finalidad de dar solución a estas [19].

Como se cita en [19] el concepto problema puede ser definido como:

- Para Nieto *problema: como una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que requiere ser aclarada.*
- Para Kilpatrick *problema: es una definición en la que se debe alcanzar una meta, pero en la cual está bloqueada la ruta directa.*
- Para Rohn *concibe un problema como un sistema de proposiciones y preguntas que reflejen la situación objetiva existente; las proposiciones representan los elementos y relaciones dados (qué se conoce) mientras que las preguntas indican los elementos y las relaciones desconocidas (qué se busca).*

Cabe destacar, que existen diversos tipos de problemas, para los cuales diferentes autores han dado diversas propuestas de cómo abordar un problema. Estos apuntan a modelos matemáticos y otros a psicológicos. Por ejemplo, Polya reconoce dos tipos de problemas: *problema por resolver* y *problema por demostrar*[20].

Por otro lado, Butts clasifica los problemas como: *ejercicios de reconocimientos*, *ejercicios algorítmicos*, *problemas de aplicación* [20] . A continuación se muestra un cuadro de algunos modelos de resolución de problemas que han sido propuestos por diversos autores:

POLYA (1981)	MASON BURTON Y STACEY (1988)	BRANDSFORD Y STEIN (1993)	MIGUEL DE GUZMÁN (1995)
Comprender el problema Estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida. **Idear un plan** de actuación que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta. **Llevar a cabo el plan** ideado previamente. **Mirar atrás para comprobar** el resultado y revisar el procedimiento utilizado.	**Abordaje:** Comprender el problema. Concebir un plan. **Ataque:** Llevar a cabo el plan. **Revisión:** Reflexión sobre el proceso seguido. **Revisión del plan**	**Identificación** del problema. **Definición y representación** del problema. **Exploración** de posibles estrategias. **Actuación** fundada en una estrategia. **Logros**. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.	**Familiarización** con el problema. **Búsqueda** de estrategias. **Llevar adelante** la estrategia. **Revisar** el proceso y sacar consecuencias.

Figura 1: Modelos para la resolución de problemas [20]

El proceso de RP puede ser definido desde el punto de vista del objetivo del problema, es decir, de los procesos cognitivos involucrados. Esto último implica analizar los procesos de conducta y pensamiento de un individuo a la hora de resolver una tarea.

Las estrategias que pueden ser empleadas para la RP son diversas. Las soluciones pueden ser construidas de forma autónoma, en parejas o en grupos. Una de estas técnicas es la lluvia de ideas, la cual se basa en la exposición de ideas en torno a un tema o problema que ayuda a estimular la creatividad [22].

3.1.3. Lluvia de ideas

Este concepto hace referencia a una sesión de trabajo grupal en donde se generan ideas sobre un tema o problema determinado. Esta técnica, conocida como *Tormenta de ideas o Brainstorming*, surge en el año 1953 con Alex Osborn, quien a partir de la búsqueda de ideas creativas pudo evidenciar con datos experimentales que grupos que trabajan de forma interactiva rinden más que aquellos grupos cuyos integrantes trabajan de forma independiente, ya que la ventaja es que se pueden hacer sugerencias de las ideas y se fomenta la capacidad creativa de los integrantes del grupo [4]. Sin embargo, estudios empíricos afirman que los grupos interactivos son menos productivos que el mismo número de individuos trabajando solos en una lluvia de ideas, a los que se les llama grupos nominales [3]. Esta última afirmación ha dado pie a numerosas investigaciones y estudios experimentales que dicen lo contrario, ya que existe evidencia de que estos grupos nominales generan mayor cantidad de ideas que los grupos interactivos [4].

Una sesión de lluvia de ideas puede darse de forma verbal o escrita. La forma verbal consiste en la generación de ideas de forma interactiva, en donde todos los participantes exponen sus ideas dirigidos por un moderador, mientras que en la lluvia de ideas por escrito los miembros registran sus ideas en papel de forma anónima sin interactuar cara a cara con los demás integrantes del grupo. En las dos formas tienen un tiempo limitado para escribir sus ideas, las cuales son recogidas y recopiladas. En el caso escrito, las ideas son recogidas por un moderador para luego ser discutidas y trabajadas en grupo. A su vez, la sesión verbal o escrita puede darse de forma simultánea o secuencial. La lluvia de ideas simultánea consiste en que todos los temas discutidos en la sesión se dan al comienzo de esta y no por etapas, mientas que la forma secuencial es cuando cada tema en discusión ocurre en un momento diferente durante la sesión [4].

Existen diversas técnicas de lluvia de ideas para desarrollar la creatividad y productividad de sujetos durante diversas sesiones [1]:

Lluvia de ideas tradicional: técnica verbal en la cual los miembros participan activamente para expresar sus ideas con el fin de dar solución a un problema. La sesión es guiada por un moderador.

Lluvia de ideas nominal: técnica escrita donde los miembros del grupo pueden generar ideas individualmente sin necesidad de comunicarse con otros miembros del mismo grupo. La literatura nos informa que los grupos de lluvia de ideas tradicional pueden producir menos ideas que un número equivalente de personas trabajando en grupo nominal.

Lluvia de ideas electrónica: técnica escrita introducida para facilitar la generación de ideas en forma simultánea a través del uso de recursos y herramientas en línea tales como el correo electrónico, sistemas por chat y foros de discusión. Las ideas generadas por otros se pueden ver en la mitad superior de la pantalla a medida que los participantes generan sus propias ideas.

El éxito de las técnicas mencionadas anteriormente dependerá del contexto en que sean aplicadas, pues puede ocurrir que al usar una de éstas en una situación pueda generar muchas ideas y que el uso de otra técnica en la misma situación genere pocas ideas. No existe evidencia, por ejemplo, que la lluvia de ideas tipo electrónica sea más efectiva que la oral [1].

Según diversos estudios, son cuatro los factores de tipo sociales y motivacionales que afectan y pueden explicar la pérdida de productividad en una sesión de lluvia de ideas de grupos interactivos [4]:

Ansiedad social: o también llamada aprehensión de la evaluación, sensación de temor de expresar las ideas frente a los demás miembros del grupo por miedo a la evaluación de estos. Este factor está presente en la lluvia de ideas tipo tradicional y electrónica. Esta última evita la aprehensión de la evaluación pues proporciona el anonimato de los participantes, de esta forma produce niveles más altos de producción de ideas [18].

Manejo libre: o también denominada holgazanería social, la cual ocurre cuando un individuo ve que los demás miembros pueden realizar la tarea, por lo tanto se excluye y no participa pues considera que los demás pueden hacerlo sin él. Este factor sólo se manifiesta en la lluvia de ideas tradicional.

Bloqueo: es la incapacidad de generar o expresar una idea porque otro miembro del grupo está hablando. Este factor se manifiesta en lluvia de ideas de forma verbal y electrónica, tanto en la generación como en la salida de una idea, por ejemplo, cuando un integrante del grupo está hablando y es difícil que otros puedan dar una idea, por lo que cuando llega su turno de hablar, olvida o pierde la idea que quería expresar (generación). Asimismo, cuando un integrante del grupo escucha una idea diferente a lo que estaba pensando, esto lo inhibirá para dar su idea (Salida) [3]. El bloqueo es el principal factor que interfiere en la pérdida de productividad en grupos grandes, la cual puede aumentar si los miembros más activos reducen su producción de ideas al unirse a los miembros menos activos.

En una lluvia de ideas en forma verbal sólo una persona puede expresar sus ideas en un momento dado, pues deben opinar por turno, según indique el moderador; mientras tanto los demás individuos pueden olvidar o suprimir sus ideas. Por tanto la pérdida de productividad se debe en gran parte al retraso entre la generación de ideas y su verbalización, ya que los participantes suprimen u olvidan sus ideas. [11]

Este factor se asume muy poco significativo en la técnica de lluvia de ideas tipo escrita.

Acomodación: ajuste de la tasa de productividad de un individuo a la tasa promedio del grupo. Este factor puede darse a favor (sentido positivo) o en contra (sentido negativo) de la producción de ideas. Puede ocurrir que un integrante de bajo rendimiento intente aumentar su productividad de ideas para coincidir con los miembros de mayor producción (sentido positivo), así como también los miembros de alto rendimiento pueden bajar su nivel de producción al observar que los demás integrantes no se esfuerzan por generar ideas (sentido negativo). En definitiva, este factor causa una disminución en la productividad del individuo si esta es mayor a la del grupo, pero la aumenta en caso de que sea menor a la productividad promedio del grupo. En el caso de lluvia de ideas por escrito, el factor de acomodación sólo se da en sentido positivo, es decir, cuando el rendimiento del individuo es inferior al promedio del grupo, intentará aumentar su rendimiento y cuando su rendimiento sea mayor al del grupo, éste no intentará reducirlo, así que la coincidencia será en forma ascendente [4].

Como se señala en [3] “Tanto el bloqueo como el factor de acomodación requieren que la tasa de producción de un miembro dependa de alguna manera de las tasas de producción de otros miembros del grupo”.

En definitiva, los factores descritos anteriormente influyen en la velocidad de la producción de ideas en una lluvia de ideas. Además, existen diversos mecanismos para ejecutar una lluvia de ideas, los principales son en forma verbal y escrita. Este trabajo se enfocará en lluvia de ideas por escrito.

3.1.4. Lluvia de ideas por escrito

Este proceso ocurre en una sesión grupal que tiene como propósito desarrollar la creatividad y productividad de los participantes y es utilizada en distintos campos, tales como el marketing, publicidad, diseño, desarrollo de productos, etc. Existen diversos enfoques para la lluvia de ideas por escrito, los cuales pueden darse o no de forma interactiva. La base para ambas es:

1. Definir objetivo y problema de la lluvia de ideas.

2. Presentación de las respuestas, las cuales deben ser a través de tarjetas escritas a mano e informar que serán anónimas.

3. Definir tiempo para escribir las ideas.

4. Las ideas pueden ser compartidas o simplemente recogidas.

Entre los tipos de lluvia de ideas por escrito tenemos:

Lluvia de ideas de forma interactiva: la que se construye a partir de los pasos señalados anteriormente. Aquí en vez de recoger las tarjetas, estas pueden ser compartidas entre los miembros del grupo y finalmente cada uno puede agregar más ideas a partir de las ya leídas. Este proceso no incluye conversación entre los participantes.

El método 6-3-5: es un tipo de lluvia de ideas por escrito muy utilizado, el cual permite generar muchas ideas en poco tiempo. Este involucra a seis participantes que se sientan en un grupo supervisado por un moderador. Cada participante piensa hasta tres ideas cada cinco minutos. Las ideas se escriben en una hoja de trabajo y se pasan al siguiente participante. El participante lee las ideas y las usa como inspiración para obtener más ideas. Se anima a los participantes a inspirarse en las ideas de otros, estimulando así el proceso creativo. Después de 6 rondas en 30 minutos el grupo ha pensado un total de 108 ideas. La escritura mental implica compartir en silencio ideas escritas en grupos [9].

Los beneficios de una lluvia de ideas por escrito por sobre una lluvia de ideas en forma verbal son [15]:

1. Da oportunidad a los participantes menos comunicativos de expresarse.
2. Se construyen ideas sobre ideas, es decir, tras las ideas de los demás se fomenta la creatividad para producir una idea nueva en la sesión.
3. Combina el trabajo individual con el grupal
4. Es más rápida y asegura mayor cantidad de ideas que una lluvia de ideas verbal.
5. Proporciona a todos los integrantes el mismo tiempo para pensar, generar y escribir sus ideas.
6. Se excluye la sensación de temor de expresar ideas.

Estudios experimentales mostrados en [4] indican que los participantes de una lluvia de ideas por escrito rinden más que aquellos que trabajan en forma verbal, pues se excluyen los factores inhibidores en la producción de ideas, tales como la ansiedad social y el bloqueo, además, el factor de acomodación sólo se da en sentido positivo, es decir, a favor de la producción de ideas.

Supongamos una sesión de lluvia de ideas por escrito donde analizamos, por ejemplo, el factor de bloqueo, el cual no está presente en la lluvia de ideas por escrito pues, en ninguna circunstancia, un participante no podrá expresar una idea por temor a hablar ó porque otro participante de una idea, como en el caso verbal. Es decir, como la interacción no es cara a cara, no existen factores inhibidores en la producción de ideas, como el bloqueo y la ansiedad social. En cuanto al factor de acomodación, el cual se relaciona con la percepción que tenga el individuo de su rendimiento con respecto al grupo, este será a favor de la producción de ideas, pues si un sujeto piensa que tiene mayor rendimiento que el grupo, éste no intenta reducir su rendimiento, pues la regla es que debe escribir sus ideas y rotarlas. En el caso de que el sujeto sienta que su rendimiento es inferior al promedio del grupo, éste intentará aumentar su rendimiento, lo cual será posible al momento de recibir la idea del otro integrante en el papel.

Existen patrones de rendimiento en el tiempo en una sesión de lluvia de ideas por escrito, de los cuales se pueden hacer predicciones a través de un modelo dinámico. La lluvia de ideas por escrito corresponde a un modelo no lineal, dado que el factor de acomodación sólo se da en sentido positivo.

3.2. MODELO MATEMÁTICO

3.2.1. Lluvia de ideas por escrito para dos personas

Los factores o parámetros que inciden en el rendimiento de este modelo son:

1. **Decaimiento** Este factor influye en la productividad a lo largo del tiempo en que se ejecuta una sesión de lluvia de ideas, la cual se refiere que a que un miembro se quedará sin ideas en un momento determinado (Paulus, 1996). El decaimiento puede ser analizado desde tres etapas, primero en la generación de ideas, segundo en el almacenamiento de ideas en el corto plazo y en la salida, esto es al momento de expresar la idea. Esta última característica se considera en el modelo lineal.

   Este factor será denotado como a_i para la persona $i-ésima$, por ejemplo, a_1 para la persona 1.

2. **Acomodación**

   En una sesión de lluvia de ideas de forma verbal puede pasar que integrantes de bajo rendimiento intenten aumentar su productividad de ideas para que coincida con los miembros de mayor producción. También, los miembros de alto rendimiento puede bajar su nivel de producción al observar que los demás integrantes no se esfuerzan por generar ideas. Esto es conocido como factor de acomodación. En resumen, este factor disminuye la productividad del individuo si esta es mayor a la del grupo y la aumenta si ésta es menor a la productividad promedio del grupo.

   En el caso de lluvia de ideas por escrito, el factor de acomodación sólo se da en sentido positivo, es decir, cuando el rendimiento del individuo es inferior al promedio del grupo, intentará aumentar su rendimiento y cuando su rendimiento sea mayor al del grupo, éste no intentará reducir su rendimiento; este parámetro se da en forma ascendente [4].

   Este factor será denotado como m_i para la persona $i-ésima$; por ejemplo para la persona 1 como m_1.

   Según Paulus (1996) en el factor de acomodación se requiere que la tasa de producción de un miembro dependa de alguna manera de las tasas de producción de otros miembros del grupo.

   La dependencia que existente entre las tasas de producción permiten que la lluvia de ideas pueda ser modelada a través de sistemas dinámicos, ya que este describe los aspectos de un sistema que cambian con el tiempo.

   Con el fin de modelar los procesos de interacción grupal en una lluvia de ideas nace el modelo no lineal de lluvia de ideas por escrito.

Supongamos una sesión de lluvia de ideas por escrito para dos personas, a la cual se les presenta un problema determinado. Para ello vamos a denotar la *tasa de producción de ideas* (n^o de ideas/unidad de tiempo) de la persona 1 como x_1 y la tasa de producción de ideas de la persona 2 como x_2, a_1 y a_2 como la *tasa de decaimiento* de ambas personas y m_1y $m_2$como el *factor de acomodación*. Ubicándonos en un primer nivel de complejidad, en este trabajo asumimos una estructura aditiva para los factores de decaimiento y acomodación. El sistema de ecuaciones que representa esta situación queda de la siguiente forma [4] :

$$x'_1 = -a_1 x_1 + \begin{cases} -m_1 (x_1 - x_2) & ; \quad x_1 < x_2 \\ 0 & ; \quad x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

$$x'_2 = -a_2 x_2 + \begin{cases} -m_2 (x_2 - x_1) & ; \quad x_1 > x_2 \\ 0 & ; \quad x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

En el sistema anterior el segundo término definido por tramos se refiere a que cuando el rendimiento del individuo (x_1) es inferior al promedio del grupo sin incluirlo (x_2) , éste tratará de aumentar su rendimiento ($-m_1 (x_1 - x_2) > 0$) y cuando su rendimiento sea mayor al del grupo ($x_1 \geq x_2$) este no tratará de reducir su rendimiento, es decir no habrá efecto de acomodación (0). Para la ecuación de x'_2 la explicación es análoga.

En tanto el parámetro de decaimiento (a_i) es exponencial y negativo en el rendimiento de la persona, pues es un factor en contra de la producción de ideas.

Cabe señalar, que suponemos no existe interacción entre los factores de decaimiento y acomodación.

En definitiva, las diferenciales x'_1 y x'_2, representan tasas de variación de la tasa de producción de ideas, es decir, la aceleración.

La forma matricial de este último sistema puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1(x) & 0 \\ 0 & I_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m_1 & m_1 \\ m_2 & -m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

en donde la función I_i se define, en general, para n personas en el grupo como:

$$I_i (x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i < \frac{1}{n-1} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_j \\ \\ 0 & \text{si } etoc \end{cases}$$

para $i = 1, 2, ..., n$. Note que $I_i(x) = I_i(x_1, ..., x_n)$. Por tanto en el caso $n = 2$, se define $x = (x_1, x_2)$. Además, note que el sistema anterior está sujeto a la condición inicial $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02})$.

Para el caso de lluvia de ideas en forma verbal la formulación matricial de $n = 2$ queda expresado como [3]:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_1 & m_1 \\ m_2 & -m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Lluvia de ideas por escrito para tres personas

Ahora, supongamos el caso de una sesión de lluvia de ideas caso $n = 3$. Para ello vamos a definir la tasa de producción de ideas como x_1 ,x_2 y x_3 de la persona 1, 2 y 3 respectivamente, a_1, a_2 y a_3 como su tasa de decaimiento, m_1, m_2 y m_3 como el factor de acomodación. El sistema de ecuaciones que representa esta situación queda de la siguiente forma:

$$x'_1 = -a_1x_1 + \begin{cases} -m_1\left(x_1 - \frac{x_2+x_3}{2}\right) & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3}{2} < 0 \\ 0 & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$x'_2 = -a_2x_2 + \begin{cases} -m_2\left(x_2 - \frac{x_1+x_3}{2}\right) & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3}{2} < 0 \\ 0 & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$x'_3 = -a_3x_3 + \begin{cases} -m_3\left(x_3 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2}{2} < 0 \\ 0 & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2}{2} \geq 0 \end{cases}$$

La forma matricial de este sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & I_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & I_3(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{2} & \frac{m_1}{2} \\ \frac{m_2}{2} & -m_2 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_3}{2} & \frac{m_3}{2} & -m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sujeto a la condición inicial $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$.

3.2.3. Lluvia de ideas por escrito para cuatro personas

Para una sesión de lluvia de ideas caso $n = 4$. Se define la tasa de producción de ideas como x_1 ,x_2, x_3 y x_4 de la persona 1, 2, 3 y 4 respectivamente, a_1, a_2, a_3 y a_4 como su tasa de decaimiento, m_1, m_2, m_3 y m_4 como el factor de acomodación. El sistema de ecuaciones que representa esta situación queda de la siguiente forma:

$$x'_1 = -a_1x_1 + \begin{cases} -m_1\left(x_1 - \frac{x_2+x_3+x_4}{3}\right) & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3+x_4}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3+x_4}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$x'_2 = -a_2x_2 + \begin{cases} -m_2\left(x_2 - \frac{x_1+x_3+x_4}{3}\right) & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3+x_4}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3+x_4}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$x'_3 = -a_3x_3 + \begin{cases} -m_3\left(x_3 - \frac{x_1+x_2+x_4}{3}\right) & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2+x_4}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2+x_4}{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$x'_4 = -a_4x_4 + \begin{cases} -m_4\left(x_4 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) & ; \quad x_4 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_4 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq 0 \end{cases}$$

La forma matricial de este sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{3} & \frac{m_1}{3} & \frac{m_1}{3} \\ \frac{m_2}{3} & -m_2 & \frac{m_2}{3} & \frac{m_2}{3} \\ \frac{m_3}{3} & \frac{m_3}{3} & -m_3 & \frac{m_3}{3} \\ \frac{m_4}{3} & \frac{m_4}{3} & \frac{m_4}{3} & -m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Sujeto a la condición inicial $x(0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})$.

3.2.4. Modelo caso general

El sistema para n participantes se expresa en forma matricial como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} I_1(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_3(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m_1 & \frac{m_1}{n-1} & \frac{m_1}{n-1} & \cdots & \frac{m_1}{n-1} \\ \frac{m_2}{n-1} & -m_2 & \frac{m_2}{n-1} & \cdots & \frac{m_2}{n-1} \\ \frac{m_3}{n-1} & \frac{m_3}{n-1} & -m_3 & \cdots & \frac{m_3}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_n}{n-1} & \frac{m_n}{n-1} & \frac{m_n}{n-1} & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

Lo mismo escrito en notación más compacta:

$$\begin{cases} x' = -A \cdot x + H(x) \cdot M \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \qquad H(x) = diag(I_i(x)) \tag{1}$$

(Coskun y Yilmaz, 2009).

Cabe destacar que este modelo corresponde a lluvia de ideas por escrito caso simultáneo en donde el problema es entregado al inicio de la sesión y no por etapas, el cual describe la evolución del número de ideas de cada participante a lo largo del tiempo.

3.3. FORMULACIÓN PROBLEMA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden puede representarse como

$$\begin{cases} F\left(t, x, x'\right) = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

en donde $t \geq 0$ es la variable independiente, $x = x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ es el vector incógnita, $n = 1, 2, 3, ...$ es el número de funciones incógnita, x_0 es el vector condición inicial, y x' es la primera derivada con respecto de t. En particular, el modelo matemático objeto de este trabajo admite la siguiente representación, luego de *despejar* x'

$$\begin{cases} x' = G(t, x) = -A \cdot x + H(x) \cdot M \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

en donde, $n = 2, 3, 4, ...$ representa el número de integrantes del grupo constituido para una sesión de lluvia de ideas por escrito. Tal como puede apreciarse se trata de un sistema de EDO no lineal.

Tal como se describió en las secciones anteriores las entradas de la matriz A se calculan a partir de n parámetros $a_i, i = \overline{1, n}$, mientras que las de la matriz M a partir de n parametros $m_i, i = \overline{1, n}$. Estos $2n$ parámetros representan características psicológicas cuya medición experimental resulta muy compleja. Es por esta razón que consideramos el problema de estimarlos a partir de datos experimentales generados computacionalmente.

En lo que sigue $p = (p_1, ..., p_d)$ representa el vector de parámetros a estimar, en donde $\{p_i, i = \overline{1, d}\}$ es un subconjunto de $\{a_i, m_i; i = \overline{1, n}\}$. Con esto el sistema anterior puede reescribirse como

$$\begin{cases} x' = G(t, x; p) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

En este trabajo consideramos seis casos de colecciones distintas de parámetros a estimar:

- Caso 1: $p = (a_1, a_2, a_3)$
- Caso 2: $p = (m_1, m_2, m_3)$
- Caso 3: $p = (a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3)$
- Caso 4: $p = (a_1, a_2, a_3, a_4)$
- Caso 5: $p = (m_1, m_2, m_3, m_4)$
- Caso 6: $p = (a_1, a_2, a_3, a_4, m_1, m_2, m_3, m_4)$,

esto es, para grupos de tres ($n = 3$) y cuatro ($n = 4$) personas.

En lo que sigue $\ddot{x}_{ij}$ denota un dato experimental asociado a la incógnita, o persona x_i, $i = \overline{1, n}$, en el instante t_{ij}, con $j = \overline{1, m_n}$. Asimismo, si $x_{ij} = x_{ij}(p)$ denota una aproximación numérica de $\ddot{x}_{ij}$, se define el error (i, j) como

$$e_{ij} = \ddot{x}_{ij} - x_i,$$

y la función objetivo del problema de optimización, esto es, la función *Suma de Errores al Cuadrado (SEC)* como

$$SEC(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(\ddot{x}_{ij} - x_{ij}(p)\right)^2.$$

Note que la aproximación numérica x_{ij} dependerá del valor numérico del vector de parámetros p, y que su cálculo se basa en el Método de Mínimos Cuadrados. Por lo tanto el Problema de Optimización no restringida se puede formular como:

$$\min_{p \in R^d} SEC(p),$$

para $d \in \{3, 4, 6\}$.

Dicha función, con los parámetros estimados, alcanza un mínimo.

Para la estimación de los parámetros se implementaron una serie de programas computacionales de *Octave* [1], los cuales automatizan este proceso. En el caso de $n = 3$ para estimar el factor de decaimiento, por ejemplo, requiere de la implementación de dos programas; uno que contiene los parámetros a estimar, los parámetros que suponemos conocidos, la matriz de datos experimentales con instantes de tiempo en que una persona da una idea y el comando *lsode* que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales haciendo la interpolación con dichos tiempos. El otro programa contiene la matriz con las tasas de producción de ideas y el vector de aproximación inicial, donde el programa reconoce un valor de inicio adecuado para el parámetro que se va a estimar. Este valor de conoce a priori de [4] y a diversas variaciones del estudio numérico. La convergencia en la estimación puede ser o no exitosa, es decir, lo deseable es obtener una convergencia con los valores iniciales que le entregamos al programa, de lo contrario, se debe intentar optimizar sus valores iniciales mediante un estudio exploratorio.

[1] Para mayor detalle revisar anexos secciones A.8 y A.9

4. RESULTADOS

4.1. ESTUDIO NUMÉRICO Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El estudio numérico informado en esta sección tuvo el propósito de resolver el modelo no lineal de lluvia de ideas por escrito mediante el comando *lsode* [2] de *Octave*, para lo cual se incluyen programas *.m* [3], los cuales resuelven los diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales que representan grupos de lluvia de ideas. Estos programas automatizan el proceso de solución para los parámetros del modelo: factor de decaimiento(a_i) y factor de acomodación (m_i). En tanto las condiciones iniciales (x_0) no fueron objeto de estimación por lo que no tuvieron influencia en los programas de automatización.

Los objetivos de esta sección son los siguientes:

- Identificar rangos numéricamente factibles para los parámetros de los factores involucrados en el modelo mediante un análisis de sensibilidad.
- Evaluar el impacto de la condición inicial en el rendimiento del grupo.
- Evaluar el impacto del número de integrantes en el rendimiento del grupo.
- Evaluar el impacto de cada uno de los factores y su interacción.
- Estimar la composición del grupo que maximiza el rendimiento.

Para alcanzar estos objetivos se resolvió numéricamente el modelo matemático 1.

Se considerarán grupos de mínimo tres personas y máximo ocho personas.

4.1.1. Análisis de sensibilidad

Esta primera parte del estudio numérico tiene como objetivo determinar los valores admisibles para los parámetros del modelo, de tal forma de capturar la dinámica del modelo. La discusión comienza con los valores numéricos usados en [4] y qué tanto podemos variar dichos valores. Para una mayor claridad, la siguiente tabla muestra los valores referenciales, en torno a los cuales variarán los parámetros del modelo:

-	x_0	a_i	m_i
x_i	36	0.2	0.02

Tabla 1: Parámetros de referencia usados en [4]

Para ello, se implementó un programa que resuelve la ecuación (1) a través de *Octave*, realizando simulaciones de una lluvia de ideas por escrito compuesta por tres participantes, los cuales tienen asignados diferentes factores de acomodación, decaimiento y condición inicial. A través de ensayo y error se realizaron las siguientes pruebas para determinar el rango de valores admisibles para dichos parámetros:

[2] Para mayor detalle revisar en anexos sección E, donde se puede encontrar una descripción más completa tanto del comando como del método numérico en que se sustenta.

[3] Para mayor detalle revisar anexos en sección A códigos propios A.1 - A.7

El siguiente gráfico y tabla muestran los parámetros de referencia con los cuales se trabajará en esta sección:

Persona	x_0	a_i	m_i
1	34	0.1	0.01
2	36	0.2	0.02
3	38	0.3	0.03

Tabla 2: Valores de referencia figura 2

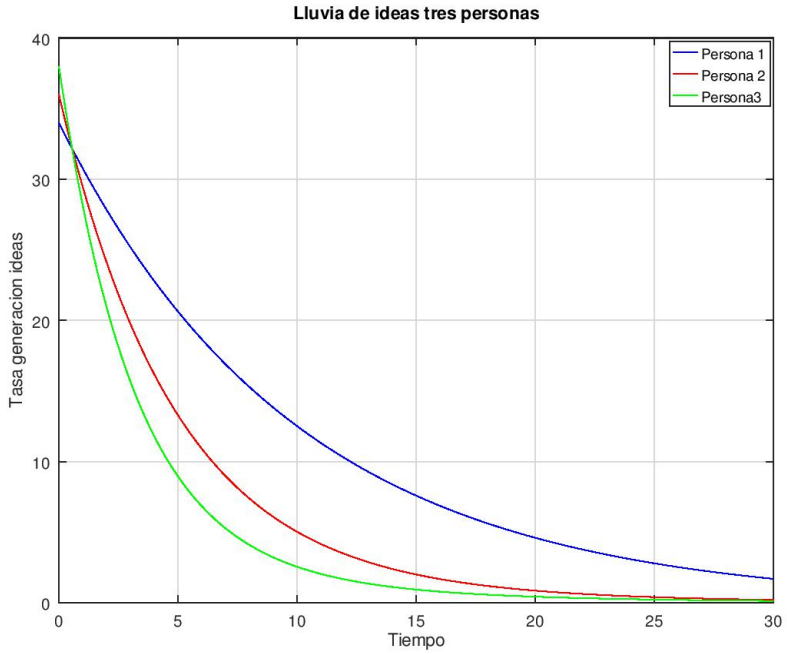

Figura 2: Variación m_i, a_i y x_0

Prueba 1: Análisis de sensibilidad para el factor de decaimiento

En esta sección se hará un análisis de sensibilidad en el factor de decaimiento asignado a la persona 2 (0,2) en dos grupos de lluvia de ideas ($n = 3, 4$). La figura 3 muestra el rendimiento de x_2 en un grupo de lluvia de ideas compuesta por tres personas cuando presenta distintos valores asociados a su factor de decaimiento; los valores de referencia para los parámetros, en esta simulación, se encuentran el la tabla 2. Luego, en la figura 4, se muestra el rendimiento de x_2 en un grupo de cuatro personas cuando presenta distintos valores asociados a su factor de decaimiento; los valores de referencia para los parámetros, en esta simulación, se encuentran el la tabla 3. La finalidad es analizar la sensibilidad a variaciones del factor de decaimiento en diferentes grupos de lluvia de ideas. Las variaciones al parámetro de decaimiento (a_2) está explícito en cada figura.

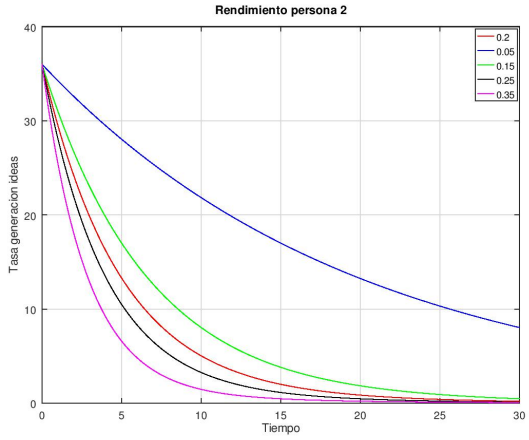

Figura 3: Variación factor de decaimiento $n = 3$

Persona	x_0	a_i	m_i
1	34	0.1	0.01
2	36	0.2	0.02
3	38	0.3	0.03
4	40	0.4	0.04

Tabla 3: Valores de referencia figura 4

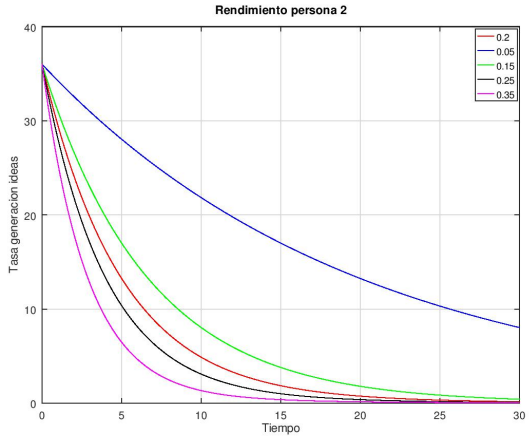

Figura 4: Variación factor de decaimiento $n = 4$

Observaciones:

Tras las pruebas anteriores podemos afirmar que el modelo, en su estructura algebraica, es muy sensible a los valores que se asignen al factor de decaimiento, ya que es posible capturar el rendimiento cuando las personas tienen distinto valor asociado a este parámetro. Las curvas solución indican claramente que mientras menor sea el valor asignado a a_i mayor será el rendimiento de la persona. En tanto, mientras mayor sea el valor asignado a a_i menor será el rendimiento de la persona. Este comportamiento se mantiene si aumenta el número de personas.

En definitiva, el modelo es capaz de capturar la dinámica del fenómeno de decaimiento, en su forma cualitativa y algebraica, en relación a lo que se observa numéricamente.

Prueba 2: Análisis del factor de acomodación

En esta sección se hará un análisis de sensibilidad en el factor de acomodación asignado a la persona 2 (0,02) en dos grupos de lluvia de ideas ($n = 3, 4$). La figura 5 muestra el rendimiento de x_2 en un grupo de lluvia de ideas compuesta por tres personas cuando presenta distintos valores asociados a su factor de acomodación; los valores de referencia para los parámetros, en esta simulación, se encuentran el la tabla 2. Luego, en la figura 6, se muestra el rendimiento de x_2 en un grupo de cuatro personas cuando presenta distintos valores asociados a su factor de acomodación; los valores de referencia para los parámetros, en esta simulación, se encuentran el la tabla 3. La finalidad es analizar la sensibilidad a variaciones del factor de acomodación en diferentes grupos de lluvia de ideas. Las variaciones al parámetro de acomodación (m_2) está explícito en cada figura.

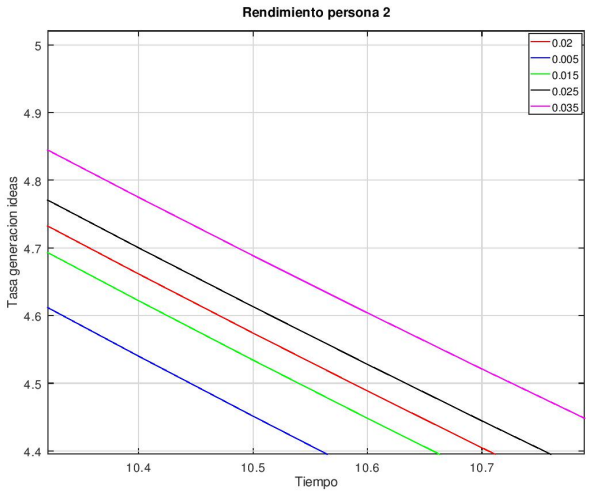

Figura 5: Variación factor de acomodación $n = 3$

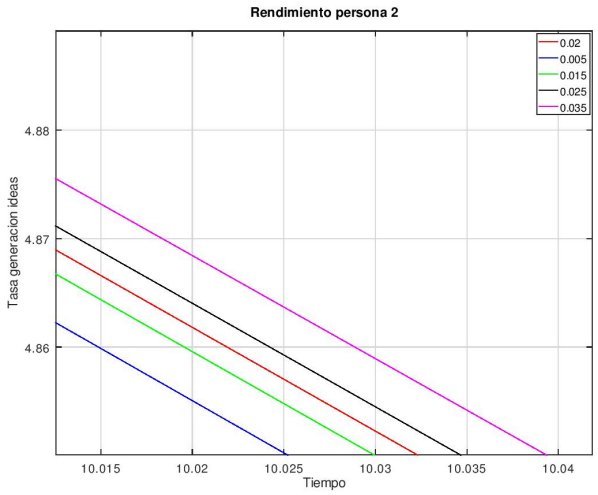

Figura 6: Variación factor de acomodación $n = 4$

En la siguiente simulación se busca explorar nuevos valores para el factor de acomodación de la persona 2 en un grupo de lluvia de ideas compuesta por tres personas, con el fin de capturar la dinámica de este fenómeno; los valores de referencia para los parámetros, en esta simulación, se encuentran el la tabla 2. En tanto los valores específicos asociados a m_2 se encuentran explícitos en el gráfico.

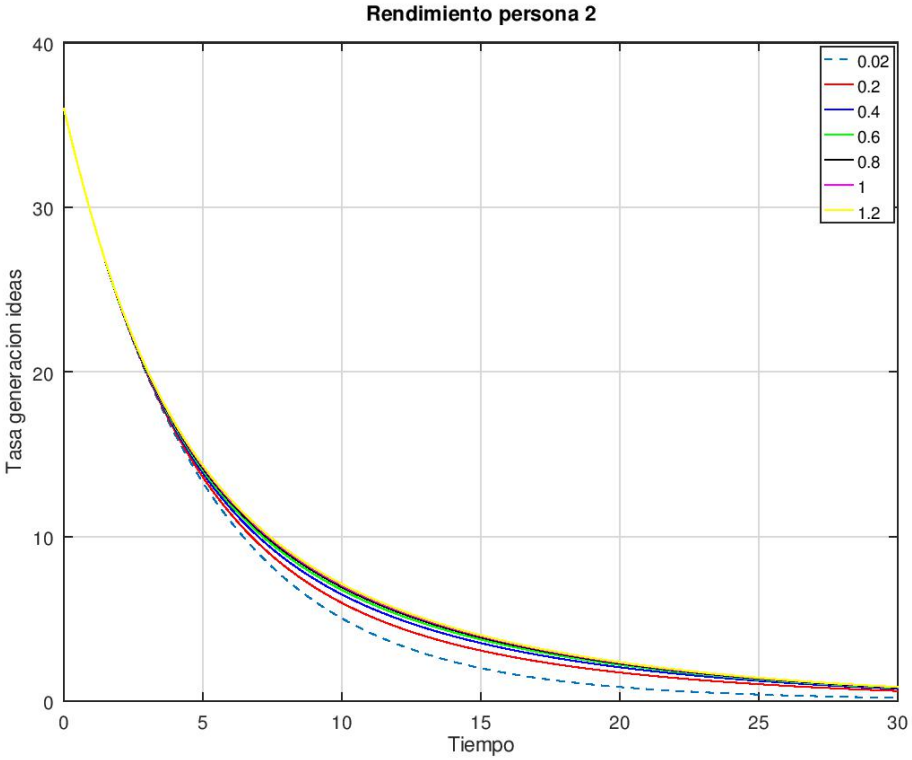

Figura 7: Variación factor de acomodación $n = 3$

Observaciones:

A medida que aumenta el factor de acomodación la curva solución sube, vale decir aumenta el rendimiento de la persona, pero no de forma significativa. En cuanto a la parte numérica podemos afirmar que el modelo discrimina muy poco en cuanto a rendimiento cuando las personas tienen distinto factor de acomodación. El modelo, en su estructura algebraica o formulación, no tiene la capacidad de capturar y discriminar el fenómeno de acomodación, ya que a pesar de que se cambiaron los valores para el factor de acomodación para la persona, las curvas siguen siendo muy parecidas, es decir, el rendimiento es muy parecido. También se podría afirmar que el fenómeno de acomodación que se da en la persona no tenga un alto impacto en el contexto de una lluvia de ideas por escrito, la diferencia en el rendimiento de la persona no será significativa.

Prueba 3: Análisis de sensibilidad para la condición inicial

En la siguiente simulación[4] se hará un análisis de sensibilidad para la condición inicial. El objetivo es analizar la sensibilidad a variaciones de la condición inicial y cómo esto influye en la evolución del proceso en el rendimiento grupal e individual.

La tabla 4 muestra los valores referenciales de la figura 8:

Persona	x_0	a_i	m_i
1	15	0.2	0.02
2	20	0.2	0.02
3	25	0.2	0.02
4	30	0.2	0.02

Tabla 4: Valores de referencia figura 8

El gráfico 1 muestra el rendimiento global del grupo ($n = 3$) cuando todos sus integrantes tienen asignada la misma condición inicial (15); en tanto los demás parámetros son asignados según tabla 4. El gráfico 2 muestra el rendimiento de la persona 1 en un grupo de tres y cuatro personas, con las mismas condiciones de los parámetros del gráfico 1. El gráfico 3 muestra el rendimiento global del grupo ($n = 3$) cuando sus integrantes tienen asignado los parámetros en el mismo orden que se presenta en la tabla 4, con diferente condición inicial. En tanto, el gráfico 4 muestra el rendimiento de la persona 1 en un grupo de tres y cuatro personas, los valores son asignados según tabla 4, se analiza el rendimiento de esta persona con la misma condición inicial en estos dos grupos de trabajo.

[4]Para mayor detalle revisar anexos sección B ejemplos de ejecución B.1

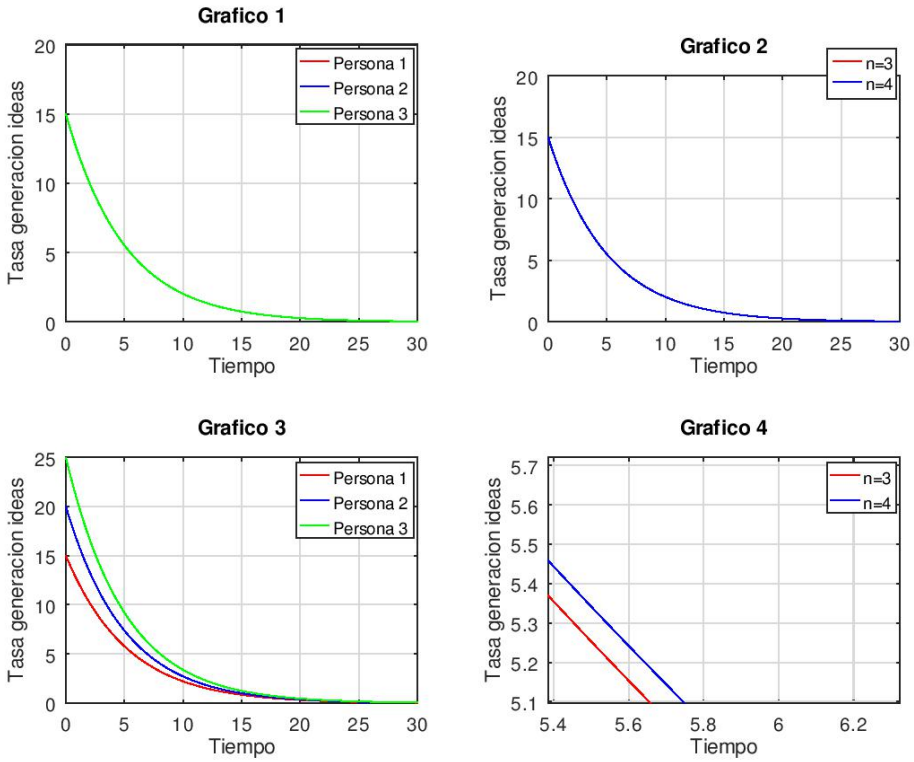

Figura 8: Variación x_0

Observación:

Según figura 8, gráfico 1 y 2, se puede afirmar que cuando no existe variación en la condición inicial el desempeño global del grupo y de cada individuo es el mismo, independiente del número de integrantes. En tanto, en el gráfico 3, es posible afirmar que al variar la condición inicial, aparentemente, implica una traslación en las curvas solución, es decir, provoca un impacto en el desempeño de cada individuo y no del grupo. Por último, el gráfico 4 permite afirmar que, si se mantiene x_0 cuando aumenta n mayor será el rendimiento de la persona.

En resumen, tras las pruebas anteriores, es posible conjeturar que el modelo, en su estructura algebraica, es muy sensible al factor de decaimiento, no así para el factor de acomodación, pues sólo logra capturar la dinámica de este fenómeno en forma cualitativa, ya que a pesar que se cambiaron los valores para m_i las curvas solución arrojan un rendimiento similar, no fue posible observar que discrimine en el rendimiento de una persona cuando presenta un factor de acomodación más alto, esta intente aumentar su rendimiento de forma significativa.

Los siguientes valores admisibles se justifican a partir del análisis de las pruebas anteriores y considerando el contexto de una lluvia de ideas por escrito en grupos de tres a siete integrantes:

Parámetro	**Rango**
Condición inicial	$0 \leq x_0 \leq 40$
Decaimiento	$0{,}1 \leq a_i \leq 0{,}7$
Acomodación	$0{,}01 \leq m_i \leq 1{,}2$

Tabla 5: Rangos razonables para los parámetros del modelo

Observación: Los parámetros pueden ser asignados de manera ascendente o descendente. No hay restricciones para los ordenes de magnitud. Además, aunque la condición inicial sea cero, el desempeño es leve en la generación de ideas.

4.1.2. Evaluar el impacto de la condición inicial en el rendimiento del grupo

Esta segunda parte del estudio numérico está enfocada en analizar los efectos de x_0 en el modelo matemático (1). Para ello, se resuelve el modelo no lineal de lluvia de ideas por escrito propuesto en [4] con grupos de entre tres a siete participantes. Específicamente, se analizarán grupos de tres, cinco y siete personas. La solución numérica, en los grupos seleccionados, se hará mediante el comando *lsode* de *Octave*. En cuanto a los valores numéricos que se asignarán a los parámetros de decaimiento y acomodación son los mismos que se presentaron en el trabajo de Coskun y Yilmaz (2009), es decir 0,2 para el factor de decaimiento y 0.02 para el factor de acomodación. En este caso, no se hará variación en los parámetros señalados, sólo en el objeto de estudio que es la condición inicial, ésta variará de forma ascendente y descendente con la finalidad de capturar su efecto en el rendimiento de los grupos.

El siguiente cuadro muestra los valores numéricos de cada integrante del grupo para ambas simulaciones:

x_i	$x(0)$	a_i	m_i
x_1	24	0.2	0.02
x_2	26	-	-
x_3	28	-	-
x_4	30	-	-
x_5	32	-	-
x_6	34	-	-
x_7	36	-	-

Tabla 6: Valores numéricos asociados a la condición inicial, factor de decaimiento y acomodación

Las siguientes simulaciones [5] muestran la comparación entre cada grupo cuando la condición inicial entre cada persona está dada, primero, de forma ascendente y luego de forma descendente. Por ejemplo, en un grupo de cinco personas, forma ascendente se le asignará la menor condición inicial (24) a la persona 1 (x_1) y la mayor condición inicial (28) a la persona 3 (x_3); y viceversa para el caso descendente.

[5] Revisar anexos en sección B ejemplos de ejecución B.2

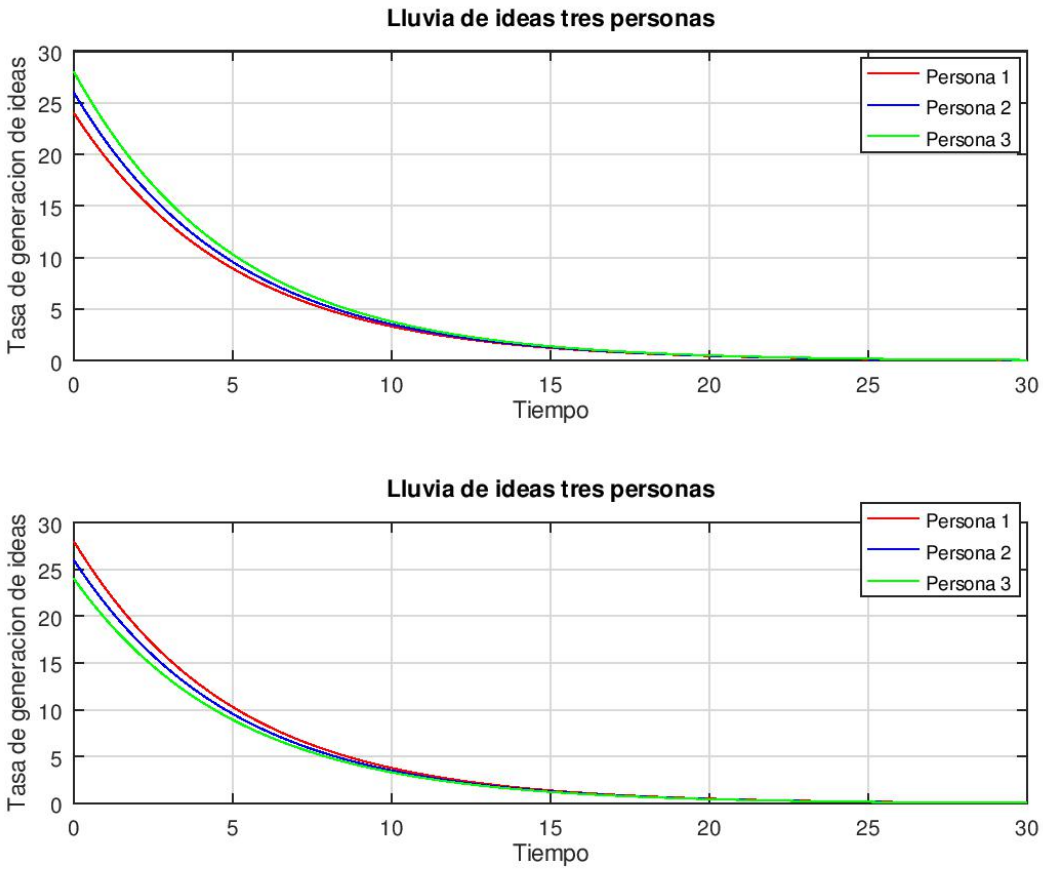

Figura 9: Variación condición inicial forma ascendente y descendente

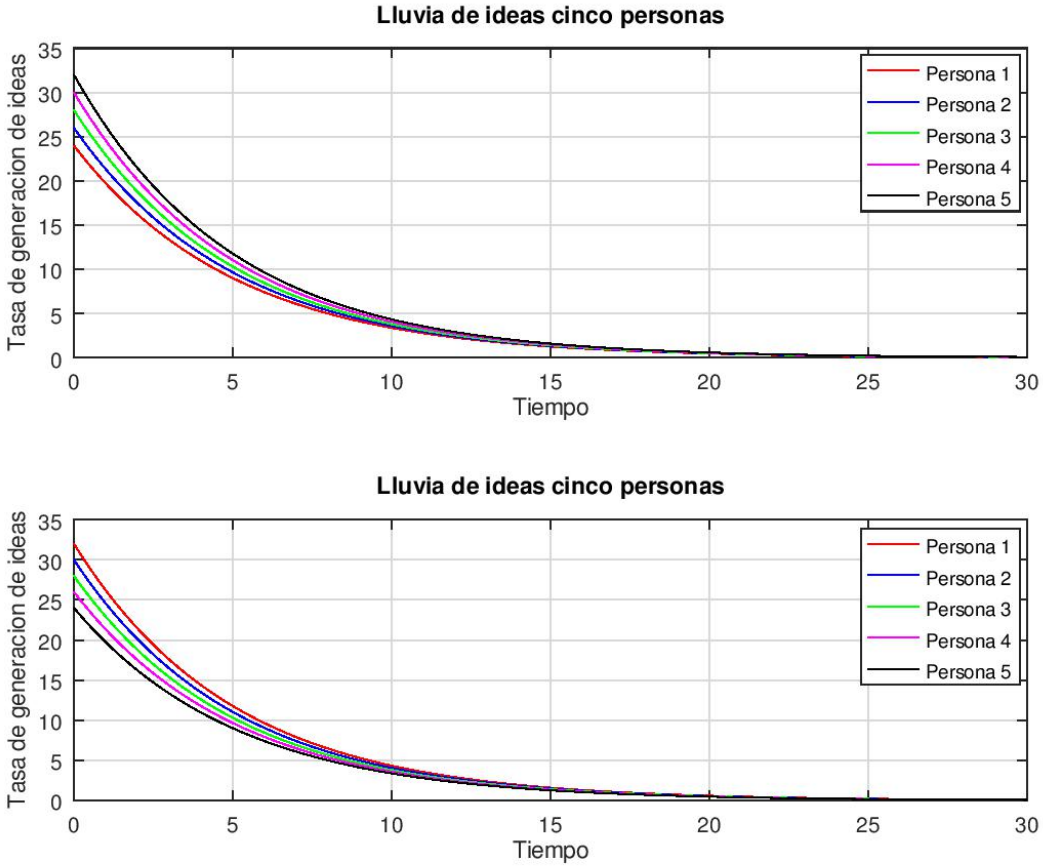

Figura 10: Variación condición inicial forma ascendente y descendente

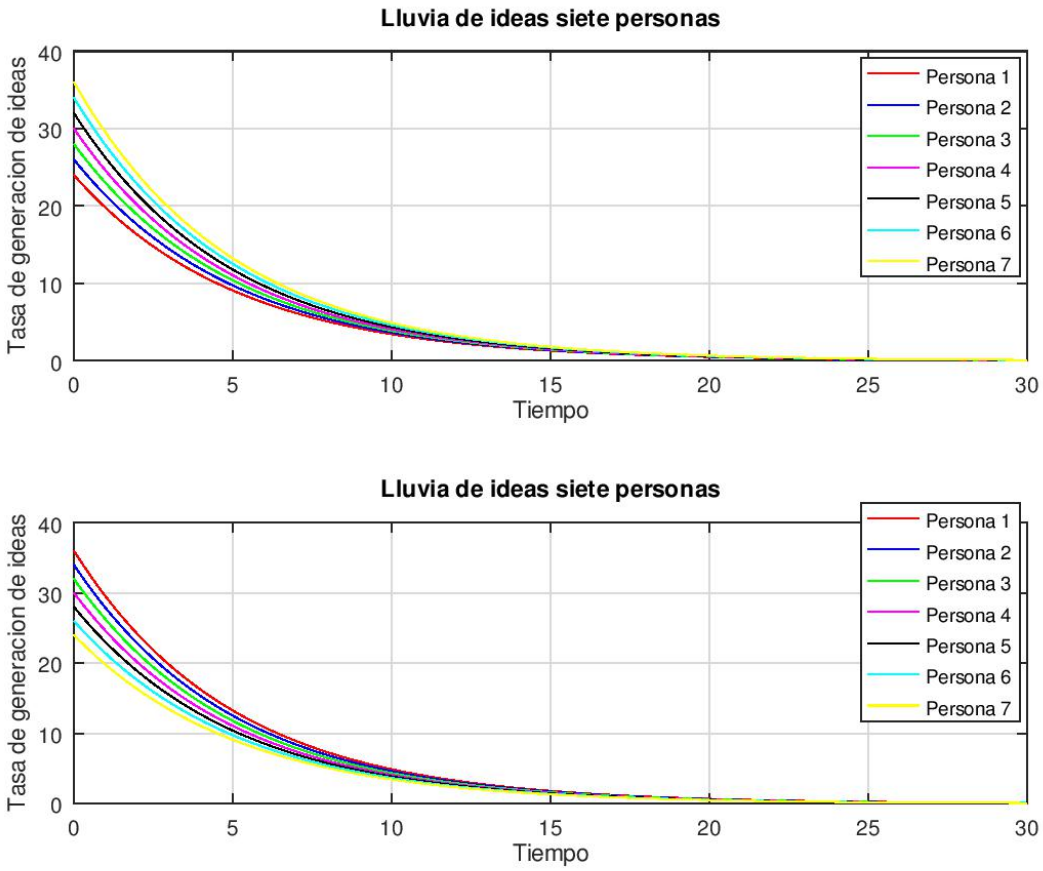

Figura 11: Variación condición inicial forma ascendente y descendente

De las figuras anteriores podemos afirmar que bajo la condición de no alterar los parámetros de decaimiento y acomodación, el sujeto que comienza con menor condición inicial (Persona 1 en el gráfico superior de cada figura) tendrá el más bajo rendimiento a lo largo de toda la sesión. Ahora, si esta misma persona comienza con la mayor condición inicial tendrá el más alto rendimiento. Por tanto, la condición inicial es un factor que no afecta en forma significativa el rendimiento del grupo sino que en la producción de ideas de cada individuo, además, indican una traslación en las curvas solución de cada sistema. En cada gráfico es posible observar que a medida que $t \to \infty$, $X(t) \to 0$.

4.1.3. Evaluar el impacto del número de integrantes en el rendimiento del grupo

Esta parte del estudio numérico está enfocada en evaluar el impacto del número de integrantes (n) en el rendimiento del grupo a través de la solución numérica que permitirá hacer comparaciones en relación a diversas variantes de los parámetros de decaimiento (a_i) y acomodación (m_i), la cual estará dividida en tres grupos de simulaciones:

- Comparación del rendimiento cuando varía sólo n.
- Comparación del rendimiento cuando varía n y a_i.
- Comparación del rendimiento cuando varía n y m_i.

A. Comparación del rendimiento cuando varía sólo n

La siguiente simulación representa el rendimiento de un grupo de lluvia de ideas de tres, cinco y otro de siete personas. En donde cada participante presenta la misma condición inicial ($x_0 = 36$) y el mismo factor de acomodación y decaimiento. El objetivo es analizar el rendimiento de los grupos cuando varía sólo el número de integrantes.

La tabla 7 muestra los valores numéricos de cada integrante:

n	x_i	$x(0)$	a_i	m_i
3	-	36	0.2	0.02
5	-	36	0.2	0.02
7	-	36	0.2	0.02

Tabla 7: Valores numéricos de referencia para los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en grupos de tres, cinco y siete personas.

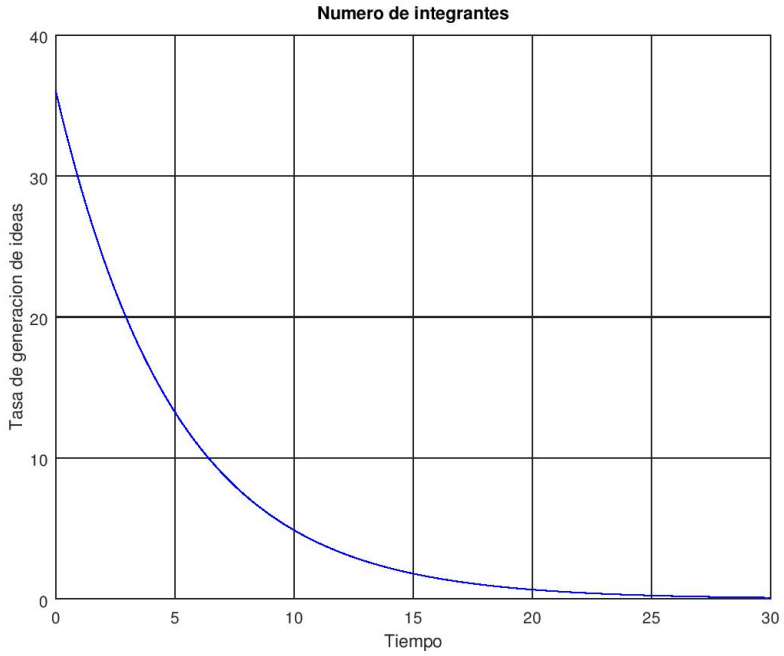

Figura 12: Comparación del desempeño tabla 7

De la figura anterior podemos afirmar que cuando las condiciones iniciales, factor de decaimiento y acomodación son las mismas para cada integrante en cualquier n, el rendimiento de cada grupo es el mismo a medida que transcurre el tiempo. En definitiva, como el rendimiento para cada participante es el mismo en cada grupo, este se ajusta a una sola curva.

En base a los resultados obtenidos en las curvas solución, nos hace cuestionar cuál es el n óptimo para producir la máxima productividad en una sesión de lluvia de ideas por escrito. Sin embargo, el modelo nos da evidencia que la productividad del grupo será decreciente de tipo exponencial. Por tanto, es necesario ver qué ocurre si varían los factores en el intercambio de ideas.

B. Comparación del rendimiento cuando varía n y a_i

Las siguientes simulaciones [6] representan grupos de lluvia de ideas por escrito con $n = 3, 4$. En donde cada participante presenta la misma condición inicial ($x_0 = 36$) y sólo varía el factor de decaimiento, éste tendrá una variación de 0,02 entre cada persona y será asignado de forma ascendente y descendente; por último, se hará una comparación del rendimiento de una persona con un mismo a_i en un grupo de tres y de cuatro. El objetivo es analizar si el rendimiento del grupo está determinado por el número de integrantes y la variación del factor de decaimiento.

La tabla 8 muestra en detalle los valores asignados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	36	0.16	0.02
x_2	36	0.18	0.02
x_3	36	0.20	0.02
x_4	36	0.22	0.02

Tabla 8: Valores numéricos de referencia para los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en grupos de tres y cuatro personas.

Observación: Cuando el factor de decaimiento sea asignado en forma ascendente se entiende que la persona 1 (x_1) tendrá como $a_1 = 0{,}16$, la persona 2 (x_2) tendrá como $a_2 = 0{,}18$ y la persona 3 (x_3) tendrá como $a_3 = 0{,}2$. Para el caso descendente se invierte este orden de magnitud.

La siguiente figura muestra el rendimiento de una lluvia de ideas compuesta por un grupo de tres y cuatro personas. Según tabla 8, la primera fila de gráficos representa una lluvia de ideas de tres personas, en donde el factor de decaimiento es asignado de forma ascendente (izquierda) y descendente (derecha). La segunda fila representa una lluvia de ideas de cuatro personas, el factor de decaimiento es asignado de forma ascendente y descendente, al igual que en el caso anterior.

[6] Para mayor detalle revisar anexos sección B ejemplos de ejecución B.3

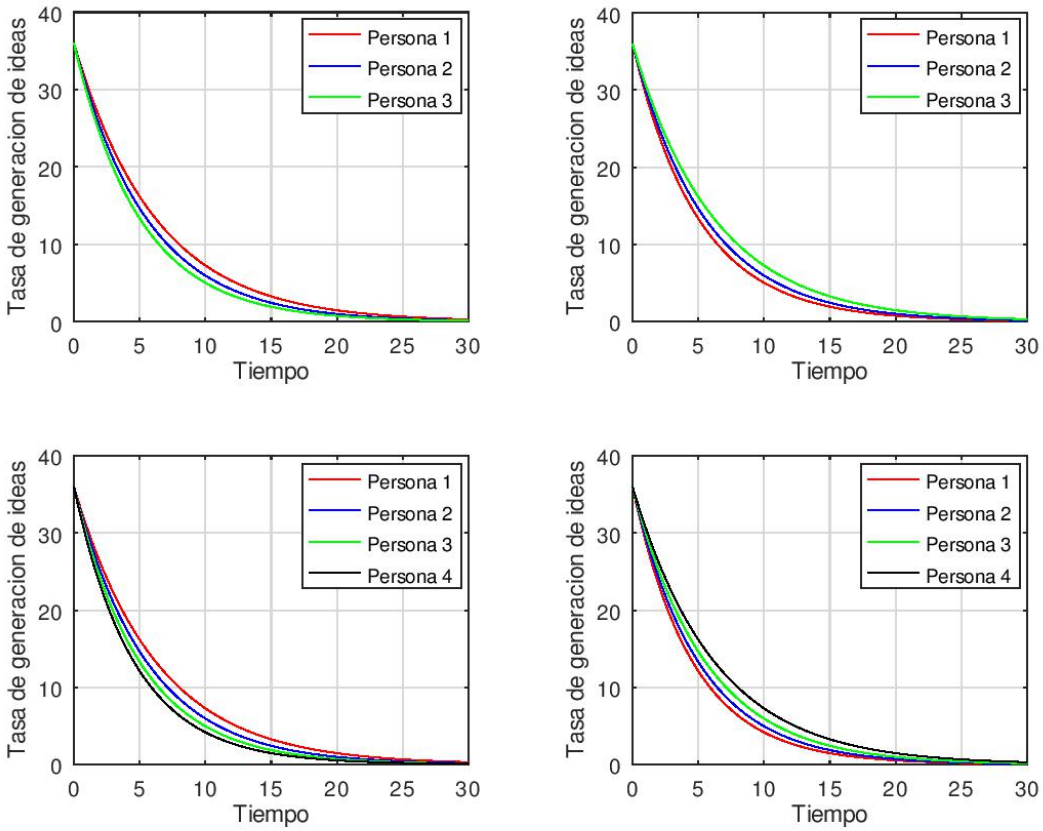

Figura 13: Varía factor de decaimiento de forma ascendente y descendente $n = 3, 4$

De las figuras anteriores podemos afirmar el número de integrantes que conforman una lluvia de ideas no afecta en el rendimiento del grupo si varía el factor de decaimiento, esto sólo incide en el rendimiento de cada persona, es decir, el participante que comienza con el menor factor de decaimiento tendrá el más alto rendimiento que los demás integrantes del grupo, mientras que el que tiene el mayor factor de decaimiento tendrá el más bajo rendimiento.

La siguiente figura reafirma lo anteriormente señalado. Muestra el rendimiento de la persona 1 (x_1) en un grupo de 3 y 4, el a_i asignado para esta persona en los dos grupos es el mismo (0,16).

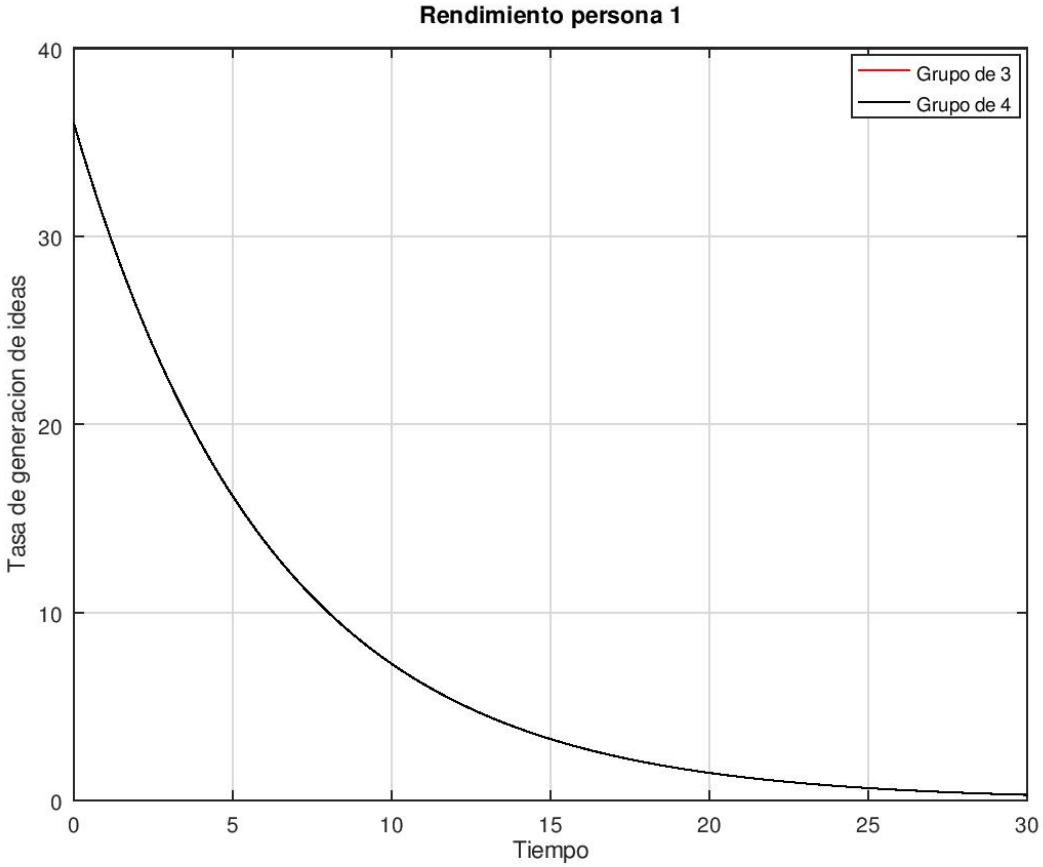

Figura 14: Factor de decaimiento de la persona 1 en un grupo de 3 y 4

C. Comparación del rendimiento cuando varía n y m_i

Las siguientes simulaciones representan grupos de lluvia de ideas por escrito con $n = 3, 4$. En donde cada participante presenta la misma condición inicial ($x_0 = 36$) y sólo varía el factor de acomodación, éste tendrá una variación de 0,01 entre cada persona y será asignado de forma ascendente y descendente; por último se hará una comparación del rendimiento de una persona con un mismo m_i en un grupo de tres y de cuatro. El objetivo es analizar si el rendimiento del grupo está determinado por el número de integrantes y la variación del factor de acomodación.

La tabla 9 muestra en detalle los valores asignados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	36	0.2	0.01
x_2	36	0.2	0.02
x_3	36	0.2	0.03
x_4	36	0.2	0.04

Tabla 9: Valores de referencia asociados a los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en grupos de tres y cuatro personas

Según tabla 9, la primera fila de gráficos de la figura 15 representa una lluvia de ideas de tres personas, en donde el factor de acomodación es asignado de forma ascendente (izquierda) y descendente (derecha). La segunda fila representa una lluvia de ideas de cuatro personas, el factor de acomodación es asignado de forma ascendente y descendente, al igual que en el caso anterior.

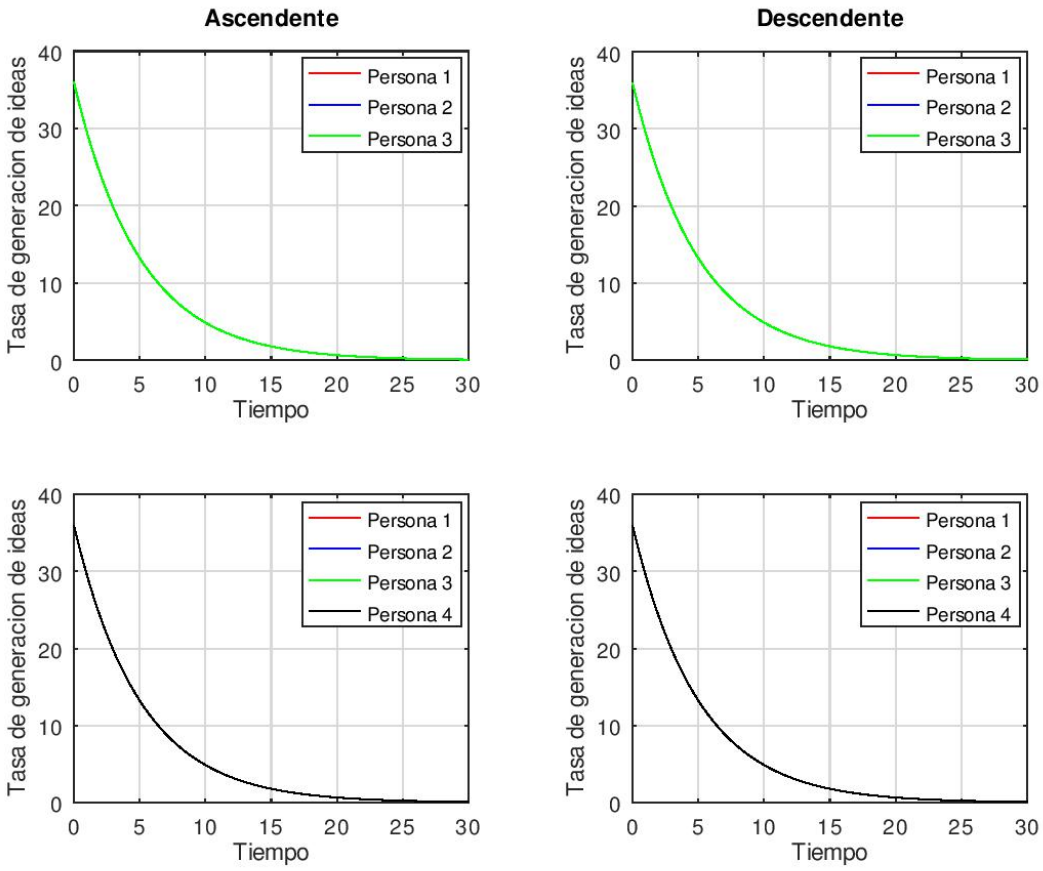

Figura 15: Factor de decaimiento de la persona 1 en un grupo de 3 y 4

De la figura anterior podemos afirmar que el número de integrantes no influye en el rendimiento del grupo si sólo varía el factor de acomodación, pues como se observa, el rendimiento se ajusta a una sola curva, lo que indica que el rendimiento de un grupo de tres o cuatro personas será el mismo.

4.1.4. Evaluar el impacto de cada uno de los factores y su interacción.

A. Evaluar el impacto del factor de decaimiento

En este apartado se estudia el desempeño de un grupo de tres personas. El objetivo es determinar cómo influye la variación del factor de decaimiento en el desempeño del grupo.

La tabla 10 muestra en detalle los valores referenciales asociados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	36	0.1	0.02
x_2	36	0.2	0.02
x_3	36	0.3	0.02

Tabla 10: Valores de referencia asociados a los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en un grupo de tres personas

La siguiente figura muestra la simulación del desempeño de este grupo de lluvia de ideas. En el gráfico 1 el factor de decaimiento es asignado según la tabla 9, aquí la persona 1 (x_1) tiene el factor de decaimiento más bajo (0.1). En tanto en el gráfico 2 se cambia el orden de magnitud, por lo que la persona 1 tiene el factor de decaimiento más alto (0.3). Finalmente, en el gráfico 3, se hace una comparación del gráfico 1 y 2, mostrando el desempeño de la persona 1.

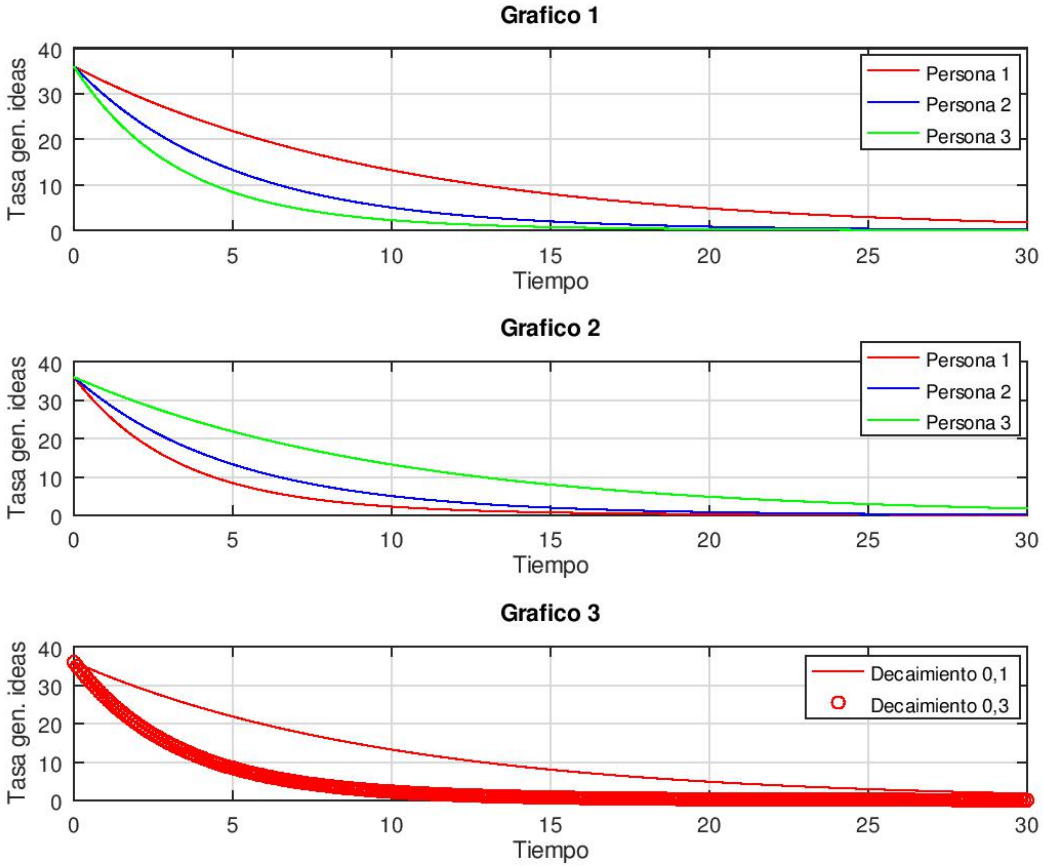

Figura 16: Impacto factor de decaimiento

De la figura anterior podemos afirmar que el factor de decaimiento, aparentemente, sólo produce un impacto en el desempeño de cada individuo y no del grupo en general, pues si una persona tiene un factor de decaimiento más bajo que los demás integrantes del grupo tendrá el rendimiento más alto y viceversa, lo cual queda explícito en el gráfico 3.

B. Comparación del desempeño en relación a la combinación del factor de decaimiento y la condición inicial

En este apartado se estudia el desempeño de una lluvia de ideas por escrito compuesta por un grupo de tres personas. El objetivo es comparar el desempeño del grupo en relación a la variación simultánea del factor de decaimiento y la condición inicial.

La tabla 11 muestra los valores de referencia asignados a los participantes de las simulaciones que se presentan a continuación. El factor de decaimiento tendrá una variación de 0.1 entre cada persona.

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	32	0.1	0.02
x_2	34	0.2	0.02
x_3	36	0.3	0.02

Tabla 11: Valores de referencia asociados a los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en un grupo de tres personas

Las siguientes simulaciones muestran el desempeño de un grupo de lluvia de ideas de tres personas. En el gráfico 1 la condición inicial y factor de decaimiento es asignada en el mismo orden que se presenta en la tabla anterior, es decir, la persona que tiene la menor condición inicial se le asigna el menor factor de decaimiento. En tanto, en el gráfico 2, sólo se invierte el orden de magnitud del factor de decaimiento, vale decir, que la persona que tiene la menor condición inicial se le asignó el mayor factor de decaimiento.

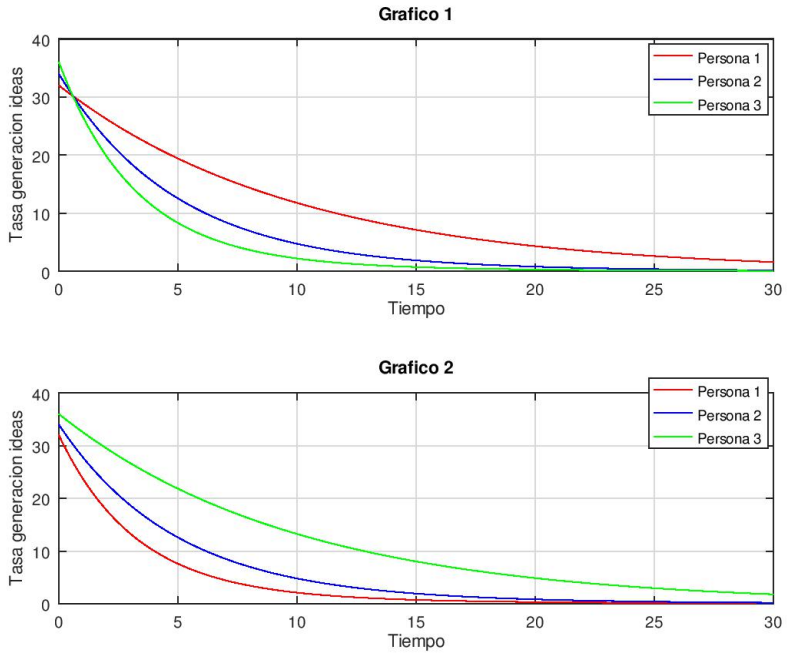

Figura 17: Impacto factor de decaimiento y condición inicial

De la figura anterior podemos afirmar a través del gráfico 1 que la persona (x_1) que comienza con la menor condición inicial y el más bajo factor de decaimiento intentará aumentar su rendimiento. Además, la persona que comienza

con la mayor condición inicial (x_3) y el factor de decaimiento más alto disminuye su rendimiento con respecto a los demás integrantes del grupo. Por tanto, esto nos permite afirmar que el efecto en el rendimiento de los integrantes del grupo está influenciado de forma significativa por el factor de decaimiento en conjunto con la condición inicial.

La tabla 12 muestra los valores de referencia asignados a los participantes de las simulaciones que siguen a continuación. El factor de decaimiento tendrá una variación de 0.02 entre cada persona.

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	32	0.16	0.02
x_2	34	0.18	0.02
x_3	36	0.20	0.02

Tabla 12: Valores de referencia asociados a los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en un grupo de tres personas

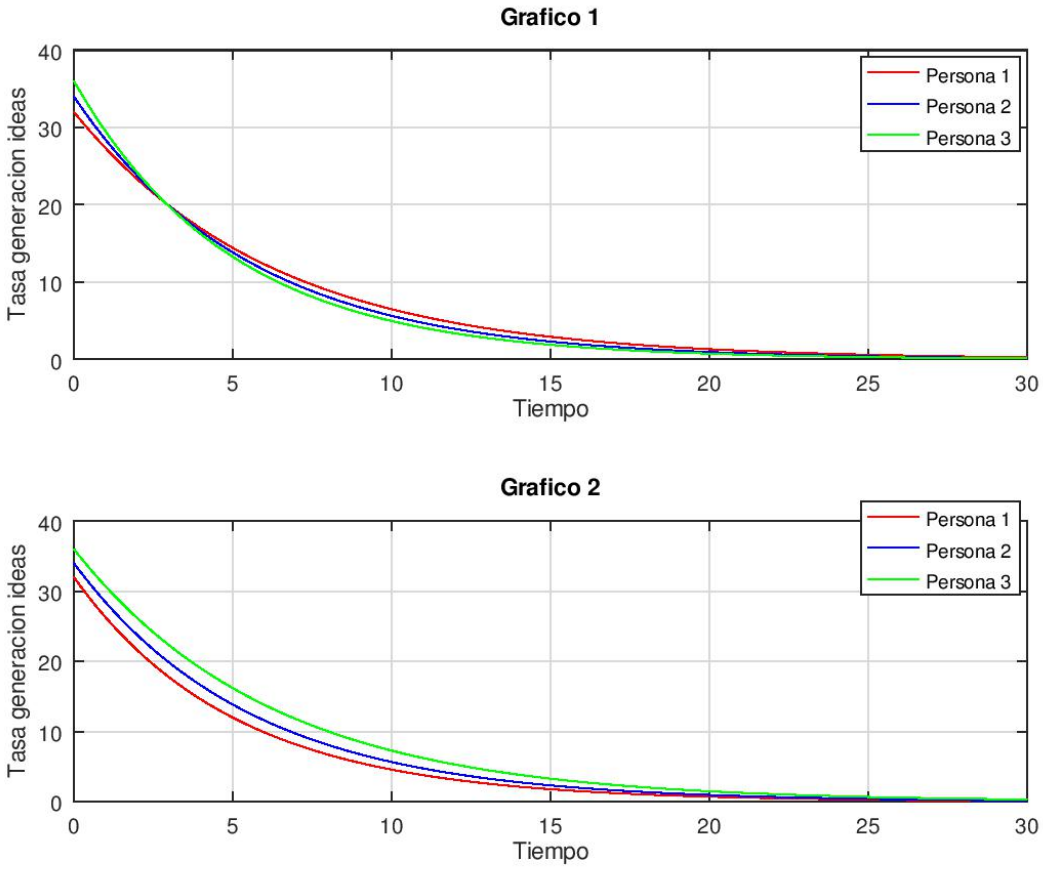

Figura 18: Impacto factor de decaimiento y condición inicial

A través de las simulaciones observadas en la figura 17 y 18, podemos afirmar que se puede capturar mejor la dinámica del fenómeno de decaimiento con los valores asignados en la figura 17, es decir, con una variación de 0.1 entre cada persona.

C. Comparación del desempeño en relación a la combinación de la condición inicial y factor de acomodación

En este apartado se estudia el desempeño de una lluvia de ideas por escrito compuesta por un grupo de tres personas. El objetivo es comparar el desempeño del grupo en relación a la variación simultánea del factor de acomodación y la condición inicial.

La tabla 13 muestra los valores referenciales asignados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	32	0.2	0.01
x_2	34	0.2	0.03
x_3	36	0.2	0.05

Tabla 13: Valores de referencia asociados a los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en un grupo de tres personas

En el gráfico 1 de la figura 19 los valores son asignados en el mismo orden de la tabla 13. En tanto, en el gráfico 2 se cambia el orden de magnitud para m_i, vale decir, x_1 tendrá como $m_1 = 0{,}05$.

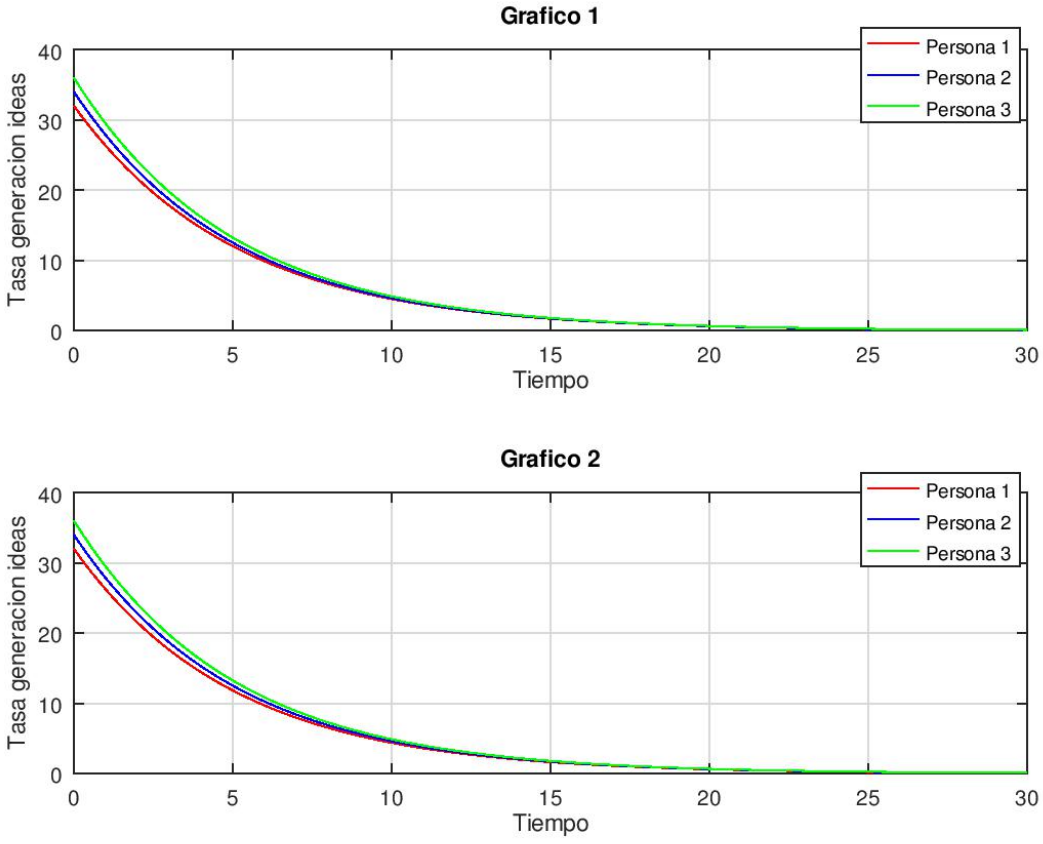

Figura 19: Impacto factor de acomodación y condición inicial

De la figura anterior podemos afirmar que la interacción entre el factor de acomodación y la condición inicial no tiene incidencia en el rendimiento del grupo, independiente si estos son asignados en diferente orden de magnitud, pues, como se observa, el desempeño del grupo es el mismo en cada caso.

A continuación, simularemos el caso para una lluvia de ideas compuesta por tres integrantes, Los valores de referencia se encuentran en la tabla 13. En este caso el participante 1 (x_1) tendrá el m_i más bajo de la tabla (0.01) y la mayor condición inicial (36), mientras que los demás tendrán el m_i más alto, pero el mismo (0.05).

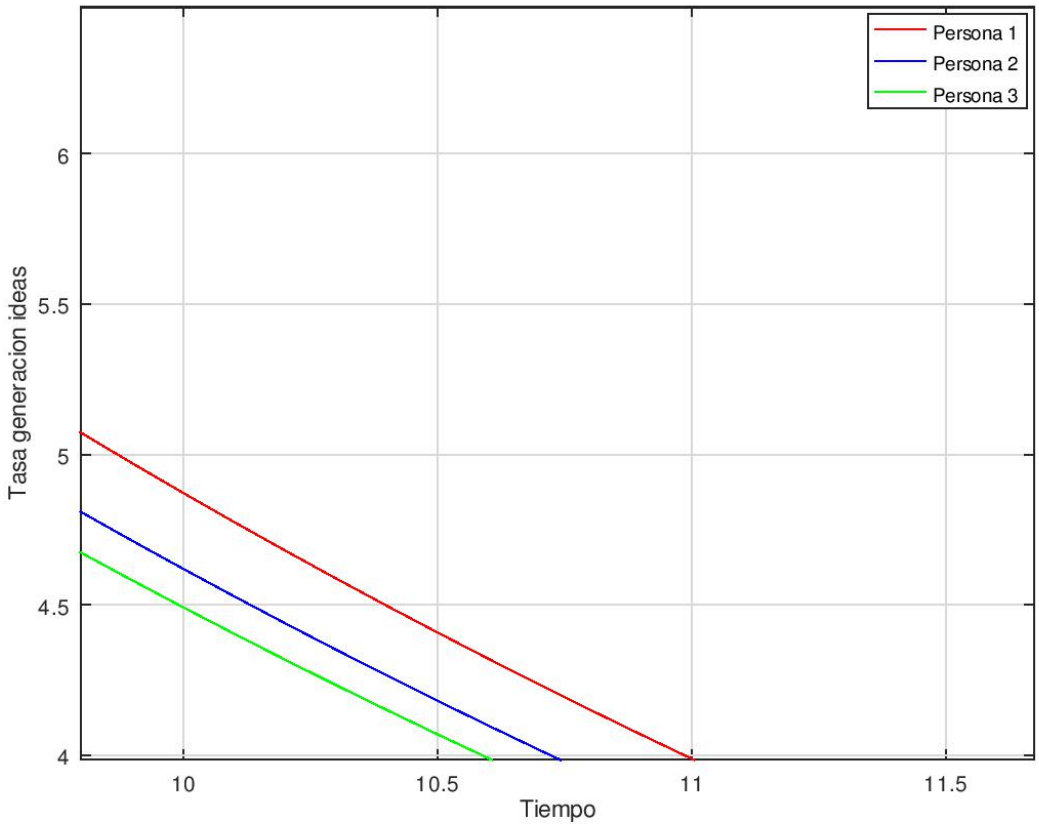

Figura 20: Impacto factor de acomodación y condición inicial

De la figura anterior es posible capturar un cambio en el desempeño de los participantes cuando cambian las variantes de la interacción entre los factores de acomodación y condición inicial que se asignan a cada persona. Podemos afirmar que el participante que comienza con la mayor condición inicial y menor factor de acomodación que los demás, no intentará bajar su rendimiento y tendrá el rendimiento más alto del grupo.

D. Impacto en el rendimiento del grupo de la interacción entre los factores a_i, m_i y x_0

En este apartado se estudia el desempeño de una lluvia de ideas por escrito compuesta por un grupo de tres personas. El objetivo es comparar el desempeño del grupo en relación a la variación simultánea del factor de acomodación, decaimiento y la condición inicial.

La tabla 14 muestra los valores referenciales asociados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	32	0.1	0.01
x_2	34	0.2	0.02
x_3	36	0.3	0.03

Tabla 14: Valores de referencia asociados a los factores de decaimiento, acomodación y condiciones iniciales en un grupo de tres personas

Las siguientes simulaciones [7] muestran el desempeño de un grupo de lluvia de ideas de tres personas. Los valores de referencia se encuentran en la tabla 14, en cada simulación se hacen cambios en los ordenes de magnitud de los parámetros. En el gráfico 1 los valores de los parámetros asignados en el mismo orden que se presenta en la tabla 13. En el gráfico 2 sólo se cambia el orden de magnitud para el factor de decaimiento. En el gráfico 3 sólo se cambia el orden de magnitud del factor de acomodación. Por último, en el gráfico 4 sólo se cambia el orden de magnitud de la condición inicial.

[7] Para mayor detalle revisar anexos sección B ejemplos de ejecución B.4

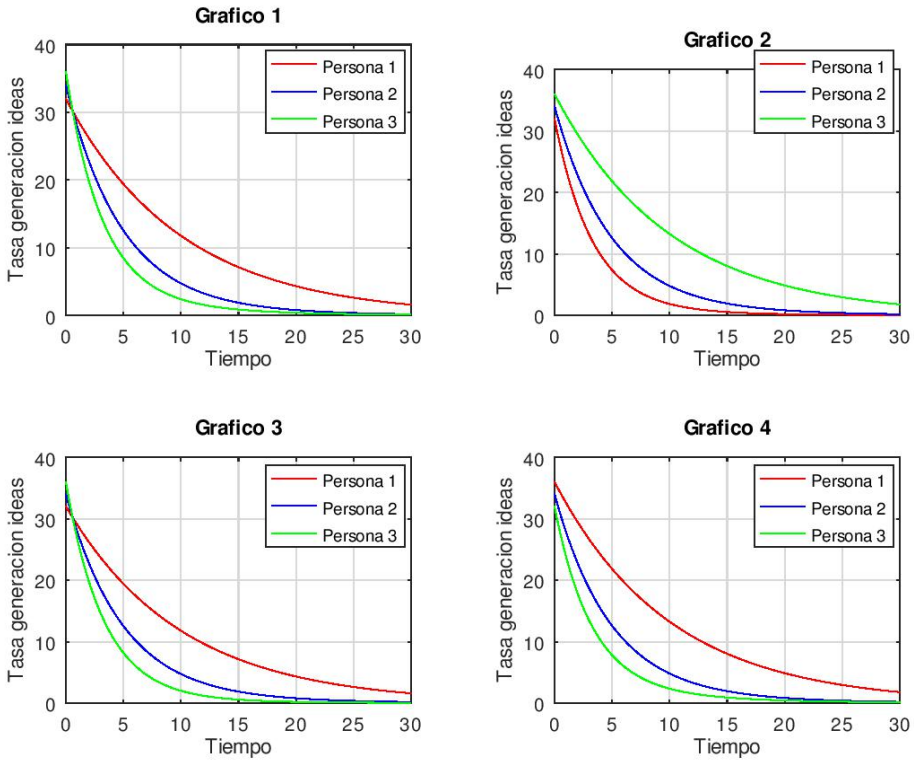

Figura 21: Impacto de la interacción entre a_i, m_i y x_0

A partir de la figura 21 podemos afirmar que:

Según gráfico 1: Si una persona que participa de una lluvia de ideas por escrito presenta un x_0, factor a_i y m_i más bajo que los demás miembros del grupo, intentará aumentar su rendimiento.

Según gráfico 2: Si una persona que participa de una lluvia de ideas por escrito presenta un x_0 y factor y m_i más bajo que los demás miembros del grupo y; su factor de decaimiento es más alto que los demás miembros del grupo, tendrá el desempeño más bajo durante toda la sesión.

Según gráfico 3: Si una persona que participa de una lluvia de ideas por escrito presenta un x_0 y factor y a_i más bajo que los demás miembros del grupo y; su factor de acomodación es más alto que los demás miembros del grupo, intentará aumentar su rendimiento.

Según gráfico 4: Si una persona que participa de una lluvia de ideas por escrito presenta un factor a_i y factor m_i más bajo que los demás miembros del grupo y; comienza con un x_0 más alta, tendrá el desempeño más bajo durante toda la sesión.

4.1.5. Grupos con tendencias particulares

En este apartado se harán simulaciones de diferentes grupos de trabajo en donde se analizará el comportamiento de la persona 1 (x_1) bajo diversas condiciones en la asignación de parámetros. El objetivo es comparar el desempeño en relación a la combinación entre la condición inicial y los parámetros de acomodación y decaimiento en diversos n, evaluando el impacto en el rendimiento de una persona cuando varían e interactúan estos factores.

A. Comparación del desempeño en relación a la combinación de la condición inicial y factor de acomodación en diferentes grupos de trabajo

Simularemos [8] el rendimiento de x_1 cuando trabaja en un grupo de tres, cinco y siete personas. Se evalúa la interacción entre el parámetro de acomodación y condición inicial; y cómo estos influyen en el rendimiento de una persona en estos tres grupos de trabajo, bajo diversas condiciones de operación.

La tabla 15 muestra los valores de referencia asignados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	24	0.2	0.01
x_2	26	0.2	0.02
x_3	28	0.2	0.03
x_4	30	0.2	0.04
x_5	32	0.2	0.05
x_6	34	0.2	0.06
x_7	36	0.2	0.07

Tabla 15: Valores de referencia asignados a los factores de decaimiento, acomodación y condición inicial para $n = 3, 5, 7$

[8] Para mayor detalle revisar anexos sección ejemplos de ejecución B.5.1

La figura 22 muestra el rendimiento de la persona 1, éste tendrá la condición inicial y factor de acomodación más bajo; los valores son asignados como se muestra en la tabla 15. El objetivo es comparar su rendimiento, bajo estas condiciones, cuando trabaja en un grupo de tres, cinco y siete integrantes.

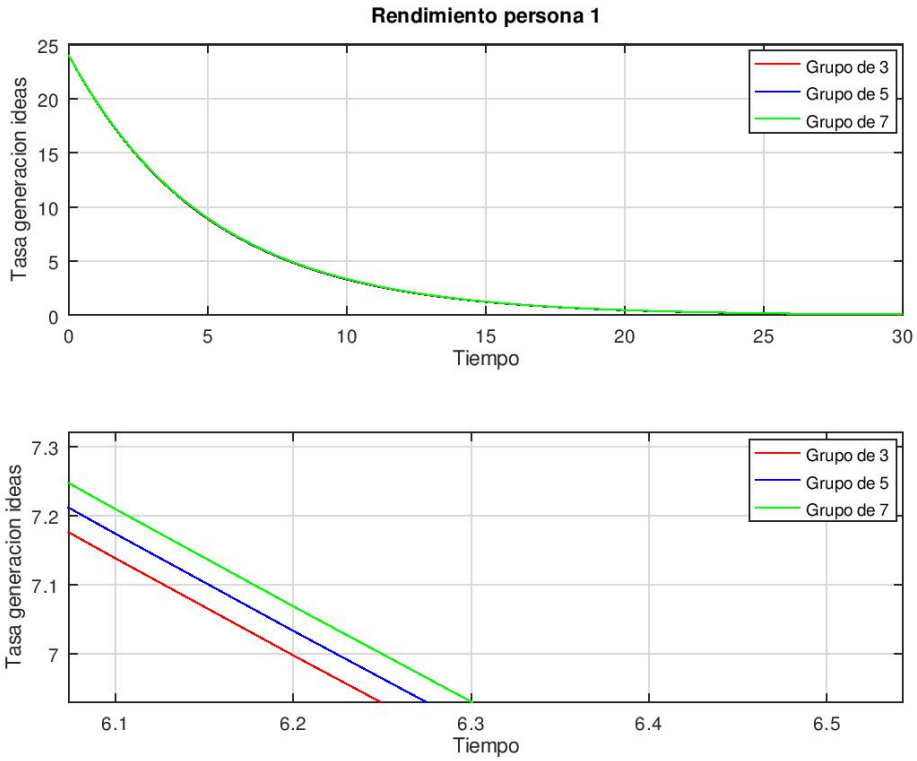

Figura 22: Rendimiento x_1 cuando varía m_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

De la figura anterior podemos afirmar que mientras menor sea la inclinación al factor de acomodación mayor será la productividad de una persona en diversos grupos de trabajo, pues se puede comparar que el desempeño va en aumento a medida que n aumenta.

En la siguiente simulación, sólo se cambiará el orden de magnitud asignado en la tabla 15 para el parámetro de acomodación, por lo que la persona 1 tendrá el factor de acomodación más alto, es decir en un grupo de tres personas $m_1 = 0{,}03$, en un grupo de cinco personas $m_1 = 0{,}05$ y en un grupo de siete personas $m_1 = 0{,}07$. En tanto su condición inicial será la más baja (24) en los tres grupos.

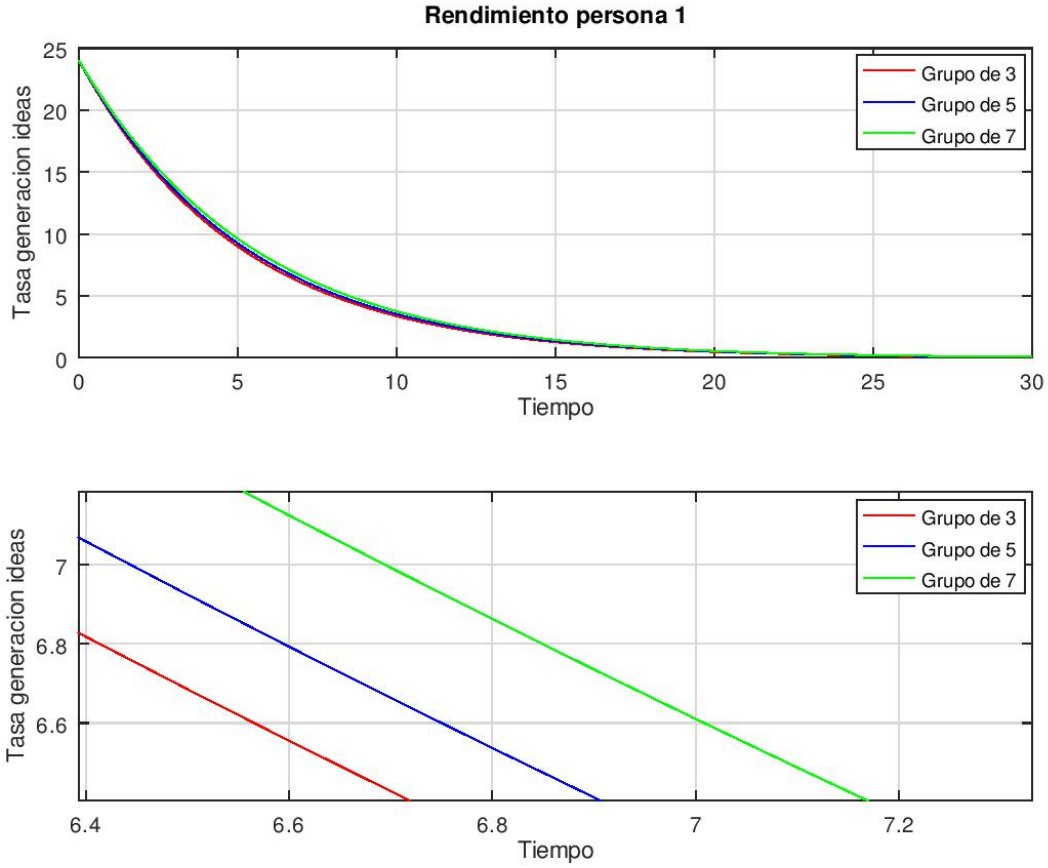

Figura 23: Rendimiento x_1 cuando varía m_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

Según la figura 23 se puede afirmar que mientras más grande sea la inclinación al factor de acomodación mayor será la productividad de la persona, como se muestra en el gráfico cuando la persona trabaja en un grupo de tres, cinco y siete personas tiene un factor de acomodación de 0.03, 0.05 y 0.07.

En la siguiente simulación, sólo se cambiará el orden de magnitud asignado en la tabla 15 para la condición inicial, por lo que la persona 1 tendrá la condición inicial más alta, es decir en un grupo de tres personas $x_0 = 28$, en un grupo de cinco personas $x_0 = 32$ y en un grupo de siete personas $x_0 = 36$. En tanto su factor de acomodación será el más bajo (0.01) en los tres grupos.

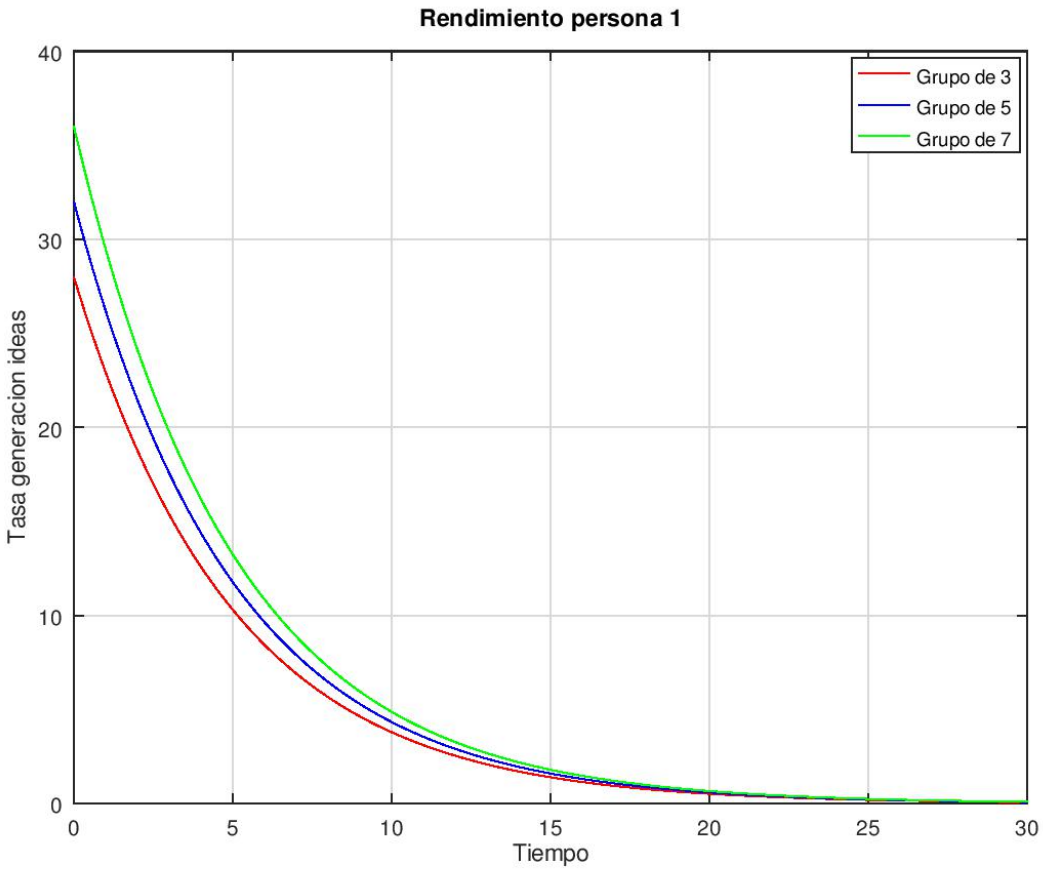

Figura 24: Rendimiento x_1 cuando varía m_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

En la siguiente simulación , sólo se cambiará el valor asignado en la tabla 15 para la condición inicial. En este caso,la persona 1 tendrá la condición inicial más alta de la tabla (36) y los demás integrantes la misma y la más baja de la tabla (24). Vale decir que en los tres grupo la persona 1 tendrá un $x_0 = 36$ y los demás integrantes la misma condición inicial pero la más baja de la tabla (24).

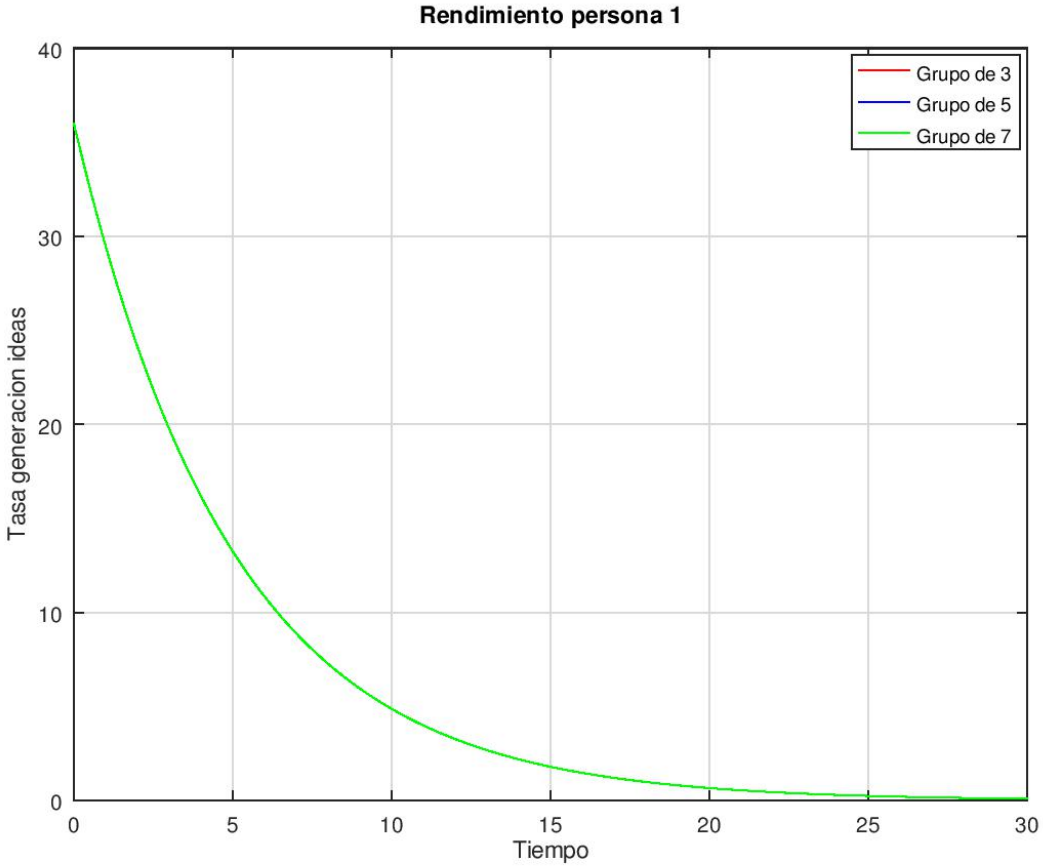

Figura 25: Rendimiento x_1 cuando varía m_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

Según la figura 25 podemos afirmar que si una persona tiene el menor factor de acomodación en cada grupo intentará aumentar su rendimiento sólo si su condición inicial aumenta a medida que aumenta el número de integrantes. Se puede observar que cuando trabaja en un grupo de tres tiene una condición inicial de 28, mientras que en un grupo de cinco ésta es 32. Esto queda explícito en la figura 20, pues aún teniendo la condición inicial mayor en cada grupo, pero la misma, el rendimiento de la persona no aumenta, es la misma. En resumen, el efecto que producen las condiciones iniciales en diferentes ordenes de magnitud en una lluvia de ideas altera de forma significativa en la producción de ideas de un individuo.

B. Comparación del desempeño en relación a la combinación de la condición inicial y factor de decaimiento en diferentes grupos de trabajo

En este apartado, al igual que el anterior, se hará la simulación del rendimiento de la persona 1 (x_1) cuando trabaja en un grupo de tres, cinco y siete personas. Se evalúa la interacción entre el parámetro de decaimiento y condición inicial; y como estos influyen el rendimiento de una persona en diversos grupos de trabajo, bajo ciertas condiciones de operación.

La tabla 16 muestra los valores de referencia asignados a cada persona:

Persona	x_0	a_i	m_i
x_1	24	0.1	0.02
x_2	26	0.2	0.02
x_3	28	0.3	0.02
x_4	30	0.4	0.02
x_5	32	0.5	0.02
x_6	34	0.6	0.02
x_7	36	0.7	0.02

Tabla 16: Valores de referencia asignados a los factores de decaimiento, acomodación y condición inicial para $n = 3, 5, 7$

La siguiente figura muestra la simulación [9] del rendimiento de la persona x_1 en un grupo de tres, cinco y siete personas. Los valores referenciales asignados a los parámetros de cada persona se muestran en la tabla 16. En el gráfico 1, los valores se asignan en el mismo orden de la tabla. En el gráfico 2, sólo se cambia el orden de magnitud de la condición inicial; por ejemplo, en un grupo de tres personas x_1, x_2 y x_3 tendrán como condición inicial 28, 26 y 24 respectivamente. En el gráfico 3, también se cambia el orden de magnitud de la condición inicial (tal como fue asignado en el gráfico 2) y del factor de decaimiento. Este último, en $n = 3$, x_1, x_2 y x_3 tendrán como factor de decaimiento 0.3, 0.2 y 0.1 respectivamente. El objetivo es analizar cómo varía el rendimiento de una persona cuando la condición inicial y factor de decaimiento es más alto o más bajo, cambiando ordenes de magnitud, en diversos grupos de trabajo.

[9] Para mayor detalle revisar anexos sección B ejemplos de ejecución B.5.2

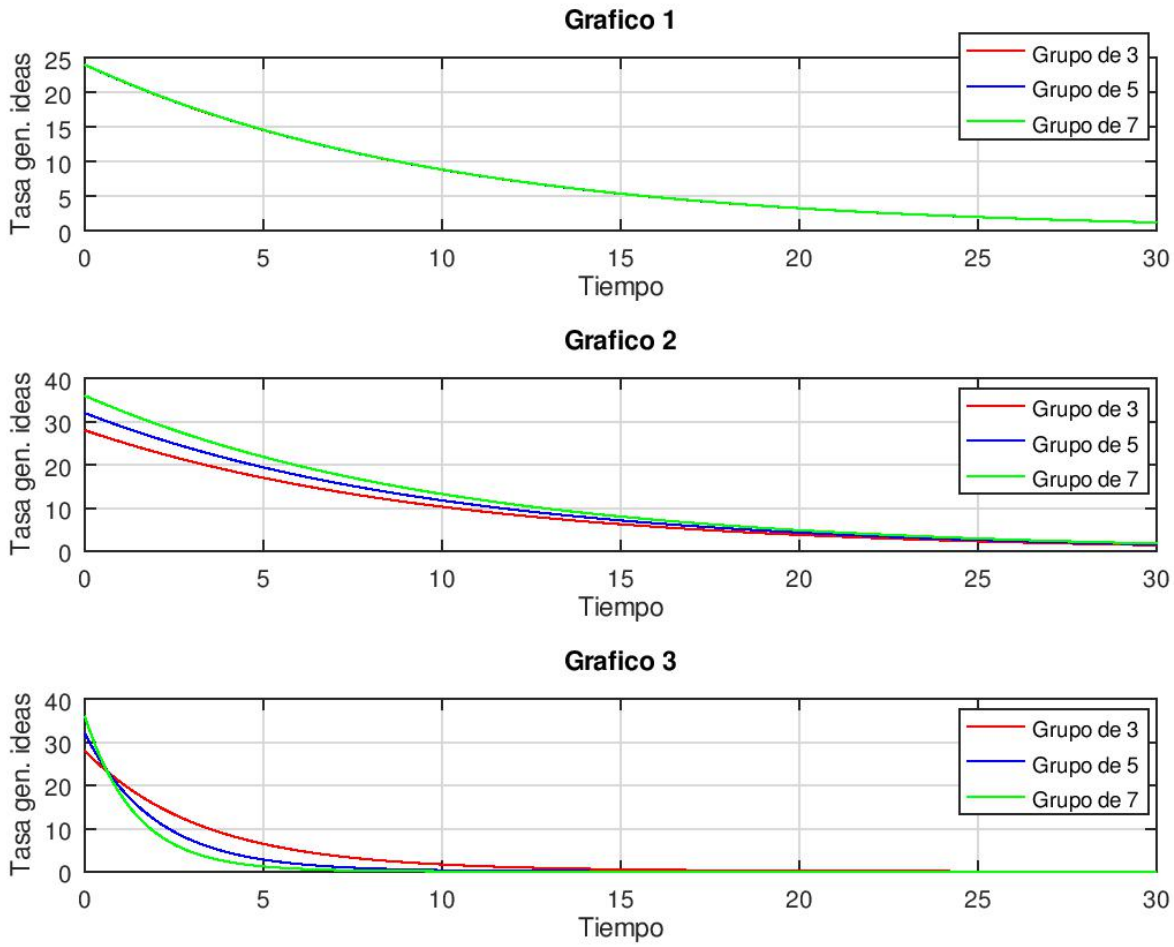

Figura 26: Rendimiento x_1 cuando varía a_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

La siguiente figura muestra en detalle el gráfico 3 de la figura anterior. La condición inicial y factor de decaimiento para la persona 1 en un grupo de tres son 28 y 0.3; en un grupo de cinco son 32 y 0.5 y en un grupo de siete son 36 y 0.7 respectivamente.

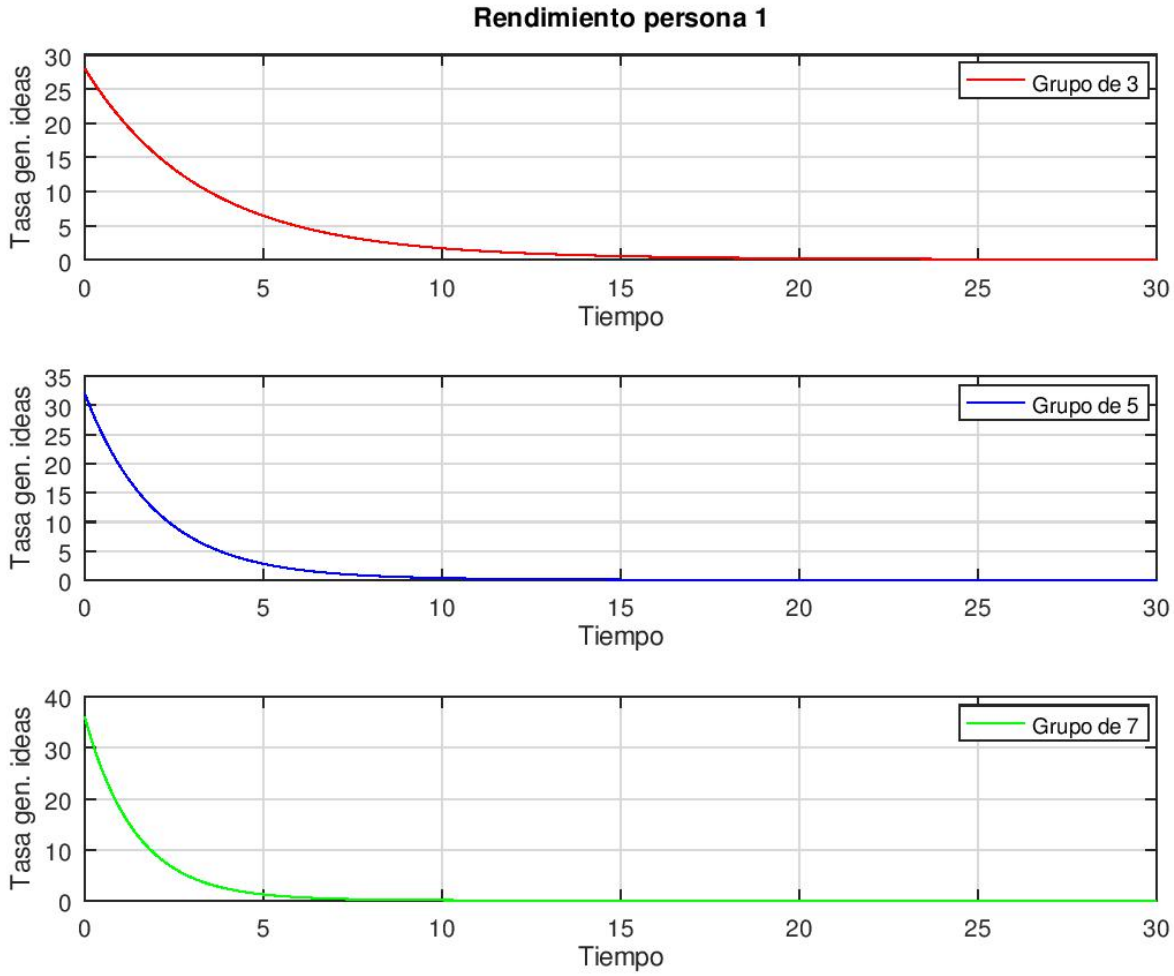

Figura 27: Rendimiento x_1 cuando varía a_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

La siguiente figura muestra la simulación [10] del rendimiento de la persona 1 en un grupo de tres, cinco y siete personas. En el gráfico 1 ésta tendrá la condición inicial y factor de decaimiento más alto de la tabla 15. En tanto a los demás integrantes de cada grupo se asignará el mismo valor pero el más bajo de la tabla. Por ejemplo, en un grupo de tres personas la condición inicial de la persona 1 será 36 y los demás, x_1 y x_2, 24; su factor de decaimiento será 0.7 y los demás tendrán asignado 0,1. En el gráfico 2, se mantiene los valores asignados para el parámetro de decaimiento del gráfico 1, en tanto para la condición inicial será asignada cambiando el orden de magnitud de la tabla 15. Por ejemplo, en un grupo de tres personas con x_1, x_2 y x_3 tendrán como condición inicial 28,26 y 24. El objetivo de estas simulaciones es analizar cómo varía el rendimiento de una persona si su parámetro de decaimiento es más alto que los de más integrantes del grupo cuando su condición inicial es mayor al resto.

[10] Para mayor detalle revisar anexos sección B ejemplos de ejecución B.5.3

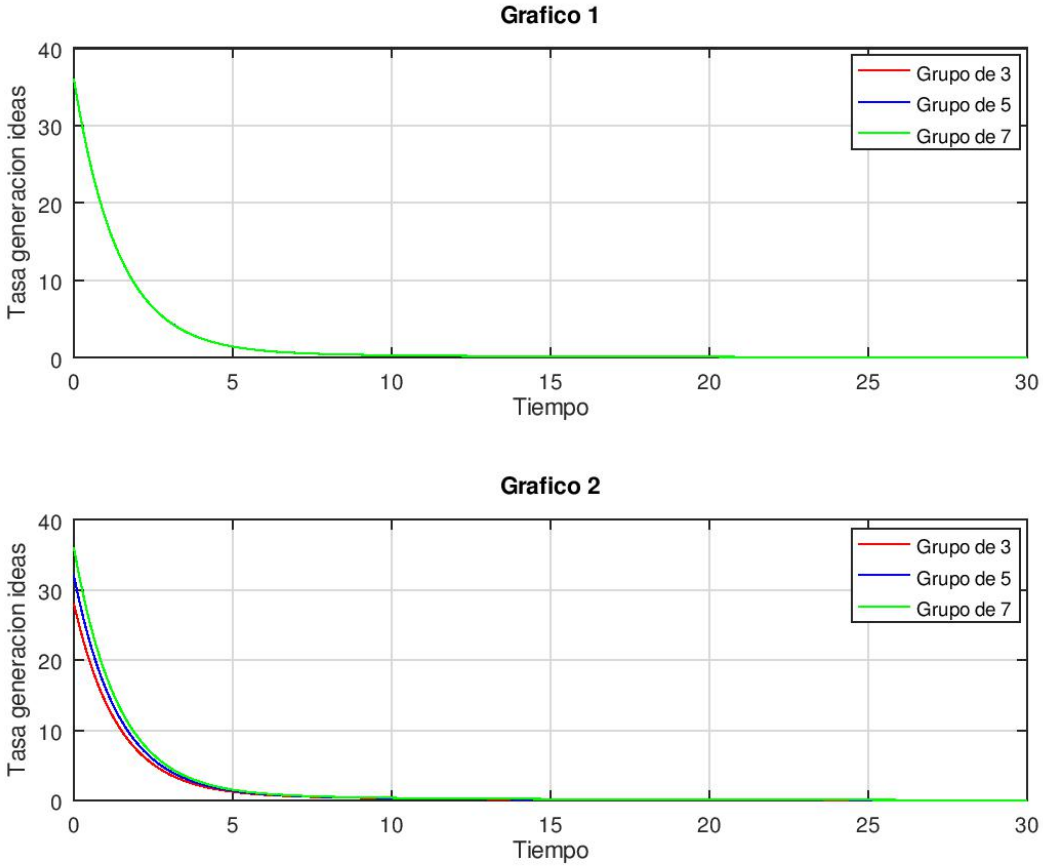

Figura 28: Rendimiento x_1 cuando varía a_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

La siguiente figura muestra la simulación del rendimiento de la persona 1 en un grupo de tres, cinco y siete integrantes. Los valores de referencia se encuentran en la tabla 15. Esta persona, en cada grupo, tendrá el factor de decaimiento más bajo de la tabla (0.1) y los demás el más alto de la tabla (0.7). La condición inicial será asignada de la misma forma, es decir, x_1 tendrá una condición inicial de 36 y los demás integrantes 24. El objetivo es analizar cómo varía el rendimiento de esta persona, bajo estas condiciones (cuando su parámetro de decaimiento es más bajo y la condición inicial es la más alta, con respecto a los demás integrantes en cada grupo), a medida que aumenta el número de integrantes.

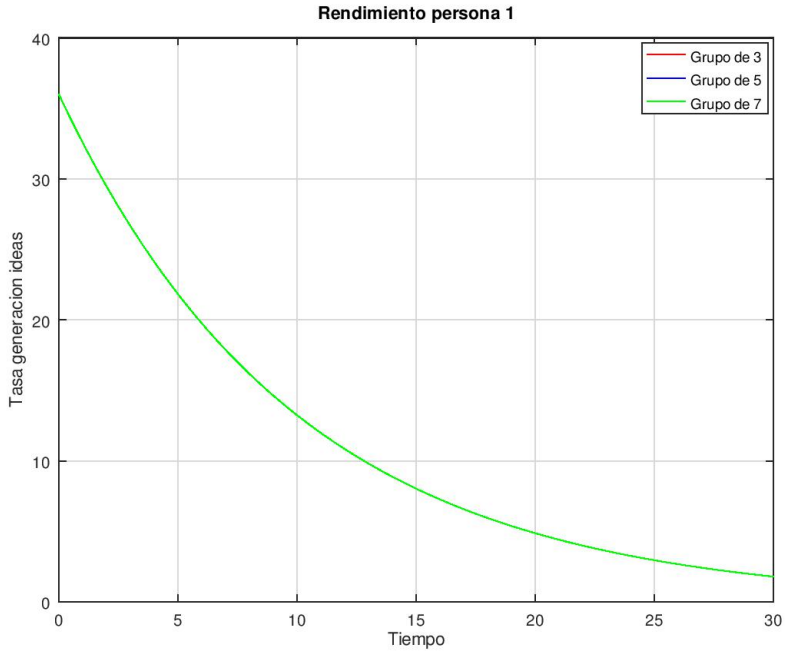

Figura 29: Rendimiento x_1 cuando varía a_i y x_0 en $n = 3, 5, 7$

Figura 26: A partir del gráfico 1 podemos afirmar que el rendimiento de una persona es el mismo en diversos grupos de lluvia de ideas si su factor de decaimiento y condición inicial son asignados de menor a mayor. Sin embargo, como se muestra en el gráfico 2, si se invierte el orden de magnitud de la condición inicial, de mayor a menor, y se mantiene el orden del factor de decaimiento, es decir cuando la persona tiene la mayor condición inicial, distinta en cada grupo, y el menor factor de decaimiento su rendimiento aumenta cuando aumenta el número de integrantes. Es decir, cuando una persona se integra a grupos de trabajo de mayor tamaño su condición inicial debe aumentar para que su desempeño aumente. En definitiva, la condición inicial influye de manera significativa en el desempeño de la productividad de ideas de un individuo en los distintos grupos de trabajo.

Figura 27: A partir de esta figura, podemos afirmar que mientras mayor sea la inclinación al factor de decaimiento, aunque aumente la condición inicial entre cada grupo de lluvia de ideas, el desempeño en relación a la productividad de ideas de la persona, disminuye si aumenta el número de integrantes.

Figura 29: A partir de esta figura podemos afirmar que mientras menor sea la inclinación al factor de decaimiento y mayor sea la inclinación a la condición inicial de la persona 1, su desempeño es el mismo a medida que aumenta el número de integrantes. Sin embargo, como se muestra en la figura 21 (gráfico 2) el desempeño aumenta cuando se cambia el orden de magnitud del factor a_i de menor a mayor y, además, que la condición inicial esté dada de mayor a menor.

4.2. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Este apartado tiene por objetivo estimar los parámetros del modelo matemático por comparación con datos experimentales. Para ello, se utiliza una metodología estadística para estimar dichos parámetros de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela una lluvia de ideas por escrito, a través del método de mínimos cuadrados.

4.2.1. Uso de software

La estimación de los parámetros pudo llevarse a cabo mediante la elaboración e implementación de cuatro programas *.m* de *Octave* [11], los cuales automatizan este proceso . Uno de ellos requiere que se especifique los parámetros a estimar, los parámetros conocidos, los instantes de tiempo en que se hacen las observaciones donde una persona da una idea; y resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales para tres personas mediante el comando *lsode*; entregando la solución numérica a través de interpolación en los instantes de tiempo entregados. Otro de los programas automatizados contiene la función objetivo F, a la cual le entregamos el vector de aproximación inicial, es decir, los parámetros que deseamos estimar, los datos experimentales y a través del método de mínimos cuadrados estima dichos parámetros. Para ello, se recurre a los comandos $fminunc$ y $fminsearch$ [12] .

4.2.2. Estimación de parámetros para una lluvia de ideas por escrito de tres personas

En primer lugar, se formula el problema de estimación de parámetros de una lluvia de ideas por escrito de tres participantes, el cual consiste en estimar un vector de parámetros p, que contiene los parámetros desconocidos, a partir de 12 datos experimentales, que corresponden a la tasa de generación de ideas ($\ddot{x}_{ij}$) en 12 instantes de tiempo (t_{ij}) no equiespaciados. Estos datos se generaron a partir de la solución numérica y se tomó la desición de que sean cuatro observaciones por persona para que sea más homogéneo.

[11] Para mayor detalle revisar sección A códigos propios A.8 y A.9

[12] Para mayor detalle revisar anexos sección E, en ésta se puede encontrar una descripción más completa tanto de los comandos como del método numérico en que se sustentan.

El sistema que representa una lluvia de ideas por escrito de tres personas está dado por:

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= -a_1 x_1 + \begin{cases} -m_1\left(x_1 - \frac{x_2+x_3}{2}\right) & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3}{2} < 0 \\ 0 & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3}{2} \geq 0 \end{cases} \\
x'_2 &= -a_2 x_2 + \begin{cases} -m_2\left(x_2 - \frac{x_1+x_3}{2}\right) & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3}{2} < 0 \\ 0 & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3}{2} \geq 0 \end{cases} \\
x'_3 &= -a_3 x_3 + \begin{cases} -m_3\left(x_3 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2}{2} < 0 \\ 0 & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2}{2} \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A través del método de mínimos cuadrados se estimará el vector p. En primera instancia, se estimará el factor de decaimiento del sistema (1), por lo que el vector de aproximación inicial estará compuesto por los parámetros a_1, a_2 y a_3. Luego se estimará el factor de acomodación, en donde el vector de aproximación inicial estará compuesto por los parámetros m_1, m_2 y m_3. Y, finalmente, se estimarán los seis parámetros a_1, a_2, a_3, m_1, m_2 y m_3 . En cada caso, se estima p como aquel valor que minimiza la función:

$$SEC(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(\ddot{x}_{ij} - x_{ij}(p)\right)^2$$

Para entender la formulación del problema de optimización es necesario definir lo siguiente:

- t_{ij} :Instante de tiempo en que una persona da una idea. Persona i en el instante j.
- $i = 1, 2, ..., n$
- $j = 1, 2, ..., m_n$
- $\ddot{x}_{ij}$: Dato experimental, correspondiente a la tasa de producción de ideas en un instante t_{ij}.
- x_{ij}: Aproximación numérica, correspondiente a la tasa de producción de ideas en un instante t_{ij}.
- e_{ij}: Error, es decir, la diferencia entre el dato experimental y la aproximación numérica.
- p: vector de parámetros desconocidos.

$$e_{ij} = x_{ij} - \ddot{x}_{ij}$$

A partir de esto se construye la función objetivo $SEC(p)$ y se estima p como el valor que minimiza el error, que se define como la sumatoria de la diferencia de los errores al cuadrado. Es decir, que la distancia entre los datos experimentales y la aproximación numérica sea la más pequeña posible.

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(\ddot{x}_{ij} - x_{ij}(p)\right)^2$$

Por ejemplo cuando se deseen estimar los seis parámetros:

$$SEC(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_n} \left(\ddot{x}_{ij} - x_{ij}(p)\right)^2$$

Los datos experimentales se construyen de forma aleatoria para cada participante, correspondientes a cuatro instantes de tiempo (t_{ij}) para cada persona, a través del comando $X = unifrnd(1, 30)$ de *Octave*. La matriz $T = (t_{ij})_{3x4}$ con los tiempos aleatorios es la siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} 7{,}5 & 12{,}9 & 15{,}9 & 20{,}3 \\ 1{,}3 & 15{,}4 & 25{,}8 & 28{,}1 \\ 9{,}8 & 13{,}7 & 14{,}2 & 27{,}0 \end{bmatrix}$$

Cada fila corresponde a los instantes de tiempo aleatorios de cada persona, es decir, los instantes de tiempo en que la persona *i-ésima* escribió una idea.

Luego para generar la matriz de las tasas de producción de ideas en cada instante t_{ij} se recurre a la interpolación numérica. Por ejemplo, si deseamos saber la tasa a los 27 minutos, ejecutamos el comando $m = interp1(t, y, 27,' spline')$. Finalmente el comando $x = unifrnd(-1, 1)$ para cada uno de los x_{ij}, el cual me indica cuánto sumo o resto al dato entregado por la solución numérica y así de esta forma se construye la matriz $\ddot{X} = (x_{ij})_{3x4}$ de los datos experimentales:

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} 17{,}0180 & 9{,}6692 & 6{,}3359 & 5{,}2064 \\ 27{,}2150 & 2{,}7160 & 0{,}4279 & 0{,}7569 \\ 3{,}6334 & 1{,}3639 & 2{,}0146 & 0{,}07169 \end{bmatrix}$$

Cada fila corresponde a las tasas de generación de ideas de la persona *i-ésima* .

A continuación se presentan los datos experimentales y los gráficos asociados a cada persona.

Persona	**T**				$\ddot{X}$			
1	[7,5	12,9	15,9	20,3]	[17,018	9,6692	6,3359	5,2064]
2	[1,3	15,4	25,8	28,1]	[27,215	2,7160	0,4279	0,7569]
3	[9,8	13,7	14,2	27,0]	[3,6334	1,3639	2,0146	0,07169]

Tabla 17: Datos experimentales

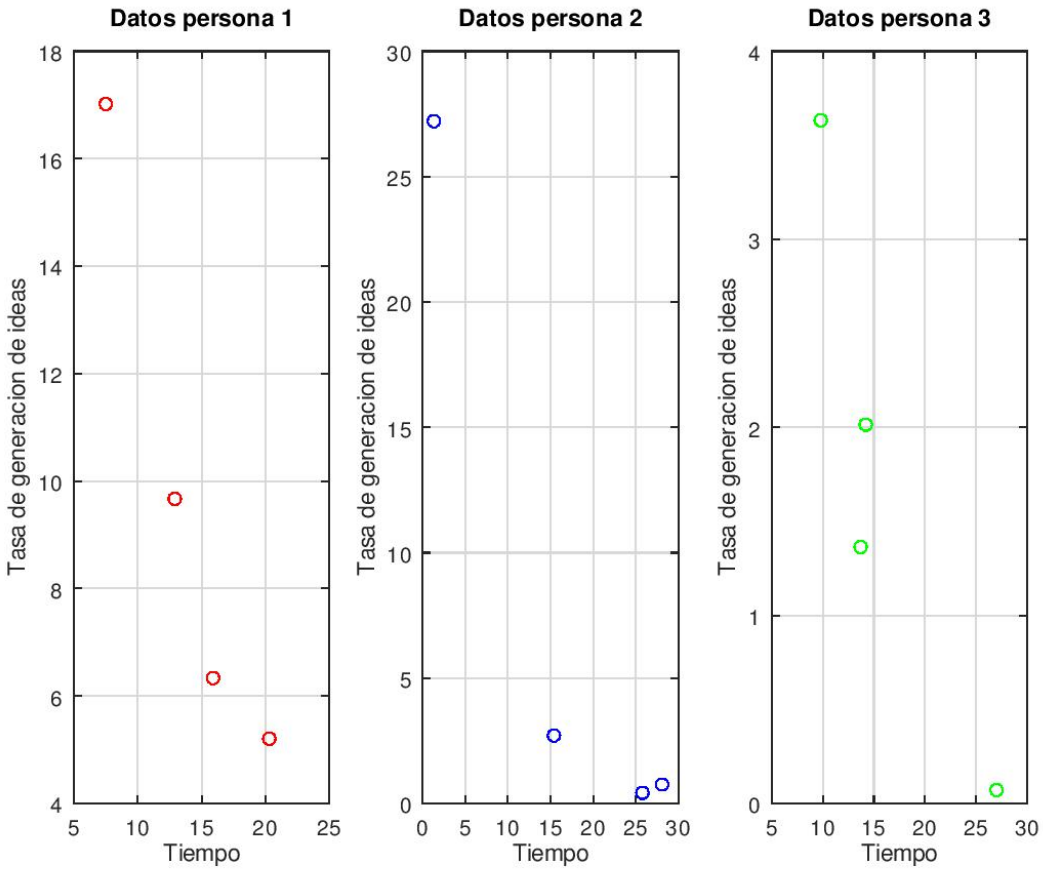

Figura 30: Datos experimentales

Para minimizar la función $SEC(p)$ se utilizaron los comandos $fminunc$ y $fminsearch$ de *Octave*. A continuación se detalla simbología para mejor lectura de las tablas que más adelante se presentan:

- $fminunc$, algoritmo de optimización, denotado como (1).
- $fminsearch$, algoritmo de optimización, denotado como (2).
- E_s Columna de errores.
- $Sopt1$, error de (1), denotado como (11).
- $Sopt2$, error de (2), denotado como (22).
- So sumatoria de los errores al cuadrado

Los algoritmos de optimización minimizan la función $SEC(p)$, correspondiente a la sumatoria del cuadrado de las diferencias entre la matriz de los datos experimentales ($\ddot{x}_{ij}$) y la aproximación numérica (x_{ij}); buscando nuevos valores para los parámetros para los cuales el error sea el menor posible.

4.2.3. Problema 1: Estimar el factor de decaimiento

Esta sección tiene por objetivo estimar el factor de decaimiento del sistema (1), es decir, estimar los parámetros a_1, a_2 y a_3, por tanto los parámetros m_1, m_2 y m_3 se asumirán conocidos. A continuación se presenta la tabla 18, en donde varía el vector de aproximación inicial (parámetros a estimar) y se evalúa la sensibilidad a variaciones en los valores iniciales. Los parámetros que aparecen en negrita son aquellos que se desean estimar. La columna de observaciones (Obs.) indica qué variaciones se hicieron al vector inicial. Las variaciones para a_i es en torno a los valores del experimento 1, mientras que las variaciones a los parámetros conocidos m_i es asignar valores entre 0,01 a 0,09. En el experimento 3 se suma 1 % al vector inicial para evaluar la sensibilidad de los algoritmos de optimización. En los siguientes experimentos se fija el vector inicial al menor valor, al mayor valor y ambos. Finalmente, en los experimentos 13 y 14 se cambia el vector inicial con la finalidad de reducir el error de los algoritmos de optimización. En resumen se presentan dos familias de experimentos para estimar $p = (a_1, a_2, a_3)$.

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3	E_s	Obs
	p_0	**0.17**	**0.18**	**0.19**	0.04	0.05	0.06	$So = 133$	vi_1
1	(1)	0.096945	0.20654	0.28450	-	-	-	(11) = 2,435676	
	(2)	0.09694	0.20657	0.28450	-	-	-	(22) = 2,435674	
	p_0	**0.17**	**0.18**	**0.19**	0.01	0.02	0.03	$So = 134{,}02$	vi_2
2	(1)	0.096885	0.199575	0.256313	-	-	-	(11) = 2,97508218	
	(2)	0.096884	0.199577	0.256306	-	-	-	(22) = 2,97508212	
	p_0	**0.1717**	**0.1818**	**0.1919**	0.01	0.02	0.03	$So = 136{,}76$	+1 %
3	(1)	0.096884	0.199580	0.256309	-	-	-	(11) = 2,97508210	
	(2)	0.096884	0.199579	0.256306	-	-	-	(22) = 2,97508211	
	p_0	**0.17**	**0.17**	**0.17**	0.06	0.06	0.06	$So = 139{,}31$	-
4	(1)	0.0970003	0.208422	0.284615	-	-	-	(11) = 2,3131098	
	(2)	0.097001	0.208412	0.284611	-	-	-	(22) = 2,3131097	
	p_0	**0.17**	**0.17**	**0.17**	0.01	0.01	0.01	$So = 145{,}77$	-
5	(1)	0.096920	0.196603	0.240450	-	-	-	(11) = 3,314456	
	(2)	0.096922	0.196595	0.240449	-	-	-	(22) = 3,314455	
	p_0	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.01	0.02	0.03	$So = 173{,}32$	-
6	(1)	0.096883	0.199549	0.256298	-	-	-	(11) = 2,975083	
	(2)	0.096884	0.199577	0.256305	-	-	-	(22) = 2,975082	
	p_0	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.01	0.01	0.01	$So = 173{,}32$	-
7	(1)	0.096920	0.196589	0.240454	-	-	-	(11) = 3,314456	
	(2)	0.096922	0.196588	0.240448	-	-	-	(22) = 3,314455	
	p_0	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.06	0.06	0.06	$So = 167{,}18$	-
8	(1)	0.0970003	0.208422	0.284615	-	-	-	(11) = 2,31310	
	(2)	0.0969997	0.208405	0.284620	-	-	-	(22) = 2,31311	
	p_0	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.06	0.07	0.08	$So = 167{,}16$	-
9	(1)	0.097050	0.209761	0.307204	-	-	-	(11) = 2,29637	
	(2)	0.097049	0.209750	0.307328	-	-	-	(22) = 2,29636	
	p_0	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.07	0.08	0.09	$So = 166{,}24$	-
10	(1)	0.097106	0.210960	0.320073	-	-	-	(11) = 2,2719785	
	(2)	0.097106	0.210956	0.320062	-	-	-	(22) = 2,2719782	
	p_0	**0.17**	**0.17**	**0.17**	0.07	0.08	0.09	$So = 138{,}34$	-
11	(1)	0.097106	0.210962	0.320058	-	-	-	(11) = 2,2719788	
	(2)	0.097107	0.210961	0.320070	-	-	-	(22) = 2,2719782	
	p_0	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.09	0.09	0.09	$So = 164{,}63$	-
12	(1)	0.097173	0.212219	0.320597	-	-	-	(11) = 2,226517881	
	(2)	0.097172	0.212221	0.320581	-	-	-	(22) = 2,226517887	
	p_0	**0.1**	**0.2**	**0.3**	0.04	0.05	0.06	$So = 3{,}1167$	-
13	(1)	0.096950	0.206564	0.284501	-	-	-	(11) = 2,4356745	
	(2)	0.096949	0.206566	0.284503	-	-	-	(22) = 2,4356744	
	p_0	**0.1**	**0.2**	**0.3**	0.01	0.02	0.03	$So = 5{,}0317$	-
14	(1)	0.096884	0.199580	0.256309	-	-	-	(11) = 2,97508210	
	(2)	0.096884	0.199579	0.256305	-	-	-	(22) = 2,97508211	

Tabla 18: Estimación del parámetro de decaimiento en una lluvia de ideas de tres personas

Tras toda la experimentación numérica este parámetro se mantiene estable, pues hay convergencia a valores físicamente razonables. En el experimento 12[13], los algoritmos logran disminuir el error a 2.22, es decir, los valores estimados están más cerca de la solución numérica. Esto indica que con dichos valores la distancia entre los datos experimentales y la solución numérica es mínima. Además, se puede establecer que si se fijan los valores del vector inicial y de los parámetros conocidos al mayor valor, los algoritmos de optimización logran reducir el error acumulado al mínimo; esto se puede observar del experimento 8 al 12.

En relación a las dos familias de experimentos, la que logra reducir el error con los algoritmos es la familia del experimento 1 al 12.

En definitiva, con el experimento 12 se estiman los valores óptimos para a_1***,*** a_2 ***y*** a_3***, pues los algoritmos convergen a valores numéricamente razonables con el error más bajo, en el contexto abordado de una lluvia de ideas por escrito. Los valores óptimos son:*** a_1 : 0,097173***,*** a_2 : 0,212219 ***y*** a_3 : 0,320597***, los cuales se se obtienen con el algoritmo*** $fminunc$ ***con un error de 2,22.***

Los siguientes gráficos muestran el rendimiento de cada persona de una lluvia de ideas por escrito con los valores óptimos del experimento 12 de la tabla 18, la solución numérica y los datos experimentales:

Exp		a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3
12	Solución numérica (sol num)	**0.19**	**0.19**	**0.19**	0.09	0.09	0.09
	Valores óptimos (optimos)	0.097173	0.212219	0.320597	-	-	-

Tabla 19: Parámetros referenciales figura 31, 32 y 33

[13]Para mayor detalle revisar anexos B ejemplos de ejecución B.6

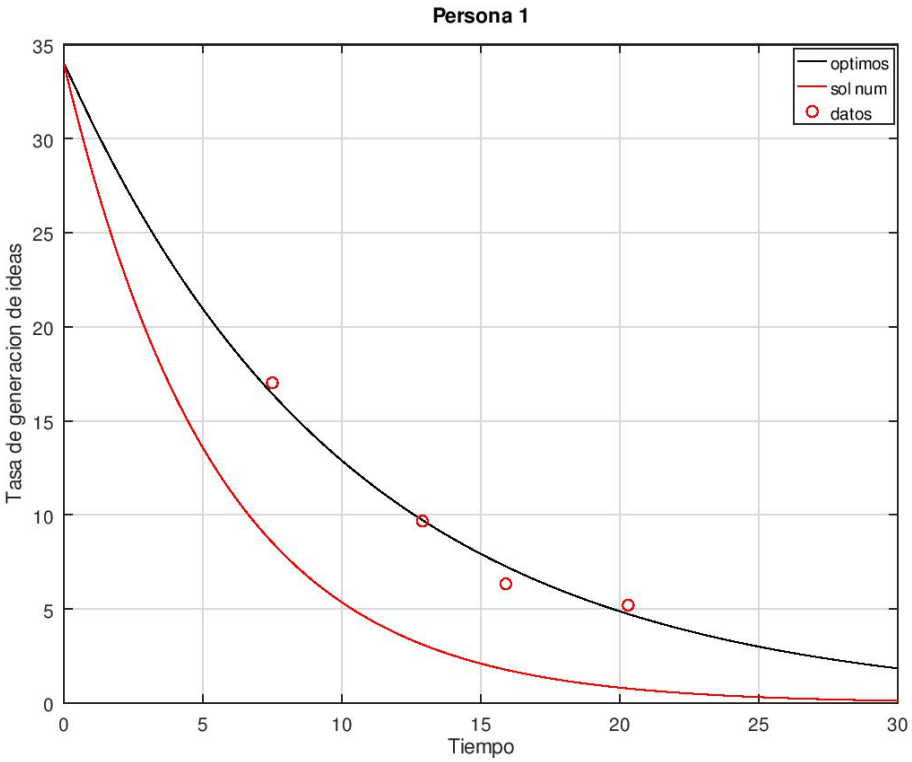

Figura 31: Factor de decaimiento persona 1

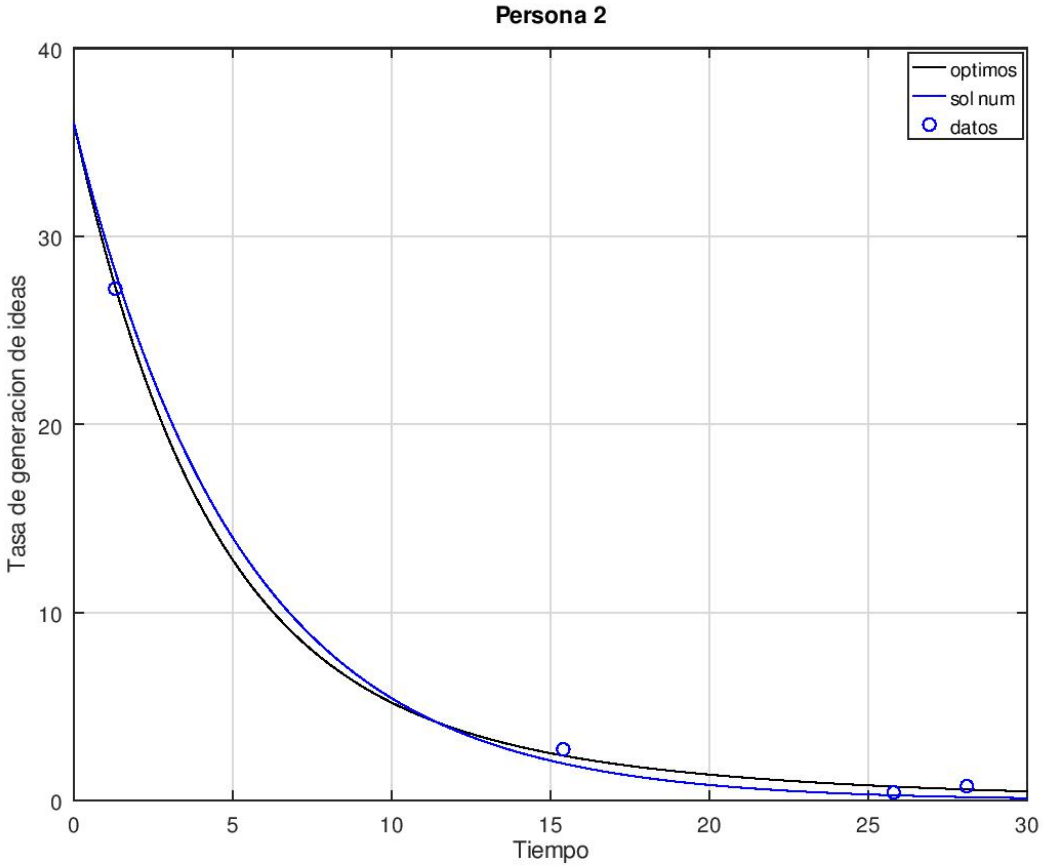

Figura 32: Factor de decaimiento persona 2

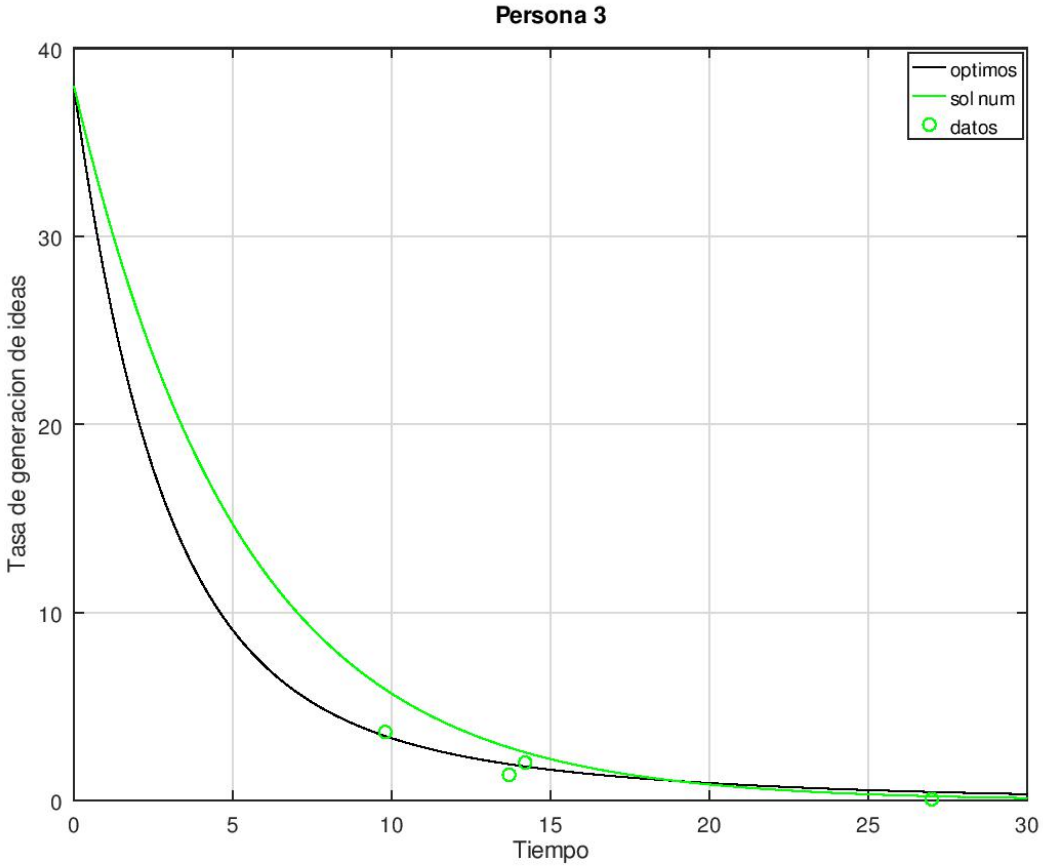

Figura 33: Factor de decaimiento persona 3

En relación a la figura 31 se puede observar que los datos experimentales de la persona 1 se encuentran muy cerca del valor óptimo estimado para este integrante. En tanto ocurre un fenómeno interesante que muestra la distancia, no menor, entre la curva de valores óptimos y la solución numérica.

4.2.4. Problema 2: Estimar el factor de acomodación (m_i)

Esta sección tiene por objetivo estimar el factor de acomodación del sistema (1), es decir, estimar los parámetros m_1, m_2 y m_3, por tanto los parámetros a_1, a_2 y a_3 se asumirán conocidos.. A continuación se presentan dos tablas de experimentación numérica. En la primera se evalúa la sensibilidad en torno al vector inicial. Las variaciones para los parámetros conocidos a_i son los valores presentados en el experimento 1. Mientras que las variaciones para el vector inicial, m_i, que son los parámetros a estimar fluctúan entre los valores 0,01 a 0,06.

En resumen se presentan dos familias de experimentos para estimar $p = (m_1, m_2, m_3)$

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3	E_s	Obs
	p_0	0.17	0.18	0.19	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 133$	vi_1
1	(1)	-	-	-	12.98	0.06129	- 0.14950	$(11) = 113$	
	(2)	-	-	-	3538094.74	6407300.20	- 0.12875	$(22) = 112$	
	p_0	0.17	0.18	0.19	**0.01**	**0.02**	**0.03**	$So = 134$	vi_2
2	(1)	-	-	-	1850.002	0.02361	- 0.14929	$(11) = 112{,}63$	
	(2)	-	-	-	3002216.03	6007148.09	- 0.12881	$(22) = 112{,}04$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 141{,}50$	vi
3	(1)	-	-	-	1.027856	0.537044	0.06	$(11) = 125{,}48684$	
	(2)	-	-	-	1.02595	0.53724	0.74585	$(22) = 125{,}48683$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.0404**	**0.0505**	**0.0606**	$So = 141{,}45$	vi
4	(1)	-	-	-	1.027836	0.537043	0.060600	$(11) = 125{,}48684$	
	(2)	-	-	-	1.02597	0.53724	0.72673	$(22) = 125{,}48683$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.01**	**0.02**	**0.03**	$So = 145{,}77$	vi
5	(1)	-	-	-	1.026274	0.537103	0.03	$(11) = 125{,}4868392$	
	(2)	-	-	-	1.02595	0.53724	0.59840	$(22) = 125{,}4868391$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.0101**	**0.0202**	**0.0303**	$So = 145{,}75$	vi
6	(1)	-	-	-	1.026267	0.537105	0.0303	$(11) = 125{,}4868392$	
	(2)	-	-	-	1.02595	0.53724	0.62291	$(22) = 125{,}4868391$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.01**	**0.01**	**0.01**	$So = 145{,}77$	vi
7	(1)	-	-	-	1.026363	0.537069	0.01	$(11) = 125{,}4868393$	
	(2)	-	-	-	1.02595	0.53724	0.84438	$(22) = 125{,}4868391$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.04**	**0.04**	**0.04**	$So = 141{,}51$	vi
8	(1)	-	-	-	1.028216	0.537038	0.04	$(11) = 125{,}48684$	
	(2)	-	-	-	1.02596	0.53724	0.70009	$(22) = 125{,}48683$	
	p_0	0.17	0.17	0.17	**0.06**	**0.06**	**0.06**	$So = 139{,}31$	vi
9	(1)	-	-	-	1.027354	0.536987	0.06	$(11) = 125{,}486840$	
	(2)	-	-	-	1.02594	0.53724	0.98870	$(22) = 125{,}486839$	
	p_0	0.1717	0.1818	0.1919	**0.0404**	**0.0505**	**0.0606**	$So = 135{,}72$	vi
10	(1)	-	-	-	5.62812	0.13377	-0.14718	$(11) = 117{,}73$	
	(2)	-	-	-	3625644.12	6057737.69	-0.12691	$(22) = 115{,}03$	
	p_0	0.1717	0.1818	0.1919	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 135{,}73$	vi
11	(1)	-	-	-	6.09620	0.11373	-0.14747	$(11) = 117{,}62$	
	(2)	-	-	-	4161583.68	6933284.65	-0.12693	$(22) = 115{,}03$	
	p_0	0.19	0.19	0.19	**0.06**	**0.06**	**0.06**	$So = 167{,}18$	vi
12	(1)	-	-	-	1.155067	0.662529	0.06	$(11) = 152{,}858914$	
	(2)	-	-	-	1.15338	0.66299	4.77997	$(22) = 152{,}858913$	
	p_0	0.19	0.19	0.19	**0.01**	**0.02**	**0.03**	$So = 173{,}32$	vi
13	(1)	-	-	-	1.157106	0.663226	0.03	$(11) = 152{,}85892$	
	(2)	-	-	-	1.15337	0.66299	0.43664	$(22) = 152{,}85891$	
	p_0	0.19	0.19	0.19	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 169{,}28$	vi
14	(1)	-	-	-	1.153397	0.663044	0.06	$(11) = 152{,}85891318$	
	(2)	-	-	-	1.15336	0.66300	0.45014	$(22) = 152{,}85891317$	

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3	E_s	Obs
15	p_0	0.19	0.19	0.19	**0.01**	**0.01**	**0.01**	$So = 173{,}32$	*vi*
	(1)	-	-	-	1.157836	0.663387	0.01	$(11) = 152{,}85892$	
	(2)	-	-	-	1.15337	0.66299	0.78326	$(22) = 152{,}85891$	
16	p_0	0.1919	0.1919	0.1919	**0.01**	**0.01**	**0.01**	$So = 176{,}291$	*vi*
	(1)	-	-	-	1.173479	0.677317	0.01	$(11) = 155{,}86353$	
	(2)	-	-	-	1.16766	0.67695	1.05633	$(22) = 155{,}86352$	
17	p_0	0.209	0.209	0.209	**0.01**	**0.01**	**0.01**	$So = 204{,}25$	*vi*
	(1)	-	-	-	1.340771	0.834260	0.01	$(11) = 184{,}39646$	
	(2)	-	-	-	1.33158	0.83635	1.09196	$(22) = 184{,}39644$	

Tabla 20: Estimación del parámetro de acomodación para una lluvia de ideas de tres personas

En los experimentos 1 y 2 los algoritmos de optimización arrojan valores negativos para el factor de acomodación, aún cambiando el vector inicial, lo cual no puede ocurrir pues este se da sólo en sentido positivo.

A partir del experimento 4 se cambian los parámetros ya conocidos para ver si estos influyen en los valores negativos estimados por los algoritmos de optimización. Es aquí donde los seis parámetros convergen a un valor físicamente razonable, lo cual indica que los valores asignados a los parámetros conocidos, factor de decaimiento, tienen gran influencia en la estimación del factor de acomodación.

Cuando se hacen variaciones tanto a los parámetros conocidos como a los que se desean estimar los algoritmos no convergen a un valor razonable, por ejemplo, cuando se suma el 1 % a todos. ¿Cuándo convergen los algoritmos? en la medida que sólo se haga, esta última variación, a los parámetros que se desean estimar.

Entre los experimentos 3 y 9, los algoritmos se comportan de manera estable en la estimación de los parámetros m_1 y m_2 pues convergen a valores similares, además en la disminución del error acumulado a 125. En cambio el m_3 el algoritmo (1) converge al mismo valor entregado en el vector inicial, en tanto el algoritmo (2) no entrega valores estables para este mismo parámetro.

A partir del experimento 12 al 15, ocurre el mismo comportamiento explicado anteriormente, los parámetros m_1 y m_2 convergen a valores estables en ambos algoritmos de optimización, no así para el parámetro m_3. En tanto el error acumulado lo reduce a 152. Sin embargo, la familia de estimaciones de mejor calidad son del experimento 3 al 9 pues el error se reduce a 125, pues el objetivo es minimizar el error.

En relación a la experimentación numérica presentada anteriormente se hace necesario ver la posibilidad de explorar en torno a otros valores en los parámetros conocidos para ver si los algoritmos estimen valores razonables para todos los parámetros.

En la siguiente tabla se hacen variaciones a los parámetros ya conocidos a_1, a_2 y a_3 en torno a 0,2 valor entregado en [4] para poder estimar los parámetros m_i, pues como se pudo establecer en la tabla anterior, la asignación de valores a los parámetros de decaimiento tiene gran influencia en la estimación de los parámetros de acomodación. Las variaciones se hacen en torno de los valores asignados a los parámetros en los experimentos 1 y 3. Desde el experimento 1 al 4, variar a_i un décimo del valor 0,2. Desde el experimento 5 al 8, un centésimo del valor 0,2. En tanto las variaciones del parámetro a estimar m_i se aplican variaciones similares a las presentadas en la tabla anterior.

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3	E_s	Obs
	p_0	0.1	0.2	0.3	**0.01**	**0.02**	**0.03**	$So = 5{,}03171$	vi_1
1	(1)	-	-	-	3.776187	0.086378	0.066107	$(11) = 2{,}148645$	
	(2)	-	-	-	3.790363	0.086383	0.066099	$(22) = 2{,}148643$	
	p_0	0.1	0.2	0.3	**0.0101**	**0.0202**	**0.0303**	$So = 5{,}0039$	$vi_1 + 1\,\%$
2	(1)	-	-	-	3.787496	0.086370	0.066098	$(11) = 2{,}1486442$	
	(2)	-	-	-	3.788729	0.086380	0.066097	$(22) = 2{,}1486441$	
	p_0	0.1	0.2	0.3	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 3{,}11668$	vi_2
3	(1)	-	-	-	3.790810	0.086364	0.066097	$(11) = 2{,}1486442$	
	(2)	-	-	-	3.785228	0.086376	0.066094	$(22) = 2{,}1486441$	
	p_0	0.1	0.2	0.3	**0.0404**	**0.0505**	**0.0606**	$So = 3{,}1005$	$vi_2 + 1\,\%$
4	(1)	-	-	-	2.332692	0.088876	0.066731	$(11) = 2{,}1824$	
	(2)	-	-	-	3.785149	0.086375	0.066097	$(22) = 2{,}1486$	
	p_0	0.19	**0.2**	0.21	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 3{,}1167$	$vi_1 - 0{,}01$
5	(1)	-	-	-	3.790810	0.086364	0.066097	$(11) = 2{,}14864419$	
	(2)	-	-	-	3.785228	0.086376	0.066094	$(22) = 2{,}14864412$	
	p_0	0.19	**0.2**	0.21	**0.01**	**0.02**	**0.03**	$So = 169{,}16$	$vi_1 - 0{,}01$
6	(1)	-	-	-	8128.34	8572.80	-0.10276	$(11) = 149{,}12$	
	(2)	-	-	-	7424938.68	7145273.61	-0.10273	$(22) = 149{,}11$	
	p_0	0.19	**0.2**	0.21	**0.0101**	**0.0202**	**0.0303**	$So = 169{,}16$	$vi_1 - 0{,}01$
7	(1)	-	-	-	240.45	202.04	-0.10327	$(11) = 149{,}29$	
	(2)	-	-	-	2469426.06	2376306.10	-0.10270	$(22) = 149{,}11$	
	p_0	0.19	**0.2**	0.21	**0.0404**	**0.0505**	**0.0606**	$So = 167{,}97$	$vi_1 - 0{,}01$
8	(1)	-	-	-	1811.39	2729.67	-0.10283	$(11) = 149{,}14$	
	(2)	-	-	-	1517546.26	0.021009	-0.127502	$(22) = 151{,}11$	
	p_0	0.18	**0.2**	0.22	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 147{,}69$	$vi_1 - 0{,}02$
9	(1)	-	-	-	466.81	0.011794	-0.046655	$(11) = 130{,}14$	
	(2)	-	-	-	3210839.16	0.0082166	-0.0469693	$(22) = 130{,}04$	

Tabla 21: Estimación del parámetro de acomodación para una lluvia de ideas de tres personas

En la familia de experimentos de la tabla 21 es posible afirmar que al hacer variaciones a menos de un décimo en torno al valor 0,2 los algoritmos se desestabilizan pues no convergen a valores óptimos, ya que arrojan valores negativos para el factor de acomodación, lo que se observa a partir del experimento 6.

Dentro de las dos familias de experimentaciones, tabla 20 y 21, en la estimación del factor de acomodación (m_i), se logra la mejor en la tabla 20, pues los algoritmos convergen a valores óptimos ya que el error cuadrático es menor, es decir, los datos experimentales con los parámetros estimados están mucho más cerca de la solución numérica. Esto se puede observar del experimento 1 al 5 en la tabla 21. Sin embargo, los valores óptimos se logran del experimento 1 al 3 de esta tabla, pues los algoritmos convergen a valores similares y estables, estos tres experimentos muestran valores similares.

Por tanto los valores óptimos para el factor de acomodación son: m_1 : 3,785228**,** m_2 : 0,086376 ***y*** m_3 : 0,066094**,** ***estimados por el algoritmo*** $fminsearch$ ***que presenta 2.1486441 como menor error cuadrático.***

Los siguientes gráficos muestran el rendimiento de cada persona de una lluvia de ideas por escrito con los valores óptimos del experimento 3 de la tabla 21, la solución numérica y los datos experimentales:

Exp		a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3
3	Solución numérica (sol num)	0.1	0.2	0.3	**0.01**	**0.02**	**0.03**
	Valores óptimos (optimos)	-	-	-	3.785228	0.086376	0.066094

Tabla 22: Parámetros referenciales figura 34, 35 y 36

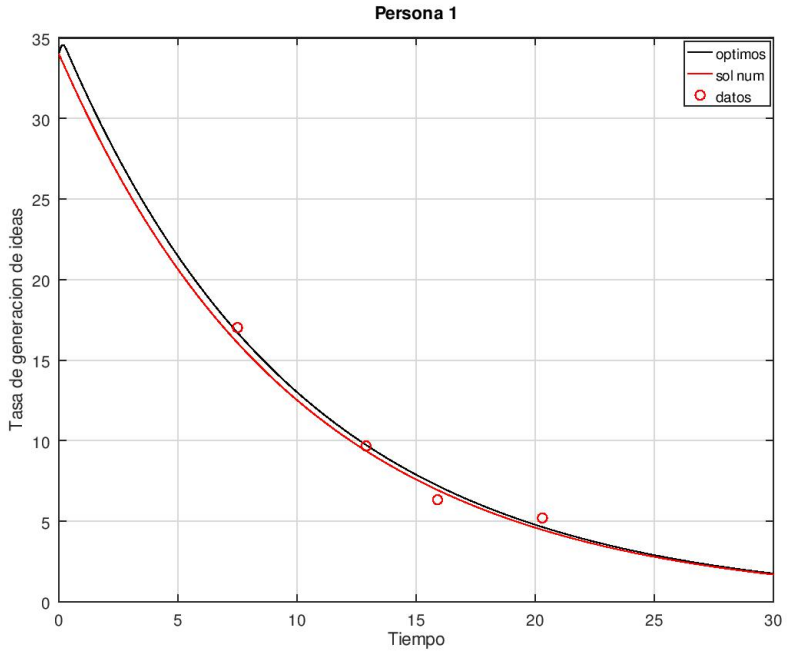

Figura 34: Factor de acomodación persona 1

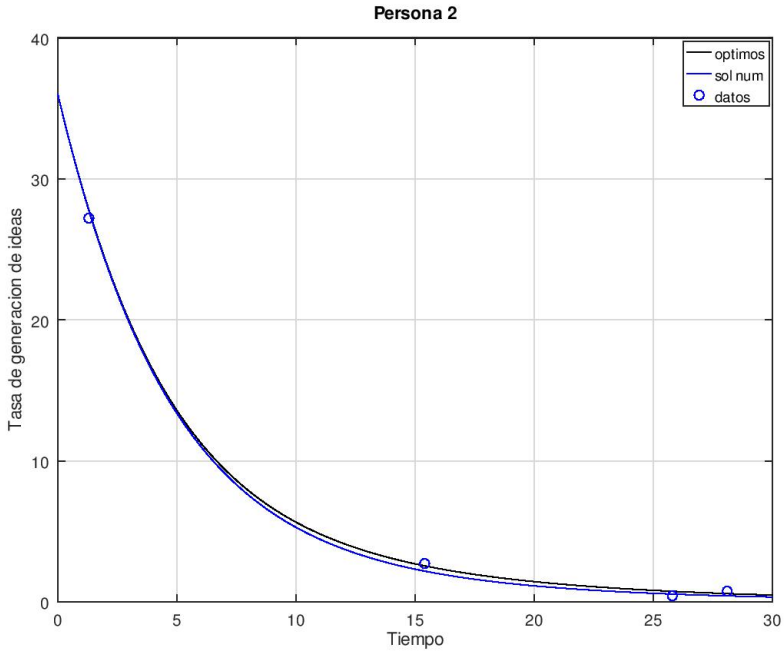

Figura 35: Factor de acomodación persona 2

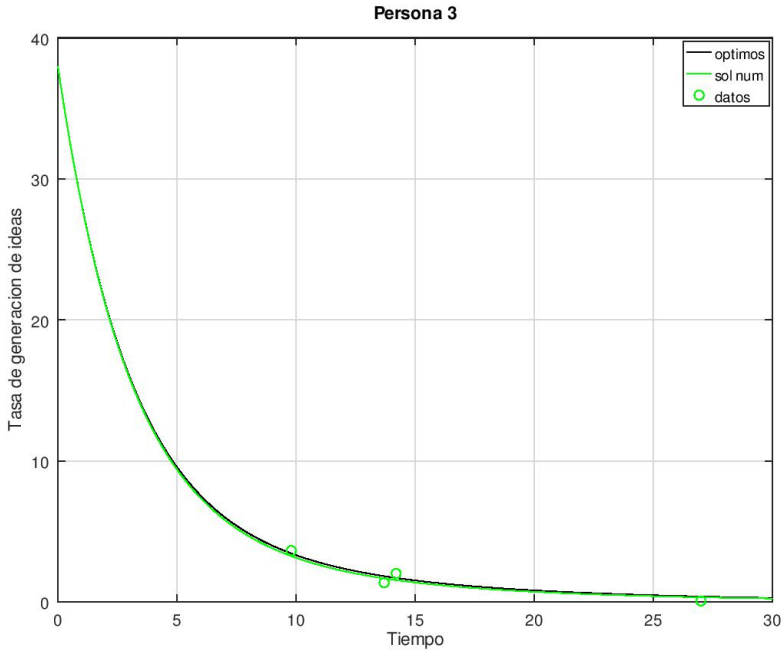

Figura 36: Factor de acomodación persona 3

4.2.5. Problema 3: Estimar el factor de decaimiento y acomodación

La experimentación numérica de la tabla 23 toma como base el experimento 1. Por tanto, los demás experimentos son parte de variación numérica de los valores presentes en dicho experimento. La columna de observaciones (Obs.) indica qué variación se aplicó a los valores iniciales, subrayados en negrita. Es decir, si se restó el 1 % de su valor está descrito como -1 % . Hay experimentos en que se hacen variaciones de un tipo a los tres primeros parámetros y a los restantes otro tipo de variación, por ejemplo, sumarle el 1 % a los a_i y restarle 1 % a los m_i, la columna de observaciones los describe como ± 1 %. En los últimos experimentos se fijan todos los parámetros al menor valor o todos al mayor valor.

En resumen se presentan dos familias de experimentos para estimar $p = (a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3)$

Exp.	-	a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3	E_s	Obs
	p_0	**0.17**	**0.18**	**0.19**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	$So = 133$	vi
1	(1)	0.10419	0.22460	0.25762	2082.25	0.14588	0.02918	(11) = 1,5976	
	(2)	0.10418	0.22461	0.25747	1496.51	0.14602	0.02906	(22) = 1,5977	
	p_0	0.1717	0.1818	0.1919	0.0404	0.0505	0.0606	$So = 135$	+1 %
2	(1)	0.104217	0.22463	0.25762	4660.09	0.146001	0.02918	(11) = 1,597690	
	(2)	0.104211	0.22462	0.25759	3285.09	0.0146002	0.02913	(22) = 1,597692	
	p_0	0.1683	0.1782	0.1881	0.0396	0.0495	0.0594	$So = 130$	-1 %
3	(1)	0.104211	0.22464	0.25761	3463.66	0.14608	0.02916	(11) = 1,59769	
	(2)	0.97303	0.21800	0.25496	0.14288	0.12775	0.02735	(22) = 1,95073	
	p_0	0.1717	0.1818	0.1919	0.0396	0.0495	0.0594	$So = 135$	±1 %
4	(1)	0.10419	0.22460	0.25759	1732.85	0.14588	0.02915	(11) = 1,5977	
	(2)	0.10420	0.22461	0.25758	2835.18	0.14590	0.02915	(22) = 1,5976	
	p_0	0.1683	0.1782	0.1881	0.0404	0.0505	0.0606	$So = 130$	∓1 %
5	(1)	0.10420	0.22462	0.25761	3047.55	0.14597	0.02917	(11) = 1,5976	
	(2)	0.97221	0.21791	0.25521	0.104104	0.12738	0.02759	(22) = 1,9589	
	p_0	0.1785	0.189	0.1995	0.042	0.0525	0.063	$So = 147$	+5 %
6	(1)	0.10421	0.22463	0.25762	3791.40	0.14599	0.02917	(11) = 1,5976	
	(2)	0.10416	0.22462	0.25773	929.70	0.14573	0.02937	(22) = 1,5977	
	p_0	0.1615	0.171	0.1805	0.038	0.0475	0.057	$So = 120$	-5 %
7	(1)	0.10420	0.22463	0.25761	3053.59	0.14599	0.02917	(11) = 1,5976	
	(2)	0.10413	.02244	0.25761	651.65	0.14564	0.02928	(22) = 1,5977	
	p_0	0.187	0.198	0.209	0.044	0.055	0.066	$So = 162$	+10 %
8	(1)	0.10421	0.22463	0.25763	3954.25	0.14596	0.02918	(11) = 1,5976	
	(2)	0.10414	0.22452	0.25747	825.59	0.14572	0.02905	(22) = 1,5977	
	p_0	0.153	0.162	0.171	0.036	0.045	0.054	$So = 110$	-10 %
9	(1)	0.10420	0.22463	0.25761	3044.78	0.14599	0.02917	(11) = 1,5976	
	(2)	0.10416	0.22461	0.25740	848.93	0.14591	0.02897	(22) = 1,5977	
	p_0	0.1995	0.207	0.2185	0.046	0.0575	0.069	$So = 177$	+15 %
10	(1)	0.10421	0.22463	0.25760	3856.10	0.14595	0.02916	(11) = 1,5976	
	(2)	0.10404	0.22446	0.25716	274.11	0.14568	0.02863	(22) = 1,5980	
	p_0	0.1455	0.153	0.1615	0.034	0.0425	0.051	$So = 103$	-15 %
11	(1)	0.10420	0.22463	0.25761	3066.51	0.14599	0.02917	(11) = 1,597692	
	(2)	0.10421	0.22462	0.25765	5173.72	0.14591	0.02921	(22) = 1,597690	
	p_0	0.17	0.17	0.17	0.04	0.04	0.04	$So = 141{,}51$	=Me
12	(1)	0.104213	0.224636	0.257630	3667.84	0.146022	0.029183	(11) = 1,5977	
	(2)	0.104139	0.224566	0.257806	708.215297	0.145677	0.029439	(22) = 1,5978	
	p_0	0.19	0.19	0.19	0.06	0.06	0.06	$So = 167{,}18$	=Ma
13	(1)	0.104203	0.224625	0.257609	2497.30	0.145977	0.029166	(11) = 1,5977	
	(2)	0.097650	0.218267	0.254210	0.325625	0.127986	0.026528	(22) = 1,9163	

Tabla 23: Estimación del vector $p = (a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3)$

En la gran mayoría de los experimentos ocurre un fenómeno numéricamente interesante, en relación a la estimación para m_1, pues los valores estimados para este parámetro en específico están fuera del contexto abordado de lluvia de ideas por escrito; esto según los valores presentados en [4], a pesar de todas las variaciones que se hicieron al vector inicial. Sin embargo, en los experimentos 3, 5 y 13 se logró que los seis parámetros converjan a valores numéricamente razonables. En dichos experimentos, los parámetros, a excepción de m_1, se comportan estables en los primeros dos decimales. Estos valores óptimos son estimados por el comando $fminsearch$ que reduce el error acumulado 130 a 1,95, en los experimentos 3 y 5. En tanto, en el experimento 13 el error acumulado es 167 y el mismo comando lo reduce a 1,91.

La experimentación numérica de la tabla 24 se hizo en torno al experimento 1, que corresponden a los valores asignados para la obtención de los datos experimentales. Por tanto las variaciones de los siguientes experimentos se hicieron a estos valores. Como se indica en la columna de observaciones (Obs), por ejemplo, sumar el 1 % (+1 %), restar el 1 %. Esto hasta el experimento 9. A partir del experimento 10 se hace una restricción específica con el parámetro m_1, para lograr que los algoritmos de optimización estimen valores razonables. En el experimento 10 se suma 1 % sólo a m_1, mientras que a los demás parámetros se suma 10 % . En el experimento 11 se suma 10 % a m_1 mientras que a los demás 1 % . Finalmente, en el experimento 12 se resta 1 % a m_1 y a los demás parámetros se les suma el 1 % de su valor.

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3	E_s	Obs
	p_0	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	$So = 5{,}03$	vi
1	(1)	0.10421	0.22463	0.25761	3691.65	0.14601	0.02917	$(11) = 1{,}5976$	
	(2)	0.10419	0.22457	0.25779	2021.37	0.14591	0.02936	$(22) = 1{,}5977$	
	p_0	0.101	0.202	0.303	0.0101	0.0202	0.0303	$So = 5{,}5915$	+1 %
2	(1)	0.104214	0.224635	0.257622	4037.88	0.145994	0.029177	$(11) = 1{,}5977$	
	(2)	0.104118	0.224511	0.257406	607.60	0.145368	0.028980	$(22) = 1{,}5978$	
	p_0	0.099	0.198	0.297	0.0099	0.0198	0.0297	$So = 4{,}5863$	- 1 %
3	(1)	0.104216	0.224631	0.257627	4203.39	0.145956	0.029183	$(11) = 1{,}59769$	
	(2)	0.104224	0.224653	0.257628	7178.81	0.146070	0.029180	$(22) = 1{,}59768$	
	p_0	0.101	0.202	0.303	0.0099	0.0198	0.0297	$So = 5{,}6502$	±1 %
4	(1)	0.104194	0.224605	0.257614	1925.05	0.145891	0.029172	$(11) = 1{,}5976$	
	(2)	0.104189	0.224591	0.257609	1744.61	0.145863	0.029160	$(22) = 1{,}5977$	
	p_0	0.099	0.198	0.297	0.0101	0.0202	0.0303	$So = 4{,}5334$	∓1 %
5	(1)	0.104213	0.224633	0.257621	3686.87	0.145992	0.029177	$(11) = 1{,}5976$	
	(2)	0.104132	0.224656	0.257534	624.89	0.146439	0.029201	$(22) = 1{,}5977$	
	p_0	0.105	0.21	0.315	0.0105	0.021	0.0315	$So = 8{,}8768$	+5 %
6	(1)	0.104195	0.224615	0.257610	1938.10	0.145949	0.029168	$(11) = 1{,}5976989$	
	(2)	0.104200	0.224587	0.257515	2395.45	0.145881	0.029049	$(22) = 1{,}5976984$	
	p_0	0.095	0.19	0.285	0.0095	0.019	0.0285	$So = 4{,}0576$	-5 %
7	(1)	0.104200	0.224628	0.257603	2250.32	0.146014	0.029160	$(11) = 1{,}5977$	
	(2)	0.104047	0.224251	0.257740	319.51	0.144301	0.0293	$(22) = 1{,}5980$	
	p_0	0.11	0.22	0.33	0.011	0.022	0.033	$So = 15{,}013$	+10 %
8	(1)	0.104219	0.224646	0.257620	4906.45	0.146046	0.029176	$(11) = 1{,}597690$	
	(2)	0.104210	0.224606	0.257564	2872.48	0.145918	0.029157	$(22) = 1{,}597695$	
	p_0	0.09	0.18	0.27	0.009	0.018	0.027	$So = 6{,}6823$	-10 %
9	(1)	0.104200	0.224622	0.257608	2252.32	0.145977	0.029164	$(11) = 1{,}5976963$	
	(2)	0.104207	0.224635	0.257593	2646.16	0.146063	0.029132	$(22) = 1{,}5976951$	
	p_0	0.11	0.22	0.33	0.0101	0.022	0.033	$So = 15{,}015$	-
10	(1)	0.104195	0.224613	0.257618	1988.20	0.145922	0.029176	$(11) = 1{,}5977$	
	(2)	0.104019	0.224598	0.256905	274.24	0.147205	0.0283	$(22) = 1{,}5981$	
	p_0	0.101	0.202	0.303	0.011	0.0202	0.0303	$So = 5{,}5905$	-
11	(1)	0.104220	0.224642	0.257624	5440.69	0.146014	0.029179	$(11) = 1{,}5977$	
	(2)	0.104131	0.224675	0.257354	685.6	0.146021	0.0289	$(22) = 1{,}5978$	
	p_0	0.101	0.202	0.303	0.0099	0.0202	0.0303	$So = 5{,}5917$	-
12	(1)	0.104208	0.224632	0.257614	2907.593379	0.146011	0.029170	$(11) = 1{,}597693$	
	(2)	0.104204	0.224588	0.257625	2187.42	0.146007	0.029178	$(22) = 1{,}597699$	

Tabla 24: Estimación del vector $p = (a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3)$

A pesar de todas las variaciones asignadas a los valores iniciales no se logró que los algoritmos de optimización arrojen valores razonables para todos los parámetros, pues el valor que se estima para m_1 está fuera de contexto.

En resumen, a través del algoritmo $fminsearch$ ***se logró la estimación de valores óptimos para los seis parámetros en la tabla 23, específicamente en el experimento 13, pues el error acumulado*** (So) ***se reduce a 1,91. En consecuencia, los valores óptimos para cada uno de los parámetros son*** $a_1 = 0{,}097650$, $a_2 = 0{,}218267$, $a_3 = 0{,}254210$, $m_1 = 0{,}325625$, $m_2 = 0{,}127986$ ***y*** $m_3 = 0{,}026528$

Los siguientes gráficos muestran el rendimiento de cada persona de una lluvia de ideas por escrito con los valores óptimos del experimento 13 de la tabla 23, la solución numérica y los datos experimentales:

Exp		a_1	a_2	a_3	m_1	m_2	m_3
13	Solución numérica (sol num)	0.19	0.19	0.19	0.06	0.06	0.06
	Valores óptimos (optimos)	0.097650	0.218267	0.254210	0.325625	0.127986	0.026528

Tabla 25: Parámetros referenciales figura 37, 38 y 39

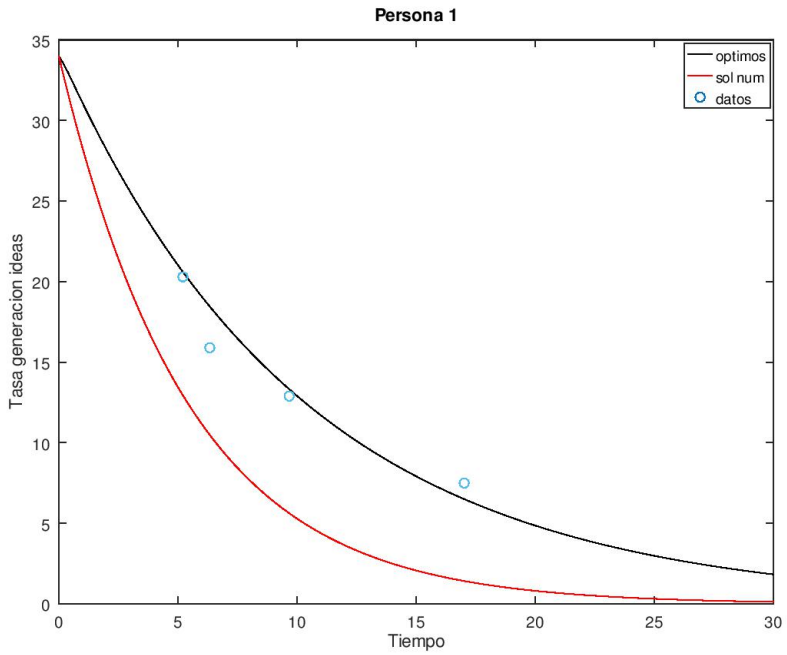

Figura 37: Factor de decaimiento y acomodación persona 1

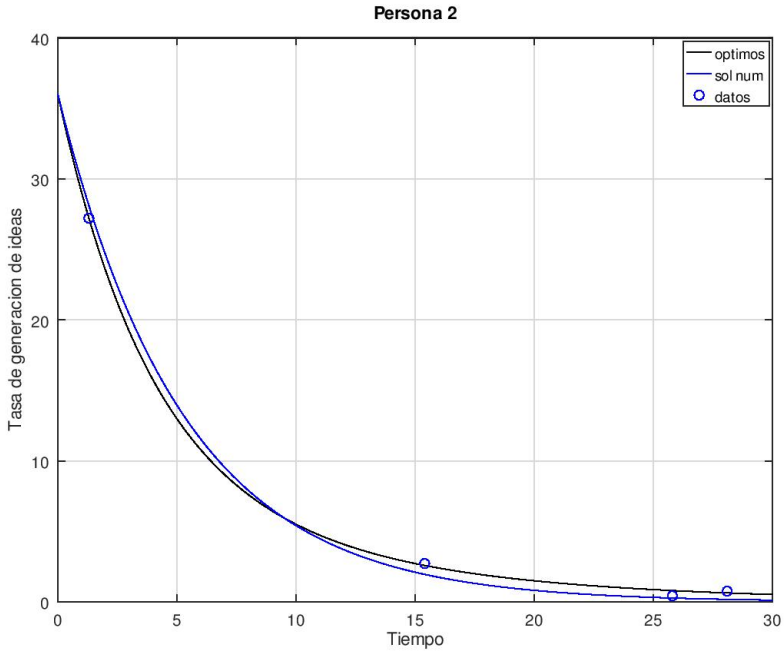

Figura 38: Factor de decaimiento y acomodación persona 2

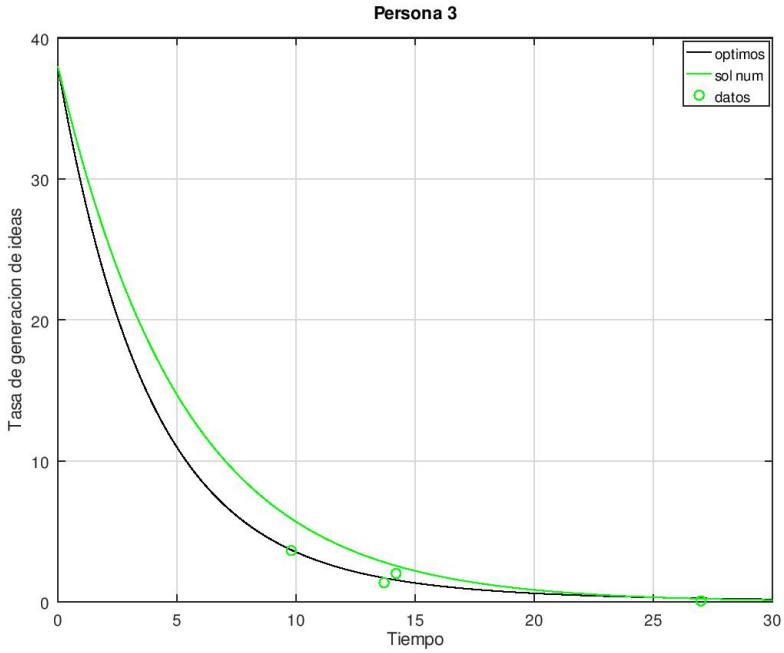

Figura 39: Factor de decaimiento y acomodación persona 3

4.2.6. Estimación de parámetros para una lluvia de ideas por escrito de cuatro personas

En esta sección se presenta una experimentación numérica con la finalidad de estimar los parámetros asignados a las personas que componen una lluvia de ideas por escrito de cuatro personas, la cual está representada por el sistema (2) que a continuación aparece. El problema de estimación de parámetros se subdivide en tres secciones, tal como se hizo en el caso de tres personas. En cada sección, la estimación parte con los valores óptimos obtenidos en estimación de lluvia de ideas por escrito de tres personas, ya que con estos valores los datos experimentales están más cerca de la solución numérica.

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= -a_1 x_1 + \begin{cases} -m_1\left(x_1 - \frac{x_2+x_3+x_4}{3}\right) & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3+x_4}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_1 - \frac{x_2+x_3+x_4}{3} \geq 0 \end{cases} \\
x'_2 &= -a_2 x_2 + \begin{cases} -m_2\left(x_2 - \frac{x_1+x_3+x_4}{3}\right) & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3+x_4}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_2 - \frac{x_1+x_3+x_4}{3} \geq 0 \end{cases} \\
x'_3 &= -a_3 x_3 + \begin{cases} -m_3\left(x_3 - \frac{x_1+x_2+x_4}{3}\right) & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2+x_4}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_3 - \frac{x_1+x_2+x_4}{3} \geq 0 \end{cases} \\
x'_4 &= -a_4 x_4 + \begin{cases} -m_4\left(x_4 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) & ; \quad x_4 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3} < 0 \\ 0 & ; \quad x_4 - \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

A continuación se presentan los datos experimentales y los gráficos asociados a cada persona.

Persona	**T**				$\ddot{X}$			
1	[7,5	12,9	15,9	20,3]	[17,0180	9,6692	6,3359	5,2064]
2	[1,3	15,4	25,8	28,1]	[27,2150	2,7160	0,4279	0,7569]
3	[9,8	13,7	14,2	27,0]	[3,6334	1,3639	2,0146	0,07169]
4	[4,2	10,5	16,7	23]	[8,8325	1,0958	1,3436	0,3481]

Tabla 26: Datos experimentales

Los datos experimentales de la cuarta persona se obtuvieron a partir de la solución numérica del sistema (2) a través del comando *lsode* de *octave*.

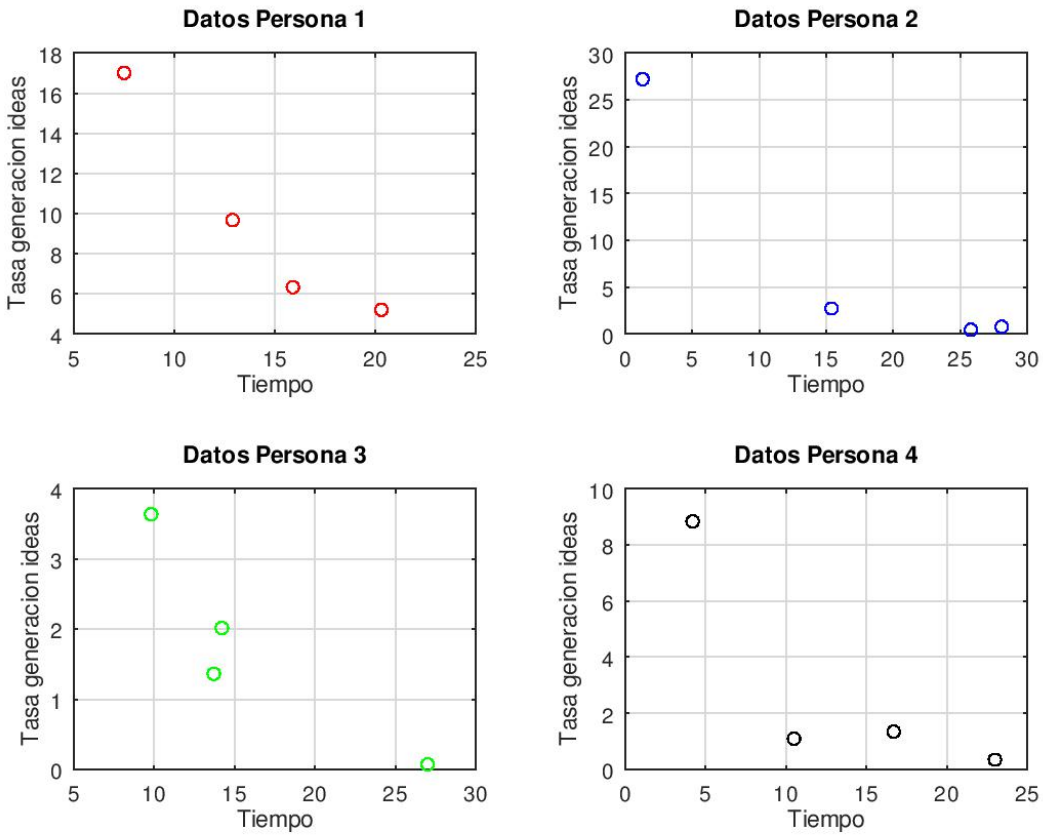

Figura 40: Datos experimentales persona 1, 2, 3 y 4

Se formula el problema de estimación de parámetros de una lluvia de ideas por escrito de cuatro personas descrito en el sistema de ecuaciones diferenciales anterior (2), el cual consiste en estimar un vector de parámetros p. Se construye la función objetivo $SEC(p)$ y se estima p como aquel valor que minimiza $SEC(p)$, es decir, que la distancia entre los datos experimentales y la aproximación numérica sea la mínima.

Se formularán tres problemas de optimización:

- Estimar el factor de decaimiento. En este caso $p = (a_1, a_2, a_3, a_4)$.
- Estimar el factor de acomodación. En este caso $p = (m_1, m_2, m_3, m_4)$.
- Estimar el factor de decaimiento y acomodación. En este caso $p = (a_1, a_2, a_3, a_4, m_1, m_2, m_3, m_4)$.

Se recurre, nuevamente, al método de mínimos cuadrados para estimar el vector de parámetros p.

4.2.7. Problema 1: Estimar el factor de decaimiento a_i

Esta sección tiene por objetivo estimar el factor de decaimiento del sistema (2), es decir, estimar $p = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, por tanto los parámetros m_i se asumirán conocidos.

A continuación se presenta la tabla 27, en donde se hacen variaciones al vector de aproximación inicial (experimento 1), el cual corresponde a los valores óptimos obtenidos en la estimación de parámetros con tres personas, pues con estos valores se está más cerca de la solución numérica. Además, se espera a priori que con estos valores se obtenga una mejor convergencia. El parámetro inicial de decaimiento asociado a la persona 4 será el promedio de los valores óptimos obtenidos con las otras tres personas.

Por tanto, el objetivo es evaluar la sensibilidad a variaciones en los valores óptimos cuando agregamos una persona en el trabajo de lluvia de ideas por escrito.

En el experimento 2 y 3 se mantiene el vector de aproximación inicial para a_i del experimento 1. Seguido de esto, su variación será mantener al menor y al mayor valor del experimento 1 (desde experimento 4 al 9). En tanto, para los parámetros conocidos (m_i), la variación será entre 0.01 a 0.09, manteniendo valores intermedios, al menor y al mayor valor.

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4	E_s
	p_0	**0.097173**	**0.212219**	**0.320597**	**0.209996**	0.09	0.09	0.09	0.09	$So = 76{,}550$
1	(1)	0.097074	0.208108	0.273815	0.398229	-	-	-	-	$(11) = 3{,}5898589$
	(2)	0.097075	0.208099	0.273829	0.398217	-	-	-	-	$(22) = 3{,}5898586$
	p_0	**0.097173**	**0.212219**	**0.320597**	**0.209996**	0.01	0.02	0.03	0.04	$So = 78{,}433$
2	(1)	0.0968583	0.196871	0.244214	0.375683	-	-			$(11) = 4{,}270806$
	(2)	0.0968578	0.196859	0.244232	0.375730	-	-			$(22) = 4{,}270803$
	p_0	**0.097173**	**0.212219**	**0.320597**	**0.209996**	0.06	0.07	0.08	0.09	$So = 76{,}734$
3	(1)	0.096995	0.205880	0.268430	0.398857	-	-			$(11) = 3{,}7477559$
	(2)	0.096993	0.205889	0.268428	0.398834	-	-			$(22) = 3{,}7477555$
	p_0	**0.097173**	**0.097173**	**0.097173**	**0.097173**	0.01	0.01	0.01	0.01	$So = 872{,}51$
4	(1)	0.096925	0.194901	0.2366065	0.361563	-	-			$(11) = 4{,}925599$
	(2)	0.096923	0.194902	0.2366066	0.361558		-			$(22) = 4{,}925598$
	p_0	**0.097173**	**0.097173**	**0.097173**	**0.097173**	0.06	0.07	0.08	0.09	$So = 878{,}13$
5	(1)	0.096993	0.205890	0.268431	0.398851	-	-			$(11) = 3{,}7477554$
	(2)	0.096994	0.205888	0.268435	0.398844	-	-			$(22) = 3{,}7477552$
	p_0	**0.097173**	**0.097173**	**0.097173**	**0.097173**	0.09	0.09	0.09	0.09	$So = 880{,}66$
6	(1)	0.0970747	0.208103	0.273753	0.398273	-	-	-	-	$(11) = 3{,}58986$
	(2)	0.0970746	0.208097	0.273819	0.398229	-	-	-	-	$(22) = 3{,}58985$
	p_0	**0.320597**	**0.320597**	**0.320597**	**0.320597**	0.01	0.01	0.01	0.01	$So = 371{,}22$
7	(1)	0.096923	0.194905	0.236604	0.361551	-	-	-	-	$(11) = 4{,}92559871$
	(2)	0.096924	0.194909	0.236606	0.361560	-	-	-	-	$(22) = 4{,}92559872$
	p_0	**0.320597**	**0.320597**	**0.320597**	**0.320597**	0.06	0.07	0.08	0.09	$So = 366{,}99$
8	(1)	0.096994	0.205885	0.268430	0.398845	-	-	-	-	$(11) = 3{,}7477553$
	(2)	0.096993	0.205880	0.268442	0.398835	-	-	-	-	$(22) = 3{,}7477555$
	p_0	**0.320597**	**0.320597**	**0.320597**	**0.320597**	0.09	0.09	0.09	0.09	$So = 365{,}20$
9	(1)	0.097074	0.208111	0.273826	0.398228	-	-	-	-	$(11) = 3{,}5898591$
	(2)	0.097075	0.208104	0.273798	0.398241	-	-	-	-	$(22) = 3{,}5898592$

Tabla 27: Estimación del vector $p = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

Según la tabla anterior es posible observar que el parámetro de decaimiento se mantiene estable tras toda la experimentación numérica, pues hay convergencia a valores físicamente razonables en el contexto de una lluvia de ideas por escrito. Además, mientras mayor sea la inclinación, tanto en los parámetros a estimar como en los conocidos, los algoritmos de optimización logran reducir el error acumulado al mínimo.

Con el experimento 9 se logra reducir el error al mínimo en comparación con el experimento 1, con el algoritmo $fminunc$ ***(3.58). Por tanto los valores óptimos para cada uno de los parámetros son*** $a_1 = 0{,}097074$***,*** $a_2 = 0{,}208111$***,*** $a_3 = 0{,}273826$ ***y*** $a_4 = 0{,}398228$**.**

Los siguientes gráficos muestran el rendimiento de cada persona de una lluvia de ideas por escrito con los valores óptimos del experimento 9 de la tabla 27, la solución numérica y los datos experimentales:

Exp		a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4
9	Solución numérica (sol num)	0.320597	0.320597	0.320597	0.320597	0.09	0.09	0.09	0.09
	Valores óptimos (optimos)	0,097074	0,208111	0,273826	0,398228	-	-	-	-

Tabla 28: Parámetros referenciales figura 41, 42, 43 y 44

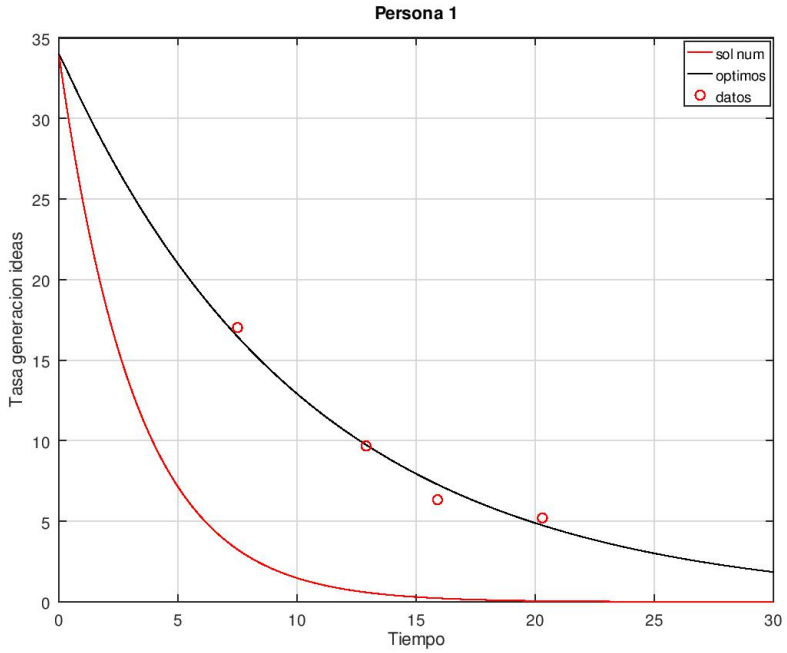

Figura 41: Factor de decaimiento persona 1

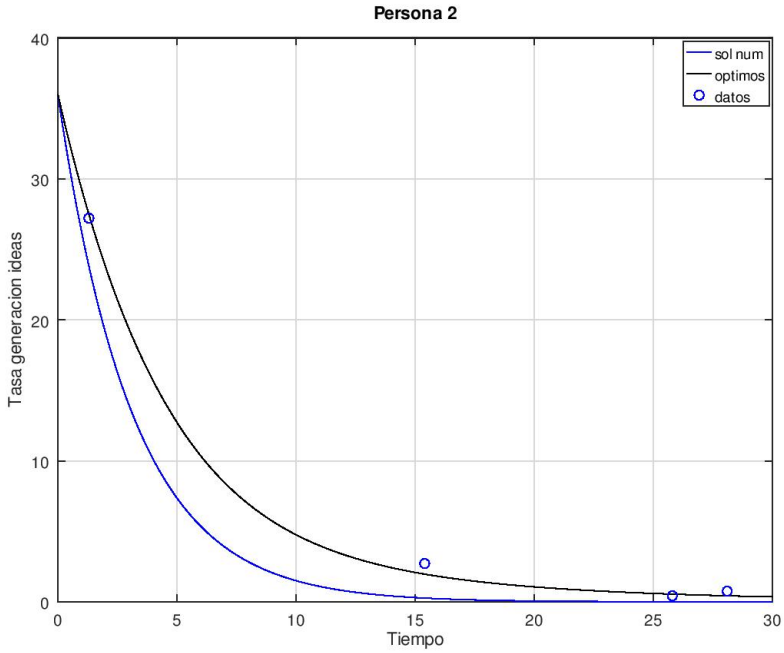

Figura 42: Factor de decaimiento persona 2

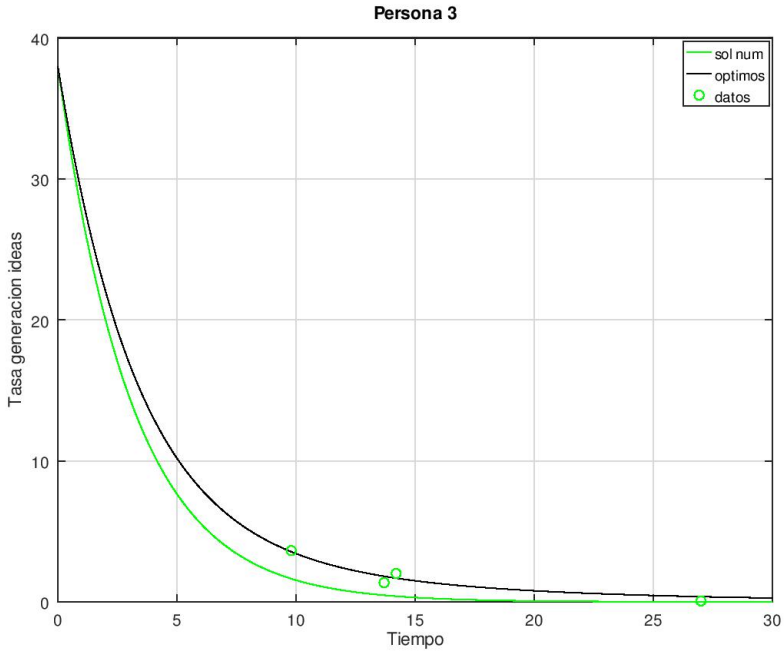

Figura 43: Factor de decaimiento persona 3

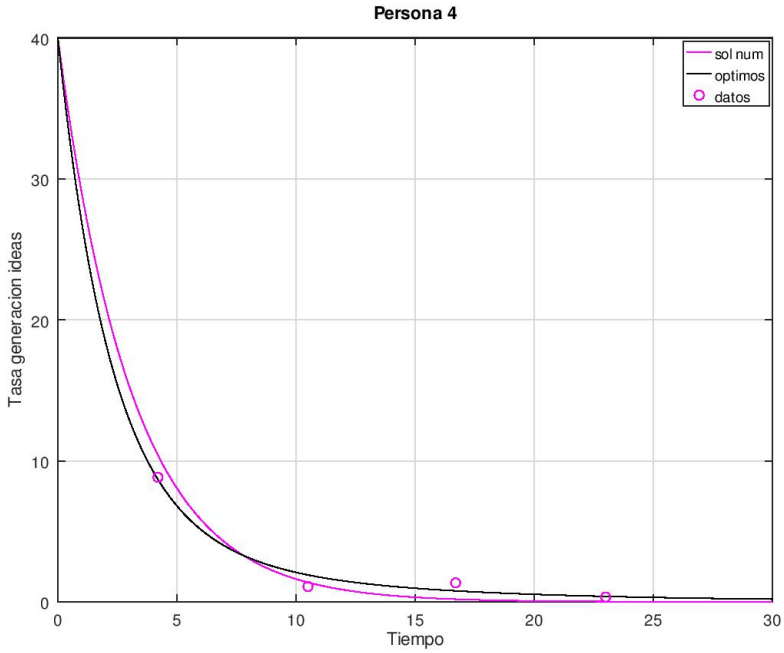

Figura 44: Factor de decaimiento persona 4

4.2.8. Problema 2: Estimar el factor de acomodación m_i

Esta sección tiene por objetivo estimar el factor de acomodación del sistema (2), es decir, estimar $p = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, por tanto los parámetros a_i se asumirán conocidos.

A continuación se presenta la tabla 29, en donde varía el vector de aproximación inicial, el cual corresponde a los valores óptimos obtenidos en la estimación de parámetros con tres personas, pues con estos valores se está más cerca de la solución numérica. El parámetro inicial de acomodación asociado a la persona 4, al igual que en el problema de optimización 1, será el promedio de los valores óptimos obtenidos con las otras tres personas.

Por tanto, el objetivo es evaluar la sensibilidad a variaciones en los valores óptimos del factor de acomodación cuando agregamos una persona en el trabajo de lluvia de ideas por escrito.

Las variaciones se realizan en base al experimento 1. En el experimento 2 y 3 sólo se hacen variaciones a los parámetros que se asumen conocidos, los parámetros a estimar se mantienen. Desde el experimento 4 al 11 se hacen variaciones tanto a los parámetros conocidos como al vector de aproximación inicial. Los parámetros a estimar se igualan todos al mismo valor, con respecto al experimento 1. En tanto los parámetros que se asumen conocidos varían de 0.1 a 0.4.

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4	E_s
	p_0	0.1	0.2	0.3	0.4	**3.785228**	**0.086376**	**0.066094**	**1.312566**	$So = 56{,}49$
1	(1)	-	-	-	-	3.748762	0.208251	0.115514	0.077149	$(11) = 3{,}2917$
	(2)	-	-	-	-	2.315676	0.228580	0.116994	0.077943	$(22) = 3{,}231962$
	p_0	0.1	0.1	0.1	0.1	**3.785228**	**0.086376**	**0.066094**	**1.312566**	$So = 831{,}40$
2	(1)	-	-	-	-	3.788073	-0.103673	-0.029165	1.312566	$(11) = 791{,}80$
	(2)	-	-	-	-	2774.99	-0.10282	-6189.6	2617.03	$(22) = 791{,}59$
	p_0	0.19	0.2	0.21	0.22	**3.785228**	**0.086376**	**0.066094**	**1.312566**	$So = 213{,}22$
3	(1)	-	-	-	-	3.849062	-0.081789	-0.172068	1.258702	$(11) = 209{,}31$
	(2)	-	-	-	-	281773.2	0.083546	-0.174522	-0.165977	$(22) = 201{,}79$
	p_0	0.1	0.2	0.3	0.4	**0.066094**	**0.066094**	**0.066094**	**0.066094**	$So = 5{,}3310$
4	(1)	-	-	-	-	2.309613	0.228540	0.117021	0.077929	$(11) = 3{,}231966$
	(2)	-	-	-	-	2.316091	0.228608	0.117028	0.077909	$(22) = 3{,}231962$
	p_0	0.1	0.1	0.1	0.1	**0.066094**	**0.066094**	**0.066094**	**0.066094**	$So = 819{,}81$
5	(1)	-	-	-	-	0.166203	-0.112481	0.082028	0.066094	$(11) = 792{,}34318$
	(2)	-	-	-	-	0.16697	-0.11246	0.17567	0.30771	$(22) = 792{,}34317$
	p_0	0.1	0.2	0.3	0.4	**3.785228**	**3.785228**	**3.785228**	**3.785228**	$So = 410{,}63$
7	(1)	-	-	-	-	1.759149	1.881724	0.103826	0.071593	$(11) = 4{,}1916$
	(2)	-	-	-	-	1.024951	7.159155	0.102677	0.070664	$(22) = 4{,}9735$
	p_0	0.1	0.1	0.1	0.1	**3.785228**	**3.785228**	**3.785228**	**3.785228**	$So = 900{,}24$
8	(1)	-	-	-	-	-0.0000036	2.258954	3.398054	3.78853	$(11) = 830{,}09$
	(2)	-	-	-	-	3600.7	-0.10282	-1657.98	-3116.9	$(22) = 791{,}59$
	p_0	0.1	0.2	0.3	0.4	**0.086376**	**0.086376**	**0.086376**	**0.086376**	$So = 4{,}5227$
9	(1)	-	-	-	-	2.309511	0.228019	0.117057	0.078017	$(11) = 3{,}23197$
	(2)	-	-	-	-	2.316713	0.228503	0.117024	0.077911	$(22) = 3{,}23196$
	p_0	0.1	0.2	0.3	0.4	**1.312566**	**1.312566**	**1.312566**	**1.312566**	$So = 189{,}22$
10	(1)	-	-	-	-	1.332108	0.251582	0.118602	0.078724	$(11) = 3{,}2952$
	(2)	-	-	-	-	2.317189	0.228465	0.116954	0.077963	$(22) = 3{,}231964$
	p_0	0.1	0.1	0.1	0.1	**0.086376**	**0.086376**	**0.086376**	**0.086376**	$So = 821{,}38$
11	(1)	-	-	-	-	0.167153	-0.112453	-0.171118	0.086376	$(11) = 792{,}343179$
	(2)	-	-	-	-	0.166752	-0.112467	0.023754	0.207814	$(22) = 792{,}343178$

Tabla 29: Estimación del vector $p = (m_1, m_2, m_3, m_4)$

*Observación: Los algoritmos no convergen si se cambia el orden de magnitud de los parámetros conocidos.

En la siguiente experimentación numérica presentada en la tabla 30, se cambiará la familia de parámetros conocidos, la misma que se usó en el estudio numérico con tres personas.

El objetivo es explorar otras posibilidades donde los algoritmos logren la convergencia de los parámetros del factor de acomodación de valores razonables.

Exp.	In/Est	a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4	E_s
	p_0	0.17	0.18	0.19	0.2	**3.785228**	**0.086376**	**0.066094**	**1.312566**	$So = 209{,}41$
1	(1)	-	-	-	-	3.870327	-0.081643	-0.181453	1.272115	$(11) = 199{,}73$
	(2)	-	-	-	-	8.68752	0.23122	-0.19861	-0.19172	$(22) = 190{,}67$
	p_0	0.17	0.17	0.17	0.17	**3.785228**	**0.086376**	**0.066094**	**1.312566**	$So = 270{,}22$
2	(1)	-	-	-	-	3.76391	0.37083	-0.19869	1.31257	$(11) = 264{,}05$
	(2)	-	-	-	-	1.96809	0.25761	4012.45	2416.01	$(22) = 269{,}59$
	p_0	0.17	0.18	0.19	0.2	**3.785228**	**3.785228**	**3.785228**	**3.785228**	$So = 251{,}10$
3	(1)	-	-	-	-	15.66145	-0.14627	5.36991	18.00896	$(11) = 205{,}38$
	(2)	-	-	-	-	345.44632	-0.15361	368.41	95.201	$(22) = 204{,}64$
	p_0	0.17	0.18	0.19	0.2	**0.066094**	**0.066094**	**0.066094**	**0.066094**	$So = 217{,}55$
4	(1)	-	-	-	-	1.78472	0.55289	-0.19995	-0.19093	$(11) = 194{,}82$
	(2)	-	-	-	-	343815.9	0.067409	-0.200305	-0.1913	$(22) = 188{,}48$
	p_0	0.17	0.18	0.19	0.2	**0.086376**	**0.086376**	**0.086376**	**0.086376**	$So = 217{,}12$
5	(1)	-	-	-	-	2.91034	0.25632	-0.20272	-0.19096	$(11) = 193{,}01$
	(2)	-	-	-	-	295485.8	158409.2	-0.16291	-0.18158	$(22) = 189{,}84$
	p_0	0.17	0.18	0.19	0.2	**1.312566**	**1.312566**	**1.312566**	**1.312566**	$So = 229{,}35$
6	(1)	-	-	-	-	1.63717	0.71669	0.96165	-0.1460	$(11) = 200{,}79$
	(2)	-	-	-	-	20868.4	6214.6	9278.6	-0.14359	$(22) = 191{,}90$

Tabla 30: Estimación del vector $p = (m_1, m_2, m_3, m_4)$

A diferencia de la experimentación numérica con tres personas, con la familia de experimentos de la tabla 29, los algoritmos no logran la convergencia del parámetro de acomodación a valores físicamente razonables, pues arroja valores negativos para m_i, lo cual no puede ocurrir en una lluvia de ideas por escrito. Existe una total inestabilidad en la estimación del parámetro de acomodación.

Por otro lado, observando la tabla 30, existe convergencia cuando en el vector de aproximación inicial los parámetros conocidos (a_i) van del orden 0,1 a 0,4 y los parámetros a estimar se igualan a uno de los valores óptimos del primer experimento. Esto se puede observar en los experimentos 4, 7, 9 y 10. En los experimentos 4, 9 y 10 existe una estabilidad en la estimación de los parámetros m_i, con el algoritmo (2), $fminsearch$, la estimación varía en algunos decimales.

Sin embargo, dentro de estos últimos experimentos mencionados, los valores óptimos se encuentran específicamente en el experimento 4 de la tabla 29 con el algoritmo $fminsearch$, donde el error acumulado (5,33) es menor en comparación al experimento 1 (56.49). Además, en este experimento (4) se logra reducir el error acumulado a 3.23.

Por lo anteriormente mencionado, los valores óptimos para los parámetros del factor de acomodación son $m_1 = 2{,}316091$***,*** $m_2 = 0{,}228608$***,*** $m_3 = 0{,}117028$ ***y*** $m_4 = 0{,}077909$ **.**

Los siguientes gráficos muestran el rendimiento de cada persona de una lluvia de ideas por escrito con los valores óptimos del experimento 4 de la tabla 29, la solución numérica y los datos experimentales:

Exp		a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4
9	Solución numérica (sol num)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.066094	0.066094	0.066094	0.066094
	Valores óptimos (optimos)	-	-	-	-	2.316091	0.228608	0.117028	0.077909

Tabla 31: Parámetros referenciales figura 45, 46, 47 y 48

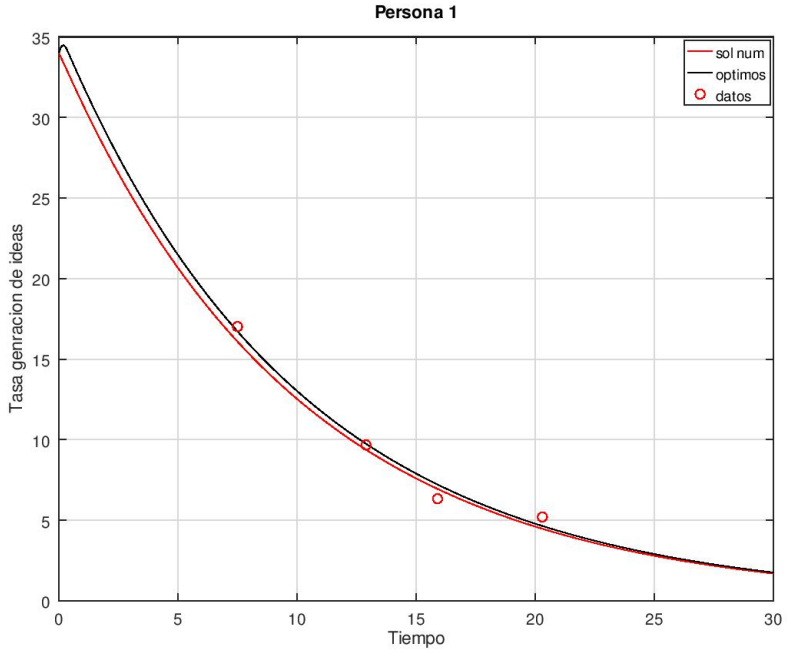

Figura 45: Factor de acomodación persona 1

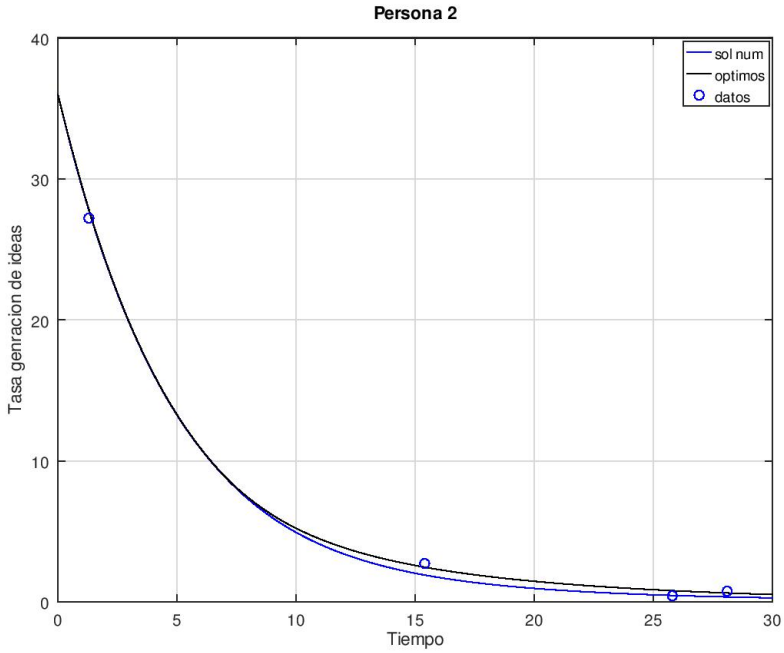

Figura 46: Factor de acomodación persona 2

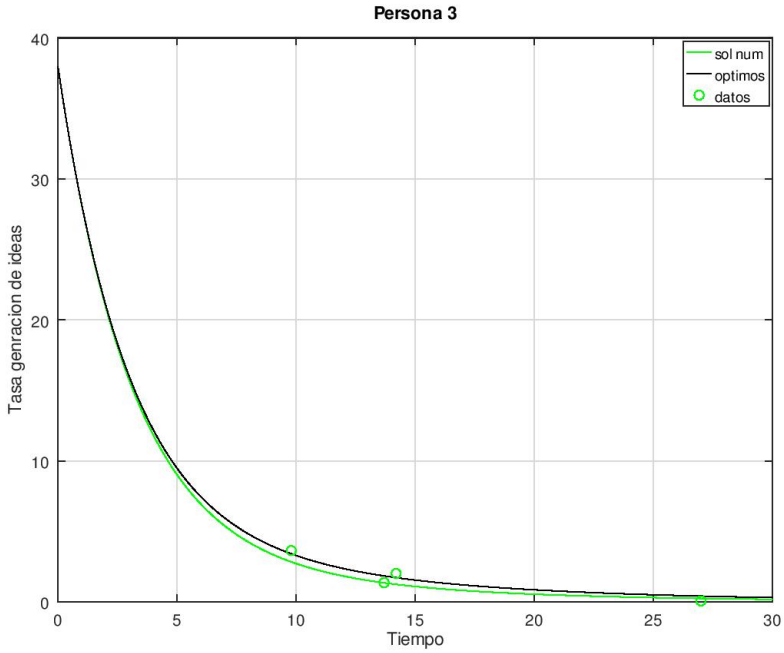

Figura 47: Factor de acomodación persona 3

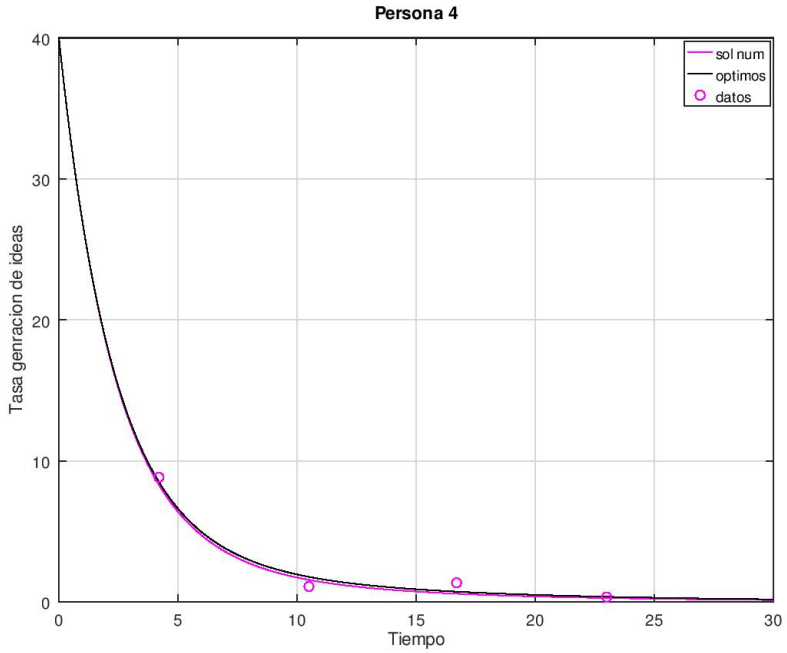

Figura 48: Factor de acomodación persona 4

4.2.9. Problema 3: Estimar el factor de decaimiento y acomodación

Esta sección tiene por objetivo estimar el factor de decaimiento y acomodación del sistema (2), es decir, estimar $p = (a_1, a_2, a_3, a_4, m_1, m_2, m_3, m_4)$.

La experimentación numérica de la tabla 32 se hizo a través de la variación del experimento 1, el cual corresponde a los valores óptimos obtenidos en la estimación de parámetros con tres personas, pues con estos valores se está más cerca de la solución numérica. El parámetro inicial de decaimiento y acomodación asociado a la persona 4 será el promedio de los valores óptimos obtenidos con las otras tres personas. Por tanto, el objetivo es evaluar la sensibilidad a variaciones en los valores óptimos cuando agregamos una persona en el trabajo de lluvia de ideas por escrito.

Desde el experimento 2 al 7 se hacen variaciones como sumar o restar el 1 %, el 10 % y el 15 % a todos los parámetros. En los últimos experimentos se hicieron variaciones como mantener el menor y/o mayor valor de a_i y m_i como vector inicial.

Exp.	-	a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4	E_s
	p_0	**0.09765**	**0.218267**	**0.25421**	**0.190042**	**0.325625**	**0.127986**	**0.026528**	**0.160046**	So = 109,89
1	(1)	0.104154	0.239838	0.255024	0.383510	15.132564	0.598096	0.050734	0.054881	(11) = 2,4765
	(2)	0.104765	0.597013	0.246223	0.380337	15.339015	10.210146	0.029044	0.047351	(22) = 2,6290
	p_0	**0.0986265**	**0.22044967**	**0.2567521**	**0.19194242**	**0.32888125**	**0.12926586**	**0.02679328**	**0.16164646**	So = 106,27
2(+1 %)	(1)	0.104153	0.239813	0.255036	0.383512	15.136606	0.597619	0.050755	0.054887	(11) = 2,4765
	(2)	0.102365	0.233069	0.260808	0.384629	5.805326	0.594048	0.063142	0.056594	(22) = 2,5120
	p_0	**0.0966735**	**0.21608433**	**0.2516679**	**0.18814158**	**0.32236875**	**0.12670614**	**0.02626272**	**0.15844554**	So = 113,76
3(-1 %)	(1)	0.104152	0.239809	0.255029	0.383514	15.121541	0.597601	0.050738	0.054887	(11) = 2,4765
	(2)	0.099797	0.237858	0.250522	0.386517	1.532210	0.868572	0.040919	0.052620	(22) = 2,6852
	p_0	**0.107415**	**0.2400937**	**0.279631**	**0.2090462**	**0.3581875**	**0.1407846**	**0.0291808**	**0.1760506**	So = 83,584
4(+10 %)	(1)	0.104132	0.239726	0.255006	0.383506	14.913261	0.596631	0.050708	0.054885	(11) = 2,4765
	(2)	0.103338	0.236324	0.256145	0.383496	8.592048	0.568292	0.053959	0.054061	(22) = 2,4849
	p_0	**0.087885**	**0.1964403**	**0.228789**	**0.1710378**	**0.2930625**	**0.1151874**	**0.0238752**	**0.1440414**	So = 161,74
5(-10 %)	(1)	0.104153	0.239817	0.255033	0.383512	15.136266	0.597680	0.050749	0.054886	(11) = 2,4765
	(2)	0.102429	0.232395	0.250890	0.388493	4.883054	0.540514	0.043671	0.062460	(22) = 2,5246
	p_0	**0.1122975**	**0.25100705**	**0.2923415**	**0.2185483**	**0.37446875**	**0.1471839**	**0.0305072**	**0.1840529**	So = 77,365
6(+15 %)	(1)	0.104153	0.239825	0.255035	0.383511	15.134378	0.597876	0.050753	0.054884	(11) = 2,4765
	(2)	0.101943	0.241243	0.249116	0.382079	4.241404	0.771586	0.038765	0.052303	(22) = 2,5318
	p_0	**0.0830025**	**0.18552695**	**0.2160785**	**0.1615357**	**0.27678125**	**0.1087881**	**0.0225488**	**0.1360391**	So = 200,89
7(-15 %)	(1)	0.104148	0.239802	0.255069	0.383505	15.076200	0.597923	0.050811	0.054881	(11) = 2,4765
	(2)	0.103928	0.239145	0.254284	0.383995	13.254094	0.587319	0.049532	0.055042	(22) = 2,4771
	p_0	**0.097650**	**0.097650**	**0.097650**	**0.097650**	**0.026528**	**0.026528**	**0.026528**	**0.026528**	So = 864,13
8	(1)	0.104153	0.239814	0.255035	0.383511	15.133101	0.597649	0.050754	0.054885	(11) = 2,4765
	(2)	0.096180	0.217633	0.259777	0.381736	-0.233789	0.303574	0.064593	0.057003	(22) = 2,9745
	p_0	**0.097650**	**0.097650**	**0.097650**	**0.097650**	**0.325625**	**0.325625**	**0.325625**	**0.325625**	So = 900,36
9	(1)	0.104156	0.239820	0.255038	0.383512	15.158935	0.597690	0.050758	0.054885	(11) = 2,4765
	(2)	0.103934	0.239275	0.255231	0.382330	12.593928	0.614061	0.052191	0.052921	(22) = 2,4787
	p_0	**0.254210**	**0.254210**	**0.254210**	**0.254210**	**0.325625**	**0.325625**	**0.325625**	**0.325625**	So = 286,46
10	(1)	0.104154	0.239819	0.255038	0.383509	15.141856	0.597656	0.050757	0.054884	(11) = 2,4765
	(2)	0.098651	0.223898	0.251323	0.382120	0.743449	0.434308	0.045807	0.054958	(22) = 2,6988
	p_0	**0.254210**	**0.254210**	**0.254210**	**0.254210**	**0.026528**	**0.026528**	**0.026528**	**0.026528**	So = 303,15
11	(1)	0.104154	0.239809	0.255035	0.383515	15.138556	0.597527	0.050752	0.054894	(11) = 2,4765
	(2)	0.102606	0.275304	0.247532	0.381064	5.479091	1.677149	0.032582	0.050345	(22) = 2,5836

Tabla 32: Estimación del parámetro de decaimiento y acomodación para una lluvia de ideas de cuatro personas

Tras la experimentación numérica presentada en la tabla 32 es posible observar que se mantiene estable la convergencia en los parámetros de decaimiento. No así para todos los parámetros m_i, pues, específicamente, el parámetro m_1 no converge, en la gran mayoría, a un valor razonable en el contexto de una lluvia de ideas por escrito, además el valor está fuera del orden de convergencia de los demás parámetros.

Por otra parte, se puede apreciar que en toda la experimentación numérica los algoritmos logran reducir el error acumulado en el orden 2,5 promedio. Por tanto cuando hacemos variaciones entre el 1 y el 15 por ciento ó mantenemos los valores óptimos al menor o mayor valor, los algoritmos convergen a valores numéricamente razonables, en la mayoría de los parámetros.

En tanto, sólo en el experimento 10 del la tabla 32 se logró que converjan todos los parámetros a valores razonables con el algoritmo $fminsearch$ y el error acumulado se reduce a 2,69 .

Por tanto, los valores óptimos para los parámetros de decaimiento y acomodación son $a_1 = 0,098651$***,*** $a_2 = 0{,}223898$***,*** $a_3 = 0{,}251323$***,*** $a_4 = 0{,}382120$***,*** $m_1 = 0{,}743449$***,*** $m_2 = 0{,}434308$***,*** $m_3 = 0{,}045807$ ***y*** $m_4 = 0{,}054958$***.***

Los siguientes gráficos muestran el rendimiento de cada persona de una lluvia de ideas por escrito compuesta por cuatro personas con los valores óptimos obtenidos en el experimento 10 de la tabla 32, la solución numérica y los datos experimentales:

Exp		a_1	a_2	a_3	a_4	m_1	m_2	m_3	m_4
10	(sol num)	0.254210	0.254210	0.254210	0.254210	0.325625	0.325625	0.325625	0.325625
	(optimos)	0,098651	0,223898	0,251323	0,382120	0,743449	0,434308	0,045807	0.054958

Tabla 33: Parámetros referenciales figura 49, 50, 51 y 52

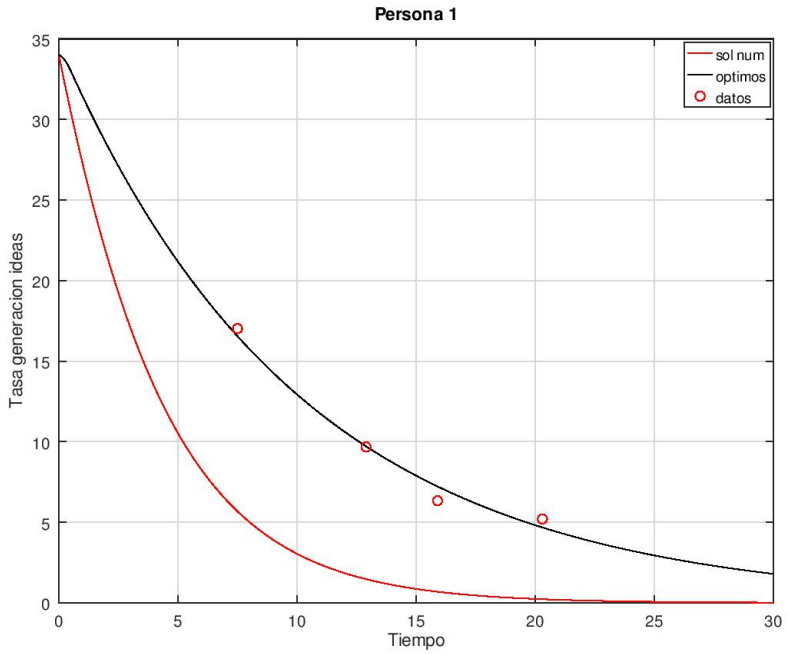

Figura 49: Factor de decaimiento y acomodación persona 1

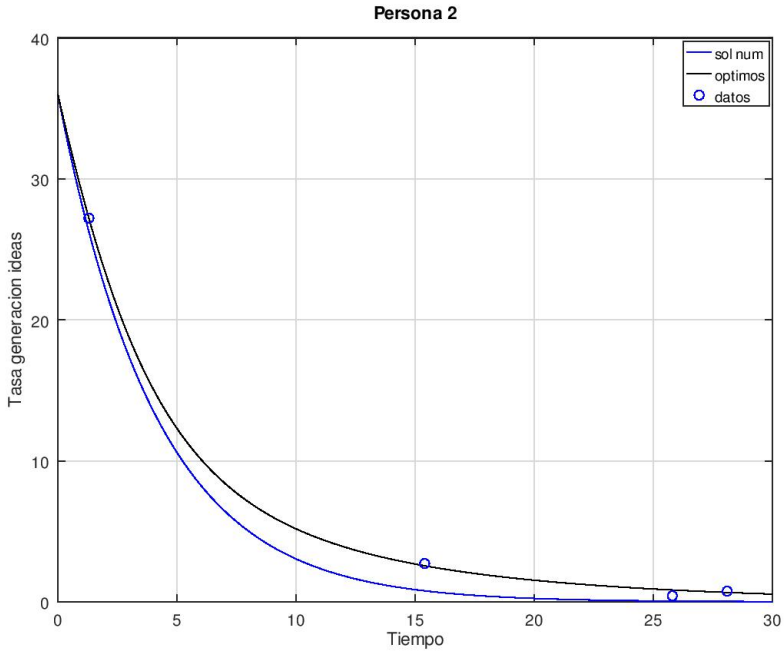

Figura 50: Factor de decaimiento y acomodación persona 2

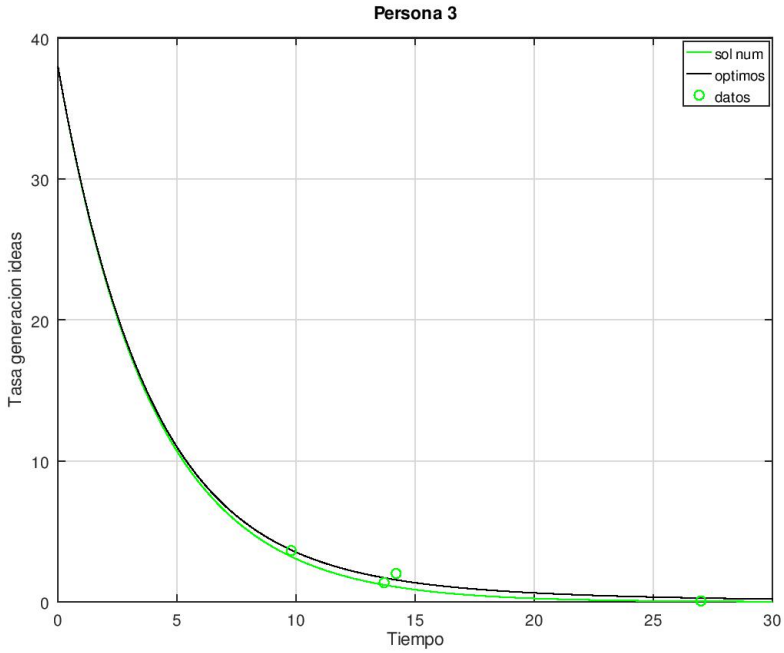

Figura 51: Factor de decaimiento y acomodación persona 3

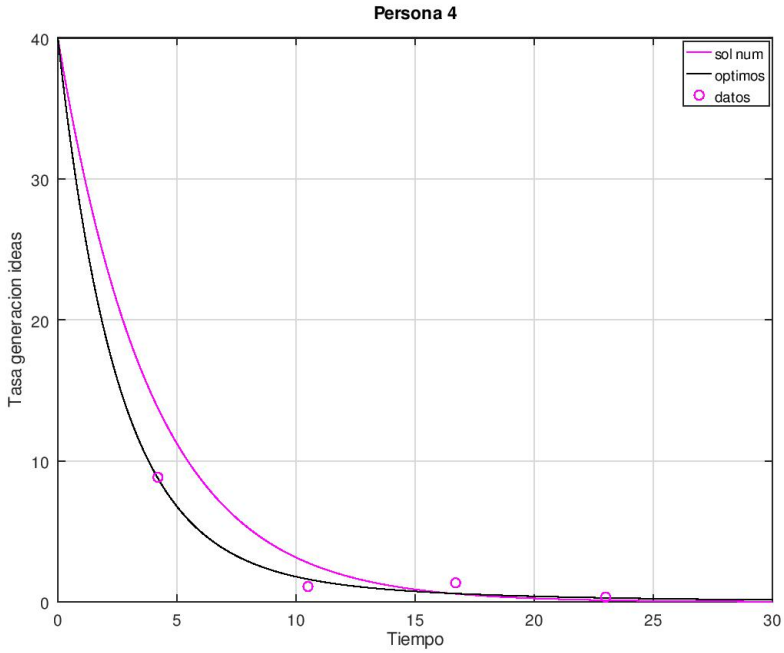

Figura 52: Factor de decaimiento y acomodación persona 4

5. DISCUSIÓN

El modelo no lineal presentado en este documento, basado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, representa el rendimiento de un grupo de personas que conforman una lluvia de ideas en forma escrita. En este formato, el modelo supone que los factores que intervienen en la producción de ideas son el decaimiento y acomodación, es decir, son factores inhibidores de dicha producción. Además, es importante mencionar que en la lluvia de ideas por escrito se fomenta la creatividad y da oportunidad a todos los participantes de expresar sus ideas pues se excluyen los factores sociales como el bloqueo.

El estudio numérico de esta investigación se realizó mediante simulaciones numéricas mediante el programa *Octave* a través del comando *lsode*. Los objetivos de estas simulaciones estaba centrados en evaluar el impacto de la condición inicial y del número de integrantes en el rendimiento del grupo y evaluar el impacto de cada uno de los factores y su interacción. El primer objetivo se trabajó mediante la comparación de diversos grupos de lluvias de ideas en donde sólo se hizo variación de la condición inicial, cambiando orden de magnitud; los parámetros de decaimiento y acomodación se mantuvieron constantes. A partir de esto se pudo conjeturar que la condición inicial, bajo estas condiciones, sólo implican una traslación de las curvas solución.

En relación al impacto del número de integrantes en el rendimiento de una lluvia de ideas por escrito se trabajó a través de la comparación de tres casos, en diferentes condiciones de operación. Primero, cuando varía sólo el número de integrantes. Segundo, cuando varía el número de integrantes y el factor de decaimiento. Tercero, cuando varía el número de integrantes y el factor de acomodación. Los resultados obtenidos en el primer caso, tras la comparación del rendimiento en un grupo de tres, cinco y siete personas, indican que el rendimiento no cambia si sólo varía el número de integrantes. En el segundo caso, los resultados obtenidos indican que, bajo estas condiciones, esto incide en el rendimiento de cada persona y no del grupo, pues si una persona comienza la sesión con un factor de decaimiento más alto que los demás integrantes esto implicará que tenga el menor rendimiento y viceversa durante toda la sesión. En cuanto, al tercer caso, los resultados obtenidos nos indican que cuando sólo varía el factor de acomodación y número de integrantes no implica un aumento o disminución en el rendimiento del grupo, pues este se ajusta a una sola curva solución.

En cuanto a evaluar el impacto de cada uno de los factores y su interacción, los resultados evidencian que la interacción entre el factor de decaimiento y condición inicial tiene un fuerte impacto en el rendimiento de los integrantes de una lluvia de ideas por escrito, pues si una persona comienza la sesión con la menor condición inicial y menor factor de decaimiento intentará aumentar su rendimiento y estará por sobre los demás integrantes del grupo (Ver figura 17). En tanto, entre la interacción entre el factor de acomodación y condición inicial, los resultados indican que si una persona comienza con una condición más alta que los demás integrantes del grupo y un factor de acomodación más alto o más bajo con respecto a los demás miembros del grupo no intentará bajar su rendimiento, será el mismo (Ver figura 20). Finalmente, entre la interacción de los factores de decaimiento, acomodación y la condición inicial, los resultados obtenidos permiten conjeturar que cuando se combina el factor de decaimiento y condición inicial esto tendrá un alto impacto en el rendimiento de los integrantes del grupo, independiente si varía o no el factor de acomodación, por lo que la productividad de ideas está determinada en gran medida por estos dos primeros factores. No obstante, una alta inclinación en el parámetro de acomodación asegura mayor productividad de un individuo por sobre los demás integrantes del grupo. Además, cuando aumenta el número de integrantes y el factor de acomodación, en forma simultánea, se asegura una mayor productividad de los integrantes del grupo (Ver figura 23). También, el desempeño en la productividad de ideas de una persona aumenta en conjunto cuando aumenta la condición inicial y su factor de decaimiento es el más bajo (ver figura 26 gráfico 2).

Por otra parte, la estimación de parámetros de esta investigación nos brinda la explicación del origen de los parámetros que se asignan a los factores de decaimiento y acomodación presentes en los diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan grupos de lluvia de ideas de forma escrita. La estimación de dichos parámetros se hizo por comparación con datos experimentales para una lluvia de ideas con tres y cuatro personas. La primera experimentación numérica estaba enfocada en estimar los parámetros de decaimiento (a_1, a_2 y a_3). Seguido de esto se estimaron los parámetros de acomodación (m_1, m_2 y m_3) y, finalmente estimar los seis parámetros

en conjunto. Asimismo se hizo para estimar estos parámetros en el caso de cuatro personas. La experimentación numérica de estos tres conjuntos se hicieron a través del método de mínimos cuadrados con la implementación de un programa de *Octave* que contiene dos algoritmos de optimización, $fminunc$ y $fminsearch$. Los resultados obtenidos permiten afirmar que la estimación del parámetro de decaimiento se mantiene estable en una lluvia de ideas de tres y cuatro personas tras toda la experimentación numérica, vale decir, hubo convergencia a valores numéricamente razonables. En la estimación del parámetro de acomodación existe una inestabilidad en la convergencia. En el caso de una lluvia de ideas de tres personas los resultados obtenidos indican que los parámetros conocidos tienen un alto impacto en los parámetros a estimar, pues en algunos casos cuando van del orden 0,17 a 0,19 los algoritmos convergen a valores negativos para el parámetro m_i, lo cual no puede ser posible, ya que este sólo se da en sentido positivo, es decir, a favor de la producción de ideas. En cambio cuando cambia la familia de parámetros conocidos en el orden 0,1 a 0,3 existe convergencia a valores óptimos, además, el error acumulado se reduce al mínimo en comparación con la familia de parámetros anterior. En el caso de estimar el factor de acomodación para cuatro personas, la familia de parámetros para a_i se mantiene en el orden 0,1 a $0,4$, en cambio para el parámetro m_i existe convergencia cuando este se iguala al menor de los valores óptimos. En definitiva, el vector de parámetros iniciales es diferente de un grupo a otro, es decir, las condiciones en la estimación para el parámetro de acomodación cambian cuando agregamos otra persona, pues implica en que se debe explorar en otras posibilidades. Finalmente, en el caso de estimar ambos factores de forma simultánea en un grupo de tres (seis parámetros) y cuatro personas (ocho parámetros), implica un trabajo más minucioso pues cambia la familia de parámetros del vector inicial p_0, ya que cuando se comenzó estimando en el caso de tres personas, hay más posibilidades para el estudio numérico pues los parámetros a_i y m_i fueron estimados con dos familias de parámetros, mientras que en el caso de cuatro personas el estudio numérico de p_0 comienza con los valores óptimos obtenidos con las tres personas.

Por otro lado si comparamos los valores estimados de los parámetros por separado, a_i y m_i tanto en el caso de tres y cuatro personas, estos convergen a valores diferentes. En tanto, cuando se estiman todos los parámetros, la convergencia arroja valores similares en ambas lluvias de ideas para el factor de decaimiento, no así para el factor de acomodación. Es decir cuando aumenta el número de integrantes implica un cambio en el orden de magnitud de la estimación de los parámetros de decaimiento y acomodación.

6. CONCLUSIONES

Tras los resultados obtenidos en los capítulos de estudio numérico y estimación de parámetros es posible afirmar que:

En relación a la propuesta de [4], los cuales plantearon que la lluvia de ideas por escrito corresponde a un modelo no lineal; esto se debe a que los factores inhibidores en la tasa de productividad de ideas el decaimiento y acomodación. Este último da la no linealidad al modelo, pues sólo se da en sentido positivo, es decir, a favor de la producción de ideas de los individuos, pues si un integrante del grupo siente que su rendimiento es menor al del grupo intentará aumentarlo; y en el caso de que perciba que su rendimiento es superior al grupo éste no intentará reducirlo.

En relación al primer objetivo específico propuesto; *evaluar el impacto del número de integrantes en el desempeño global del grupo*, se puede afirmar que tras varias simulaciones numéricas el número de integrantes provoca un impacto en el rendimiento del grupo cuando se combina con el factor de decaimiento, acomodación y condición inicial. En específico, el rendimiento de una persona aumenta con el número de integrantes cuando aumenta la condición inicial y su factor de decaimiento es el menor en los diferentes grupos de trabajo. En tanto cuando el factor de decaimiento sea menor a los demás en cada grupo, el rendimiento aumenta a medida que aumenta el número de integrantes y la condición inicial en forma simultánea. En definitiva, el impacto de la combinación entre la condición inicial y los factores de decaimiento y acomodación afecta de forma significativa en el rendimiento del grupo.

En relación al segundo objetivo específico propuesto; *estimar los parámetros del modelo matemático por comparación con datos experimentales* se puede informar que fue posible la estimación de parámetros a través de dos algoritmos de optimización, con los cuales se logró converger a valores numéricamente razonables en el contexto de una lluvia de ideas por escrito compuesta por tres y también cuatro personas.

En relación al tercer objetivo específico propuesto; *resolver el modelo matemático utilizando métodos analíticos, numéricos y/o cualitativos* se puede informar que el modelo fue resuelto de forma numérica tras la implementación de un programa en *Octave* a través del comando *lsode* donde se pudieron hacer numerosas simulaciones y establecer el impacto de cada uno de los factores y su interacción.

Queda pendiente, como trabajo futuro explorar en nuevos algoritmos de optimización como *lsqnonlin*, además, explorar en nuevas experimentaciones numéricas para estimar parámetros en lluvias de ideas de cinco personas ó más. Además, hacer un estudio analítico del modelo, pues debido a las complejidades se debe explorar en un ambiente matemático más abstracto, lo cual conlleva más tiempo de ejecución.

7. BIBLIOGRAFÍA

[**1**] Al-Samarraie, H., Hurmuzan, S. (2018). A review of brainstorming techniques in higher education. *Thinking Skills and Creativity*, 27, 78–91.

[**2**] Arreola, L., Hernández, A.(2016). La creatividad en la construcción del conocimiento científico: estrategias de razonamiento y solución de problemas. *Revista de divulgación científica. Jóvenes en la Ciencia*, 2(1), 1763-1766.

[**3**] Brown, V., Paulus, P. B. (1996). A simple dynamic model of social factors in group brainstorming. *Small Group Research*, 27, 91-114.

[**4**] Coskun, H., Yizmal, O. (2009). A new dynamical model of brainstorming: Linear, nonlinear, continuous (simultaneous) and impulsive (sequential) cases. *Journal of Mathematical Psychology*, 53, 253-264.

[**5**] Donolo, D. S., Elisondo, R. C. (2007). Creatividad para todos. Consideraciones sobre un grupo particular. Anales de Psicología, 23, 147-151.

[**6**] Eaton, J., Bateman, D., Hauberg, S., Wehbring, R. (2017). GNU OCTAVE, Ed. 4, versión 4.2.1.

[**7**] Elisondo, R. C. (2016). Creatividad y Ciencias: Un estudio biográfico de científicos argentinos. Ciencia, docencia y tecnología, 52, 343-380.

[**8**] García, J.(1998). La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. *Revista Educación y Pedagogía*, 21, 145-174.

[**9**] González, M. (2008). Tormenta de ideas: ¡Qué tontería más genial!. *ACIMED*, 17(4).

[**10**] González, S., Recino, U.(2015). Aprendizaje estratégico en la solución de problemas docentes en estudiantes de Medicina: dimensiones e indicadores. *Educación Médica*, 16(4), 212-217.

[**11**] Graziotin, D, Wang, X., Rikkila, J., Abrahamsson, P. (2013). Traverse the landscape of the mind by walking: an exploration of a new brainstorming practice. Cornell University. DOI:10.7287/peerj.preprints.51v1

[**12**] Gutiérrez, M.(2018). Simulación numérica y estudio analítico de los efectos de decaimiento, bloqueo y acomodación en una sesión grupal tipo lluvia de ideas expresadas en forma verbal. *Tesis de Magíster en Matemáticas Aplicadas*, Universidad Católica de Temuco (Disponible en www.uct.cl/MMA).

[**13**] Hernández Arteaga, I.; Alvarado Pérez, J. C. Luna, S. M. (2015). Creatividad e innovación: competencias genéricas o transversales en la formación profesional. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 44, 135-151.

[**14**] Izquierdo-Rus, T., López-Martínez, O. (2013). Variables que afectan a la creatividad de las personas desempleadas. *Anales de Psicología*, 29 (1), 103-107.

[**15**] Litcanua, M., Prosteana, O., Orosa, C., Vasile, A. (2015). Brain-Writing vs. Brainstorming Case Study For Power Engineering Education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 191, 387 - 390.

[**16**] Martínez, P. (2012). Qué es el pensamiento creativo. Index de Enfermería, 21(3), 165-168.

[**17**] Morán, L.,, Quezada, Y., García, A., González, P., Godínez. S., Aguilera, M. (2016). Resolver problemas y tomar decisiones, esencia de práctica reflexiva en enfermería. Análisis de la literatura. *Enfermería Universitaria*, 13(1), 47-54.

[**18**] Paulus, P., Putman, V., Dugosh, K., Dzindolet, M., Coskun, H. (2002). Social and Cognitive Influences in Group Brainstorming: Predicting Production Gains and Losses. *European Review of Social Psychology*, 12, 299-325.

[**19**] Pérez, Y., Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos.Fundamentos teóricos y metodológicos *Revista de Investigación*, 35, 169-194.

[**20**] Pino, J., Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para los alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.

[**21**] Schmitt, L., Buisine, S., Chaboissier, J., Aoussat, A., Vernier, F. Dynamic tabletop interfaces for increasing creativity. *Computers in Human Behavior*, 28, 1892-1901.

[**22**] Selva-Ruiz, David, Domínguez-Liñán, Raquel, Ruiz-Pérez, Isabel. (2017). Las técnicas de generación de ideas: aplicándolas a la mejora en salud y gestión de cuidados. Index de Enfermería, 26(4), 285-287.

8. ANEXOS

A. Códigos propios. Archivos *.m*

A.1 Lluvia de ideas para dos personas

```
function ss=simulacion2(y,t)
a1=0.2;
a2=0.2;
m1=0.02;
m2=0.02;
ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-y(2))).*(y(1)<y(2))+(-a1*y(1)).*(y(1)>=y(2));
ss(2)=(-a2*y(2)+m2*(y(1)-y(2))).*(y(2)<y(1))+(-a2*y(2)).*(y(2)>=y(1));
endfunction
```

A.2 Lluvia de ideas para tres personas

```
function ss=simulacion3(y,t)
a1=0.097173;
a2=0.212219;
a3=0.320597;
m1=0.09;
m2=0.09;
m3=0.09;
ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3))/2)).*(y(1)<(y(2)+y(3))/2)
+(-a1*y(1)+0).*(y(1)-(y(2)+y(3))/2>=0);
ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3))/2)).*(y(2)<(y(1)+y(3))/2)
+(-a2*y(2)+0).*(y(2)-(y(1)+y(3))/2>=0);
ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2))/2)).*(y(3)<(y(1)+y(2))/2)
+(-a3*y(3)+0).*(y(3)-(y(1)+y(2))/2>=0);
endfunction
```

A.3 Lluvia de ideas para cuatro personas

```
function ss=simulacion4(y,t)
  a1=0.097074;
  a2=0.208111;
  a3=0.273826;
  a4=0.398228;
  m1=0.09;
  m2=0.09;
  m3=0.09;
  m4=0.09;
  ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4))/3)).*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4))/3)+
  (-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4))/3);
  ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4))/3)).*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4))/3)+
  (-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4))/3);
  ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4))/3)).*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4))/3)+
  (-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4))/3);
  ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3))/3)).*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3))/3)+
  (-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3))/3);
  endfunction
```

A.4 Lluvia de ideas para cinco personas

```
function ss=simulacion5(y,t)
```

```
  a1=0.2;
  a2=0.2;
  a3=0.2;
  a4=0.2;
  a5=0.2;
  m1=0.01;
  m2=0.02;
  m3=0.03;
  m4=0.04;
  m5=0.05;
  ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4)+y(5))/4)).*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4)+y(5))/4)
  +(-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4)+y(5))/4);
  ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4)+y(5))/4)).*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4)+y(5))/4)
  +(-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4)+y(5))/4);
  ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4)+y(5))/4)).*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4)+y(5))/4)
  +(-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4)+y(5))/4);
  ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(5))/4)).*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(5))/4)
  +(-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(5))/4);
  ss(5)=(-a5*y(5)-m5*(y(5)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4))/4)).*(y(5)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4))/4)
  +(-a5*y(5)).*(y(5)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4))/4);
  endfunction
```

A.5 Lluvia de ideas para seis personas

```
function ss=simulacion6(y,t)
  a1=0.2;
  a2=0.2;
  a3=0.2;
  a4=0.2;
  a5=0.2;
  a6=0.2;
  m6=0.02;
  m5=0.02;
  m4=0.02;
  m3=0.02;
  m2=0.02;
  m1=0.02;
  ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/5)).*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/5)
  +(-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/5);
  ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/5)).*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/5)
  +(-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/5);
  ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6))/5)).*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6))/5)
  +(-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6))/5);
  ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6))/5)).*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6))/5)
  +(-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6))/5);
  ss(5)=(-a5*y(5)-m5*(y(5)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6))/5)).*(y(5)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6))/5)
  +(-a5*y(5)).*(y(5)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6))/5);
  ss(6)=(-a6*y(6)-m6*(y(6)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5))/5)).*(y(6)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5))/5)
  +(-a6*y(6)).*(y(6)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5))/5);
  endfunction
```

A.6 Lluvia de ideas para siete personas

```
function ss=simulacion7(y,t)
  a1=0.2;
  a2=0.2;
  a3=0.2;
  a4=0.2;
  a5=0.2;
  a6=0.2;
  a7=0.2;
  m7=0.02;
  m6=0.02;
  m5=0.02;
  m4=0.02;
  m3=0.02;
  m2=0.02;
  m1=0.02;
  ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6))
  .*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6)
  +(-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6);
  ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6))
  .*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6)
  +(-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6);
  ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6))
  .*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6)
  +(-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/6);
  ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6)+y(7))/6))
  .*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6)+y(7))/6)
  +(-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6)+y(7))/6);
  ss(5)=(-a5*y(5)-m5*(y(5)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6)+y(7))/6))
  .*(y(5)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6)+y(7))/6)
  +(-a5*y(5)).*(y(5)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6)+y(7))/6);
  ss(6)=(-a6*y(6)-m6*(y(6)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(7))/6))
  .*(y(6)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(7))/6)
  +(-a6*y(6)).*(y(6)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(7))/6);
  ss(7)=(-a7*y(7)-m7*(y(7)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/6))
  .*(y(7)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/6)
  +(-a7*y(7)).*(y(7)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6))/6);
  endfunction
```

A.7 Lluvia de ideas para ocho personas

```
function ss=simulacion8(y,t)
  a1=0.2;
  a2=0.2;
  a3=0.2;
  a4=0.2;
  a5=0.2;
  a6=0.2;
  a7=0.2;
  a8=0.2;
  m1=0.02;
  m2=0.02;
```

```
m3=0.02;
m4=0.02;
m5=0.02;
m6=0.02;
m7=0.02;
m8=0.02;
ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7))
.*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7)
+(-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7);
ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7))
.*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7)
+(-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7);
ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7))
.*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7)
+(-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7);
ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7))
.*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7)
+(-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8))/7);
ss(5)=(-a5*y(5)-m5*(y(5)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6)+y(7)+y(8))/7))
.*(y(5)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6)+y(7)+y(8))/7)
+(-a5*y(5)).*(y(5)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(6)+y(7)+y(8))/7);
ss(6)=(-a6*y(6)-m6*(y(6)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(7)+y(8))/7))
.*(y(6)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(7)+y(8))/7)
+(-a6*y(6)).*(y(6)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(7)+y(8))/7);
ss(7)=(-a7*y(7)-m7*(y(7)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(8))/7))
.*(y(7)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(8))/7)
+(-a7*y(7)).*(y(7)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(8))/7);
ss(8)=(-a8*y(8)-m8*(y(8)-(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/7))
.*(y(8)<(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/7)
+(-a8*y(8)).*(y(8)>=(y(1)+y(2)+y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7))/7);
endfunction
```

A.8 Estimación de parámetros para una lluvia de ideas de tres personas

A.8.1 Estimar tres parámetros

f.27

```
function xx=f27(a1,a2,a3)

tij=[7.5 12.9 15.9 20.3; 1.3 15.4 25.8 28.1; 9.8 13.7 14.2 27];

y0=[34,36,38];
y=lsode("simulacion3",y0,(t=linspace(0,30,10000)'));

function ss=simulacion3(y,t)
m1=0.04
m2=0.05
m3=0.06
ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3))/2)).*(y(1)<(y(2)+y(3))/2)
+(-a1*y(1)+0).*(y(1)-(y(2)+y(3))/2>=0);
ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3))/2)).*(y(2)<(y(1)+y(3))/2)
+(-a2*y(2)+0).*(y(2)-(y(1)+y(3))/2>=0);
```

```
ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2))/2)).*(y(3)<(y(1)+y(2))/2)
+(-a3*y(3)+0).*(y(3)-(y(1)+y(2))/2>=0);

endfunction

%xx=interp1(t,x,xdata,'spline');

%xx=interp1(t,x,tij,'spline');

t1=[7.5 12.9 15.9 20.3]
m1=interp1(t,y(:,1),t1,'spline')
t2=[1.3 15.4 25.8 28.1]
m2=interp1(t,y(:,2),t2,'spline')
t3=[9.8 13.7 14.2 27]
m3=interp1(t,y(:,3),t3,'spline')

xx=[m1;m2;m3]

endfunction
```

f.28

```
 x = [17.018 9.6692 6.3359 5.2064; 27.215 2.7160 0.42794 0.75691;
  3.6334 1.3639 2.0146 0.071690];

my_fun = @(p) sum(sum((x-f27(p(1),p(2),p(3))).^2));
%
p0 = [0.17,0.18,0.19]
result1 = fminunc(my_fun,p0)
result2 = fminsearch(my_fun,p0)
%
So=my_fun(p0)
Sopt1=my_fun(result1)
Sopt2=my_fun(result2)
```

A.8.2 Estimar seis parámetros

f.25

```
function xx=f25(a1,a2,a3,m1,m2,m3)

tij=[7.5 12.9 15.9 20.3; 1.3 15.4 25.8 28.1; 9.8 13.7 14.2 27];

y0=[34,36,38];
y=lsode("simulacion3",y0,(t=linspace(0,30,10000)'));

function ss=simulacion3(y,t)

ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3))/2)).*(y(1)<(y(2)+y(3))/2)
+(-a1*y(1)+0).*(y(1)-(y(2)+y(3))/2>=0);
ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3))/2)).*(y(2)<(y(1)+y(3))/2)
+(-a2*y(2)+0).*(y(2)-(y(1)+y(3))/2>=0);
ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2))/2)).*(y(3)<(y(1)+y(2))/2)
+(-a3*y(3)+0).*(y(3)-(y(1)+y(2))/2>=0);
```

```
endfunction

%xx=interp1(t,x,xdata,'spline');

%xx=interp1(t,x,tij,'spline');

t1=[7.5 12.9 15.9 20.3]
m1=interp1(t,y(:,1),t1,'spline')
t2=[1.3 15.4 25.8 28.1]
m2=interp1(t,y(:,2),t2,'spline')
t3=[9.8 13.7 14.2 27]
m3=interp1(t,y(:,3),t3,'spline')

xx=[m1;m2;m3]

endfunction
```

f.26

```
x = [17.018 9.6692 6.3359 5.2064; 27.215 2.7160 0.42794 0.75691;
3.6334 1.3639 2.0146 0.071690];

my_fun = @(p) sum(sum((x-f25(p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6))).^2));
%
p0 = [0.19,0.19,0.19,0.06,0.06,0.06]
result1 = fminunc(my_fun,p0)
result2 = fminsearch(my_fun,p0)

%
So=my_fun(p0)
Sopt1=my_fun(result1)
Sopt2=my_fun(result2)
```

A.9 Estimación de parámetros para una lluvia de ideas de cuatro personas

A.9.1 Estimar cuatro parámetros f.48

```
function xx=f48(m1,m2,m3,m4)

tij=[7.5 12.9 15.9 20.3; 1.3 15.4 25.8 28.1; 9.8 13.7 14.2 27;4.2 10.5 16.7 23];

y0=[34,36,38,40];
y=lsode("simulacion4",y0,(t=linspace(0,30,10000)'));

function ss=simulacion4(y,t)
  a1=0.17;
  a2=0.18;
  a3=0.19;
  a4=0.2;
  ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4))/3)).*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4))/3)
  +(-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4))/3);
  ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4))/3)).*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4))/3)
  +(-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4))/3);
```

```
  ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4))/3)).*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4))/3)
  +(-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4))/3);
  ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3))/3)).*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3))/3)
  +(-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3))/3);
  endfunction

%xx=interp1(t,x,xdata,'spline');

%xx=interp1(t,x,tij,'spline');

t1=[7.5 12.9 15.9 20.3]
m1=interp1(t,y(:,1),t1,'spline')
t2=[1.3 15.4 25.8 28.1]
m2=interp1(t,y(:,2),t2,'spline')
t3=[9.8 13.7 14.2 27]
m3=interp1(t,y(:,3),t3,'spline')
t4=[4.2 10.5 16.7 23]
m4=interp1(t,y(:,4),t4,'spline')

xx=[m1;m2;m3;m4]

endfunction
```

f.49

```
x = [17.018 9.6692 6.3359 5.2064; 27.215 2.7160 0.42794 0.75691;
3.6334 1.3639 2.0146 0.071690; 8.83252 1.09588 1.34364 0.34813];

my_fun = @(p) sum(sum((x-f48(p(1),p(2),p(3),p(4))).^2));
%
p0 = [1.312566,1.312566,1.312566,1.312566]
result1 = fminunc(my_fun,p0)
result2 = fminsearch(my_fun,p0)
%
So=my_fun(p0)
Sopt1=my_fun(result1)
Sopt2=my_fun(result2)
```

A.9.2 Estimar ocho parámetros

f.50

```
function xx=f50(a1,a2,a3,a4,m1,m2,m3,m4)

tij=[7.5 12.9 15.9 20.3; 1.3 15.4 25.8 28.1; 9.8 13.7 14.2 27;4.2 10.5 16.7 23];

y0=[34,36,38,40];
y=lsode("simulacion4",y0,(t=linspace(0,30,10000)'));

function ss=simulacion4(y,t)
  ss(1)=(-a1*y(1)-m1*(y(1)-(y(2)+y(3)+y(4))/3)).*(y(1)<(y(2)+y(3)+y(4))/3)
  +(-a1*y(1)).*(y(1)>=(y(2)+y(3)+y(4))/3);
  ss(2)=(-a2*y(2)-m2*(y(2)-(y(1)+y(3)+y(4))/3)).*(y(2)<(y(1)+y(3)+y(4))/3)
```

```
  +(-a2*y(2)).*(y(2)>=(y(1)+y(3)+y(4))/3);
  ss(3)=(-a3*y(3)-m3*(y(3)-(y(1)+y(2)+y(4))/3)).*(y(3)<(y(1)+y(2)+y(4))/3)
  +(-a3*y(3)).*(y(3)>=(y(1)+y(2)+y(4))/3);
  ss(4)=(-a4*y(4)-m4*(y(4)-(y(1)+y(2)+y(3))/3)).*(y(4)<(y(1)+y(2)+y(3))/3)
  +(-a4*y(4)).*(y(4)>=(y(1)+y(2)+y(3))/3);
endfunction

t1=[7.5 12.9 15.9 20.3]
m1=interp1(t,y(:,1),t1,'spline')
t2=[1.3 15.4 25.8 28.1]
m2=interp1(t,y(:,2),t2,'spline')
t3=[9.8 13.7 14.2 27]
m3=interp1(t,y(:,3),t3,'spline')
t4=[4.2 10.5 16.7 23]
m4=interp1(t,y(:,4),t4,'spline')
xx=[m1;m2;m3;m4]

endfunction
```

f.51

```
x = [17.018 9.6692 6.3359 5.2064; 27.215 2.7160 0.42794 0.75691;
3.6334 1.3639 2.0146 0.071690;8.83252 1.09588 1.34364 0.34813];

my_fun = @(p) sum(sum((x-f50(p(1),p(2),p(3),p(4),p(5),p(6),p(7),p(8))).^2));
%
p0 = [0.254210,0.254210,0.254210,0.254210,0.325625,0.325625,0.325625,0.325625]
result1 = fminunc(my_fun,p0)
result2 = fminsearch(my_fun,p0)

%
So=my_fun(p0)
Sopt1=my_fun(result1)
Sopt2=my_fun(result2)
```

B. Ejemplos de ejecución

B.1 Análisis de sensibilidad prueba 3

```
>> y0=[15,15,15];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,1),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> grid on
>> title ('Grafico 1')
>> legend('Persona 1','Persona 2','Persona 3')
>> y0=[15,15,15];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,2),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[15,15,15,15];
>> y=lsode("simulacion4",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> legend('n=3','n=4')
>> title ('Grafico 2')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> y0=[15,20,25];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,3),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Grafico 3')
>> legend('Persona 1','Persona 2','Persona 3')
>> grid on
>> y0=[15,20,25];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,4),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[15,20,25,30];
>> y=lsode("simulacion4",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Grafico 4')
>> grid on
>> legend('n=3','n=4')
```

B.2 Evaluar impacto condición inicial

Simulación lluvia de ideas por escrito de tres personas

```
>> t=[0:0.1:30];
>> y0=[24,26,28];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,1,1),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
```

```
>> title ('Lluvia de ideas tres personas')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa de generacion de ideas')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2','Persona 3')
>> grid on
>> y0=[28,26,24];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,1,2),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa de generacion de ideas')
>> grid on
>> legend('Persona 1', 'Persona 2','Persona 3')
>> title ('Lluvia de ideas tres personas')
```

B.3 Evaluar el impacto del número de integrantes

Comparación del desempeño cuando varía n y a_i

```
>> y0=[36,36,36];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,1),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa de generacion de ideas')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3')
>> y0=[36,36,36];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,2),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa de generacion de ideas')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3')
>> y0=[36,36,36,36];
>> y=lsode("simulacion4",y0,t);
>> subplot(2,2,3),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g', t, y(:,4), 'k')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa de generacion de ideas')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3','Persona 4')
>> y0=[36,36,36,36];
>> y=lsode("simulacion4",y0,t);
>> subplot(2,2,4),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g', t, y(:,4), 'k')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa de generacion de ideas')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3','Persona 4')
```

B.4 Evaluar el impacto de cada uno de los factores y su interacción.

Impacto en el rendimiento del grupo de la interacción entre los factores a_i, m_i y x_0

```
>> y0=[32,34,36];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,1),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
```

```
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Grafico 1')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3')
>> y0=[32,34,36];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,2),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Grafico 2')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3')
>> y0=[32,34,36];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,3),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Grafico 3')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3')
>> y0=[36,34,32];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,2,4),plot (t, y(:,1), 'r', t, y(:,2), 'b', t, y(:,3), 'g')
>> grid on
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Grafico 4')
>> legend('Persona 1', 'Persona 2', 'Persona 3')
```

B.5 Grupos con tendencias particulares

B.5.1. Comparación del desempeño en relación a la combinación de la condición inicial y factor de acomodación en diferentes grupos de trabajo

```
>> y0=[24,26,28];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,1,1),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[24,26,28,30,32];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[24,26,28,30,32,34,36];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> legend('Grupo de 3', 'Grupo de 5', 'Grupo de 7')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> title ('Rendimiento persona 1')
>> grid on
>> y0=[24,26,28];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,1,2),plot (t, y(:,1), 'r')
```

```
>> hold on
>> y0=[24,26,28,30,32];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[24,26,28,30,32,34,36];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> grid on
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> legend('Grupo de 3', 'Grupo de 5', 'Grupo de 7')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
```

B.5.2. Comparación del desempeño en relación a la combinación de la condición inicial y factor de decaimiento en diferentes grupos de trabajo.

```
>> y0=[24,26,28];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(3,1,1),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[24,26,28,30,32];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[24,26,28,30,32,34,36];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa gen. ideas')
>> title ('Rendimiento persona 1')
>> grid on
>> legend('Grupo de 3', 'Grupo de 5', 'Grupo de 7')
>> title ('Grafico 1')
>> y0=[28,26,24];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(3,1,2),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[32,30,28,26,24];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[36,34,32,30,28,26,24];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> title ('Grafico 2')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> ylabel('Tasa gen. ideas')
>> xlabel('Tiempo')
>> grid on
>> legend('Grupo de 3', 'Grupo de 5', 'Grupo de 7')
>> y0=[28,26,24];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(3,1,3),plot (t, y(:,1), 'r')
```

```
>> hold on
>> y0=[32,30,28,26,24];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[36,34,32,30,28,26,24];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> title ('Grafico 3')
>> grid on
>> ylabel('Tasa gen. ideas')
>> xlabel('Tiempo')
>> legend('Grupo de 3', 'Grupo de 5', 'Grupo de 7')
```

figura n 23

B.5.3

```
>> y0=[36,24,24];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,1,1),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[36,24,24,24,24];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[36,24,24,24,24,24,24];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> legend('Grupo de 3','Grupo de 5', 'Grupo de 7')
>> grid on
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> xlabel('Tiempo')
>> title('Grafico 1')
>> y0=[28,26,24];
>> y=lsode("simulacion3",y0,t);
>> subplot(2,1,2),plot (t, y(:,1), 'r')
>> hold on
>> y0=[32,30,28,26,24];
>> y=lsode("simulacion5",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'b')
>> y0=[36,34,32,30,28,26,24];
>> y=lsode("simulacion7",y0,t);
>> plot (t, y(:,1), 'g')
>> grid on
>> title('Grafico 2')
>> xlabel('Tiempo')
>> ylabel('Tasa generacion ideas')
>> legend('Grupo de 3','Grupo de 5', 'Grupo de 7')
```

B.6 Estimación de parámetro de decaimiento en n=3

Primero recurrir a sección A códigos propios f,27 y f,28. Entregar p_0 del experimento 12. Los algoritmos de optimización entregarán la siguiente estimación:

```
>> So
So =  164.63
>> Sopt1
Sopt1 =  2.2265
>> Sopt2
Sopt2 =  2.2265
>> result1
result1 =

   0.097173   0.212219   0.320597

>> result2
result2 =

   0.097172   0.212221   0.320581
```

C. Algoritmos de optimización usados

C.1 Algortimo *fminunc*

```
 -- fminunc (FCN, X0)
 -- fminunc (FCN, X0, OPTIONS)
 -- [X, FVAL, INFO, OUTPUT, GRAD, HESS] = fminunc (FCN, ...)
     Solve an unconstrained optimization problem defined by the function
     FCN.

     FCN should accept a vector (array) defining the unknown variables,
     and return the objective function value, optionally with gradient.
     'fminunc' attempts to determine a vector X such that 'FCN (X)' is a
     local minimum.

     X0 determines a starting guess.  The shape of X0 is preserved in
     all calls to FCN, but otherwise is treated as a column vector.

     OPTIONS is a structure specifying additional options.  Currently,
     'fminunc' recognizes these options: "FunValCheck", "OutputFcn",
     "TolX", "TolFun", "MaxIter", "MaxFunEvals", "GradObj",
     "FinDiffType", "TypicalX", "AutoScaling".

     If "GradObj" is "on", it specifies that FCN, when called with two
     output arguments, also returns the Jacobian matrix of partial first
     derivatives at the requested point.  'TolX' specifies the
     termination tolerance for the unknown variables X, while 'TolFun'
     is a tolerance for the objective function value FVAL.  The default
     is '1e-7' for both options.
      For a description of the other options, see 'optimset'.

     On return, X is the location of the minimum and FVAL contains the
     value of the objective function at X.

     INFO may be one of the following values:

     1
          Converged to a solution point.  Relative gradient error is
          less than specified by 'TolFun'.

     2
          Last relative step size was less than 'TolX'.

     3
          Last relative change in function value was less than 'TolFun'.

     0
          Iteration limit exceeded--either maximum number of algorithm
          iterations 'MaxIter' or maximum number of function evaluations
          'MaxFunEvals'.
    -1
          Algorithm terminated by 'OutputFcn'.
```

```
-3
     The trust region radius became excessively small.

Optionally, 'fminunc' can return a structure with convergence
statistics (OUTPUT), the output gradient (GRAD) at the solution X,
and approximate Hessian (HESS) at the solution X.

Application Notes: If the objective function is a single nonlinear
equation of one variable then using 'fminbnd' is usually a better
choice.
 The algorithm used by 'fminunc' is a gradient search which depends
on the objective function being differentiable.  If the function
has discontinuities it may be better to use a derivative-free
algorithm such as 'fminsearch'.
```

C.2 Algortimo *fminsearch*

```
 -- X = fminsearch (FUN, X0)
-- X = fminsearch (FUN, X0, OPTIONS)
-- X = fminsearch (FUN, X0, OPTIONS, FUN_ARG1, FUN_ARG2, ...)
-- [X, FVAL, EXITFLAG, OUTPUT] = fminsearch (...)

Find a value of X which minimizes the function FUN.

The search begins at the point X0 and iterates using the Nelder &
Mead Simplex algorithm (a derivative-free method).  This algorithm
is better-suited to functions which have discontinuities or for
which a gradient-based search such as 'fminunc' fails.

Options for the search are provided in the parameter OPTIONS using
the function 'optimset'.  Currently, 'fminsearch' accepts the
options: "TolX", "TolFun", "MaxFunEvals", "MaxIter", "Display",
"FunValCheck", and "OutputFcn".  For a description of these
options, see 'optimset'.

Additional inputs for the function FUN can be passed as the fourth
and higher arguments.  To pass function arguments while using the
default OPTIONS values, use '[]' for OPTIONS.

On exit, the function returns X, the minimum point, and FVAL, the
function value at the minimum.
 The third return value EXITFLAG is

1
     if the algorithm converged (size of the simplex is smaller
     than 'OPTIONS.TolX' *AND* the step in the function value
     between iterations is smaller than 'OPTIONS.TolFun').

0
     if the maximum number of iterations or the maximum number of
     function evaluations are exceeded.
```

```
-1
     if the iteration is stopped by the "OutputFcn".

The fourth return value is a structure OUTPUT with the fields,
'funcCount' containing the number of function calls to FUN,
'iterations' containing the number of iteration steps, 'algorithm'
with the name of the search algorithm (always: "Nelder-Mead simplex
direct search"), and 'message' with the exit message.

Example:

     fminsearch (@(x) (x(1)-5).^2+(x(2)-8).^4, [0;0])
```

D. Comando *lsode*

```
   -- [X, ISTATE, MSG] = lsode (FCN, X_0, T)
 -- [X, ISTATE, MSG] = lsode (FCN, X_0, T, T_CRIT)
     Ordinary Differential Equation (ODE) solver.

     The set of differential equations to solve is

          dx
          -- = f (x, t)
          dt

     with

          x(t_0) = x_0

     The solution is returned in the matrix X, with each row
     corresponding to an element of the vector T.  The first element of
     T should be t_0 and should correspond to the initial state of the
     system X_0, so that the first row of the output is X_0.

     The first argument, FCN, is a string, inline, or function handle
     that names the function f to call to compute the vector of right
     hand sides for the set of equations.  The function must have the
     form

          XDOT = f (X, T)

     in which XDOT and X are vectors and T is a scalar.

     If FCN is a two-element string array or a two-element cell array of
     strings, inline functions, or function handles, the first element  names the function f described abo
     a function to compute the Jacobian of f.  The Jacobian function
     must have the form

          JAC = j (X, T)
           in which JAC is the matrix of partial derivatives

                       | df_1  df_1       df_1 |
                       | ----  ----  ...  ---- |
                       | dx_1  dx_2       dx_N |
                       |                       |
                       | df_2  df_2       df_2 |
                       | ----  ----  ...  ---- |
            df_i       | dx_1  dx_2       dx_N |
          jac = ---- = |                       |
            dx_j       |  .     .     .    .   |
                       |  .     .       .  .   |
                       |  .     .         .    |
                       |                       |
                       | df_N  df_N       df_N |
                       | ----  ----  ...  ---- |
```

```
                  | dx_1  dx_2       dx_N |

The second argument specifies the initial state of the system x_0.
The third argument is a vector, T, specifying the time values for
which a solution is sought.

The fourth argument is optional, and may be used to specify a set
of times that the ODE solver should not integrate past.  It is
useful for avoiding difficulties with singularities and points
where there is a discontinuity in the derivative.
 After a successful computation, the value of ISTATE will be 2
(consistent with the Fortran version of LSODE).

If the computation is not successful, ISTATE will be something
other than 2 and MSG will contain additional information.

You can use the function 'lsode_options' to set optional parameters
for 'lsode'.
```

E. Algoritmos de optimización

Algoritmo	Características	Método numérico
lsode	Genera aproximaciones numéricas, referentes a la solución de una ecuación diferencial ordinaria. En este caso, entrega las aproximaciones numéricas referentes a las curvas solución del rendimiento de cada persona en una lluvia de ideas por escrito. lsode toma como parámetros la función que declaramos, luego la condición inicial. Por último la variable x, la cual contiene el intervalo en que se quiere resolver la ecuación diferencial. En general: y=lsode("f",4,(x=linspace(0,5,1000)'));	Utiliza método de integración. Una cadena que especifica el método de integración a utilizar para resolver el sistema ODE. Los valores válidos son: ▪ *Adams* ▪ *Non-stiff* No se usa jacobiano (incluso si está disponible).
Fminunc	Algoritmo de optimización. Busca el mínimo de un problema especificado por: $Minf(x)$ $f(x)$ es una función que devuelve un escalar, y x es un vector o una matriz. La llamada de a esta función está dada por la siguiente sintaxis: ▪ $x = fminunc(fun, x0, options)$ ▪ fun: es la función objetivo. ▪ $x0$: es el punto inicial de iteración. Usa un algoritmo que necesita información sobre el gradiente de la función objetivo (matriz hessiana), para lo cual puede especificarse manualmente o permitir que el software lo calcule por su cuenta.	En relación al algoritmo utilizado por $fminunc$ es una búsqueda de gradiente que depende de que la función objetivo sea diferenciable. Si la función tiene discontinuidades, puede ser mejor usar un algoritmo libre de derivados, como fminsearch.
Fminsearch	Algoritmo de optimización. Busca el mínimo de un problema especificado por: $Minf(x)$ $f(x)$ es una función que devuelve un escalar, y x es un vector o una matriz. La llamada de a esta función está dada por la siguiente sintaxis: ▪ $x = fminsearch(fun, x0, options)$ ▪ fun: es la función objetivo. ▪ $x0$: es el punto inicial de iteración. Usa un algoritmo que no necesita información sobre el gradiente de la función objetivo (matriz hessiana).	Se basa en Nelder & Mead Simplex algorithm. La búsqueda comienza en el punto $x0$ y se repite utilizando el algoritmo Nelder & Mead Simplex (un método sin derivados). Este algoritmo se adapta mejor a las funciones que tienen discontinuidades o para las cuales fminunc falla una búsqueda basada en gradiente.

Tabla 34: Algoritmos